

О решении обратных задач геофизики с помощью методов теории динамических систем

© И. Э. Степанова, Д. Н. Раевский, 2014

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия

Поступила 9 октября 2013 г.

Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко

Розглянуто методіку розв'язання обернених задач геофізики щодо знаходження форми аномалісутворювальних тіл за допомогою дослідження розв'язання нелінійного диференціального рівняння, яке перетворюється у нескінченний ланцюжок лінійних диференціальних рівнянь, так званий ланцюжок ієрархій Тоди. Нескінченна система лінійних диференціальних рівнянь, у свою чергу, тісно пов'язана з геометричними параметрами шуканої області — її моментами. Моменти області у тривимірному просторі визначають відображення деякої канонічної області на невідоме джерело аномального поля, яке можна знайти за допомогою мінімізації деякого регуляризуючого функціонала. Наведено приклади розв'язання обернених задач рудного типу, коли джерело гравітаційного поля обмежено у просторі й має властивість зірковості щодо деякої своєї внутрішньої точки.

Ключові слова: регуляризація, динамічні системи, ланцюжки Тоди, конформне відображення, моменти області.

Введение. Нелинейные обратные задачи геофизики рассматривались в большом количестве работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Применялись самые разнообразные методы, среди которых необходимо выделить подходы, предложенные В. Н. Страховым [Страхов, Бродский, 1983, 1984], В. И. Старостенко [Старостенко и др., 1975; Старостенко, 1978], А. В. Цирульским и его школой [Цирульский и др., 1980; Цирульский, Пругкин, 1981], Д. Зидаровым [Зидаров, 1968, 1984], Е. П. Булахом [Булах, 1999] и многими другими исследователями.

Тесную связь между теорией фильтрации и потенциальными полями подчеркивали А. Забродин и соавторы [Wiegman, Zabrodin, 2000].

В работах [Степанова, 2011, 2012] было описано, как связаны бездисперсионные цепочки Тоди с различными задачами математической физики. Известно, что область на плоскости с достаточно гладкой границей полностью определяется своими гармоническими моментами. Обратные задачи теории потенциала имеют много общего с теорией фильтрации жидкостей. Например, граница водной капли (невязкой жид-

кости) изменяется в слое масла (вязкость которого предполагается отличной от нуля) по закону, известному как закон Дарси в теории фильтрации:

$$v = \lambda \operatorname{grad} p,$$

где p — внешнее давление, λ — коэффициент. Внешнее давление является гармонической функцией всюду вне области, за исключением конечного набора точек, в которых производится "накачка". На границе капли давление равно нулю, как и внутри водной капли, в предположении, что вязкость воды равна нулю. Если справедлив закон Дарси, то сохраняются все внешние моменты плоской области, кроме нулевого, представляющего собой площадь данной области.

Если заданы внешние моменты некоторой области на плоскости, то сама область определяется по ним однозначно. Будем находить конформное отображение внешности некоторой канонической области, например единичного круга на внешность искомой области. Известно, что такое отображение единственно в случае звездных относительно некоторой внутренней точ-

ки областей на плоскости (см., например, [Евграфов, 1991]).

Внешнее давление при этом считается известным, т. е. источники накачки заданы. Искомое конформное отображение определяется по известным моментам области с помощью построения бездисперсионной цепочки Тоды. В роли внешнего давления может выступать и другая гармоническая функция, а также предел непрерывных функций, как это наблюдается в случае восстановления топографии земной поверхности. Таким образом, известные моменты области играют роль независимых переменных, а неизвестные (определяемые внутри искомого источника) — функций, относительно которых и выписывается цепочка уравнений. Подобные задачи на плоскости носят название "Laplacean growth", что можно трактовать как разрастание водной капли под действием сил давления, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Решение цепочки уравнений (иерархии Тоды) дает так называемая τ -функция, которую можно представить как свободную энергию некоторой динамической системы. Вторые производные данной функции по соответствующим переменным и позволяют найти моменты области.

Для областей на плоскости, представляющих собой эллипсы и фигуры, близкие к ним, построение цепочки Тоды осуществляется сравнительно просто, как показано в упомянутой выше работе А. Забродина.

В трехмерном случае закон Дарси также выполняется, т. е. сохраняются все моменты области в R^3 , кроме нулевого, представляющего собой объем ограниченной области. Но связь между внешними моментами и некоторым гладким отображением внешности искомой области на внешность единичного шара (по аналогии с единичным кругом на плоскости) становится не такой явной. Таким образом, получаем некоторую последовательность трехмерных областей, зависящую от параметра (или параметров), которая аппроксимирует искомую область. Кроме того, нельзя задать точечные источники "накачки" — источники внешнего давления, которое стремится изменить форму водной капли (сжать ее весьма причудливым, как показывают эксперименты, образом). Однако интеграл от давления по поверхности некоторой сферы бесконечно большого радиуса расходится. Поэтому можно считать, что на бесконечности есть сингулярность, т. е. внешнее давление.

Ранее [Степанова, 2012] предлагалось приближать неизвестный трехмерный источник

гравитирующих масс совокупностью базовых цилиндров (прямых и наклонных). Базовый цилиндр — это произведение области на плоскости на отрезок по оси z [Степанова, 1997, 1998]:

$$D = D_2 \times [z_1, z_2]; D_2 \in C; z_1, z_2 \in R.$$

Для каждого из цилиндров строится своя цепочка Тоды, а затем осуществляется усреднение по всем полученным решениям этих цепочек. Другими словами, находим такую цепочку Тоды, которая наилучшим образом аппроксимировала бы весь источник (как правило, применяется некоторая модификация метода наименьших квадратов). Цепочка Тоды как совокупность функций, удовлетворяющих бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений с непостоянными коэффициентами (которые считаются известными), определяет конформное отображение внешности единичного круга на внешность сечения базового цилиндра, как это будет показано ниже.

Решение цепочки уравнений (т. е. конформного отображения) находилось в виде конечных сумм симметрических многочленов. Такое представление позволяет учесть симметрию заданного внешнего поля. В то же время, если рассматривать более широкий класс функций, то приходим к представлению искомого решения в виде функций, являющихся пределом описанных выше рядов по симметрическим многочленам [Мақдональд, 1985]. Необходимо отметить, что в трехмерном случае мы имеем дело не обязательно с гармоническими функциями, поскольку внешнее поле — функция, гармоническая в *трехмерном*, а не в двумерном пространстве. Поэтому трехмерные нелинейные обратные задачи требуют разработки более сложных и устойчивых приближенных методов решения, нежели их аналоги в двумерном варианте. И можно, по аналогии с двумерным случаем, рассматривать разрастание капли невязкой жидкости под действием сил давления, удовлетворяющих уравнению Пуассона в каждом плоском сечении.

Предложенная методика решения обратных трехмерных задач гравимагниторазведки была протестирована на нескольких модельных примерах.

Описание метода решения нелинейной обратной задачи. Пусть выполняется закон Дарси (в теории фильтрации жидкостей принимается такое предположение):

$$v = -\lambda \operatorname{grad} p(x, y, u) =$$

$$= \left(-\lambda \frac{\partial p}{\partial x}, -\lambda \frac{\partial p}{\partial y}, -\lambda \frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где v — скорость изменения границы трехмерной области D_3 , $p(x, y, u)$ — давление как функция пространственных координат, λ — числовой множитель, зависящий от условий задачи. Обычно таким образом описывается распределение давлений в двух средах, граничащих друг с другом. Например, можно рассмотреть поведение капли воды (невязкой жидкости) в слое масла (вязкой жидкости). Важно отметить, что давление внутри капли воды считается равным нулю, равно как и на границе.

В работах А. Забродина и соавторов рассматривалась плоская задача и неизвестная область, занятая водой, которая характеризовалась внутренними и внешними моментами. При этом считалось, что внешние моменты области заданы, а внутренние подлежат определению.

В трехмерном случае необходимо выбрать такие характеристики искомой области, чтобы обратная задача решалась наиболее простым образом и можно было бы применить результаты, полученные для плоского случая.

В двумерном случае все соотношения между неизвестными функциями, определяющими границу искомой области, достаточно просты [Wiegman, Zabrodin, 2000]. Если мы имеем дело с трехмерными телами, создающими поля в окружающем пространстве, то можно попытаться аппроксимировать искомый объект совокупностью более "простых", например базовых цилиндров. Для каждого базового цилиндра можно построить отображение внешности единичного круга на внешность его сечения в S , а затем решить задачу оптимизации выбора такой конфигурации базовых цилиндров, чтобы она порождала наиболее близкое к заданному внешнее потенциальное поле. Кроме того, необходимо учесть имеющуюся априорную информацию об источниках: наличие симметрий, глубину залегания (хотя бы диапазон глубин), уровень помех во входных данных. Подобная априорная информация позволяет регуляризовать обратную задачу, которая является некорректной. Конструкция базовых цилиндров может эффективно применяться для осесимметричных полей при наличии слоистых сред, когда толщина слоя мала по сравнению с горизонтальным простиранием. Внешние моменты области считаются известными, а внутренние рассматриваются как функции внешних и времени. Степень симметрии поля

надо уметь оценивать количественно. В этом случае уменьшается неопределенность выбора аномалиеобразующего тела, т. е. сокращается класс возможных решений (или квазирешений) обратной нелинейной задачи. Рассмотрим поэтапно шаги, которые необходимо выполнить, чтобы решить обратную нелинейную задачу определения формы аномалиеобразующего тела (или группы тел).

Аппроксимационная конструкция для поля. На первом этапе предлагается построить аппроксимацию исходного поля с помощью симметрических функций (в частности, полиномов). Аппроксимация строится с помощью одного из методов, описанных в предыдущих работах автора [Степанова, 2011, 2012, 2013]: получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов разложения по симметрическим полиномам, которая обязательно регуляризуется.

Фильтрация исходных данных об элементе поля. Элементы поля не бывают свободны от погрешностей, поэтому целесообразно осуществить предварительную фильтрацию данных. Это можно осуществить с помощью метода интегральных представлений [Страхов, 1999], который позволяет осуществлять фильтрацию входных данных от помех, выделять особенности элементов потенциала, разделять поля и т.д.

Выбор аппроксимационной конструкции для описания неизвестного тела. Если аномалиеобразующее тело разбито на базовые цилиндры (для простоты будем считать, что оси этих цилиндров параллельны оси z), то можно определить моменты каждого из этих цилиндров следующим образом:

$$\begin{aligned} v_k &= \int_{D_{xy}} z^k ds, \quad k = 1, 2, \dots, \\ t_k &= - \int_{\bar{D}_{xy}} z^{-k} ds, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Нулевой момент обозначим через t_0 :

$$t_0 = \int_{D_{xy}} dx dy.$$

Здесь \bar{D}_{xy} — это внешность области D_{xy} , а сама эта область представляет собой сечение базового цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси z . Внешние и внутренние моменты сечений базового цилиндра специально обозначены разными буквами, чтобы подчеркнуть тот факт, что величины t_k являются независимыми параметрами в двумерном (!) случае

(в сущности, независимыми переменными, по которым осуществляется дифференцирование функции, задающей отображение некоторой канонической области комплексного переменного на искомое сечение базового цилиндра), а v_k — функциями, подлежащими определению. При этом нулевой момент тоже является переменной (принимаяющей лишь действительные значения). Площадь двумерной области и набор моментов такой области идентифицируются со временами бездисперсионной двумерной иерархии Тоды:

$$\tau_k = \frac{t_k}{\pi k}, \quad k \geq 1, \quad \tau_0 = t = \frac{t_0}{\pi}.$$

Также в упомянутой работе А. Забродина было показано, что внутренние моменты как функции внешних моментов, удовлетворяющие определенным условиям комплексной сопряженности, могут быть выражены как частные производные всего одной функции (так называемой τ -функции):

$$v_k \equiv \frac{t_{-k}}{\pi} = \frac{\partial \log \tau}{\partial \tau_k}, \quad k \geq 1.$$

Из закона Дарси (как показано в работах А. Забродина) следует, что внешние моменты области в двумерном случае сохраняются с течением времени. Однако в трехмерном пространстве внешние моменты уже не являются константами:

$$\begin{aligned} \frac{dt_k}{dt} &= \int_{\partial D_{xy}} z^{-k} v_{xy}(x, y, u) ds = \\ &= -\lambda \iint_{D_{xy}} z^{-k} \Delta p dx dy = \\ &= -\lambda \iint_{D_{xy}} z^{-k} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}(x, y, u) dx dy \neq 0, \end{aligned}$$

поскольку давление $p(x, y, u)$ — гармоническая функция в трехмерном пространстве. Здесь $z = x + iy$ — комплексное число, v — скорость изменения границы трехмерной области D_3 , v_{xy} — проекция вектора скорости на плоскость сечения (сама скорость изменения границы трехмерной области, конечно, направлена по нормали к границе трехмерного объекта). Если искомое тело является совокупностью базовых цилиндров с осями, параллельными оси

z , то скорости изменения границ каждого из таких цилиндров перпендикулярны указанной оси и лежат в плоскости сечений, а основания цилиндров — из набора "движутся" вдоль оси z . Таким образом, аппроксимационная конструкция неизвестного источника поля с течением времени изменяется: сечения цилиндров деформируются (каждое по своему закону), и высоты цилиндров также изменяются. Скорость изменения двумерной границы трехмерной области можно разложить на две компоненты: одна v_{xy} определяет деформацию формы сечения базового цилиндра, а перпендикулярная ей v_z "заставляет" цилиндры вытеснять друг друга. Понятно, что если выполняется условие $|v_{xy}| \gg \gg |v_z|$, то ситуация близка к плоскому случаю. Нулевой момент в двумерном случае не сохраняется (он численно равен площади сечения). Будем считать нулевой момент аналогом времени. Поэтому зависимость различных величин от этого нулевого момента можно назвать динамической системой. Описываем законы движения гипотетических частиц по осям координат: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Мы не стали указывать "индекс" частицы, поскольку речь идет не о реальных частицах, а об изменении формы границы источника потенциального поля. По этой же причине все упоминаемые ниже гамильтонианы также являются "виртуальными": они входят в описание потоков определенных величин, таких, например, как изменяющиеся нулевой и внешние моменты искомой области. Если считать, что внешние моменты варьируются, то можно описать изменения конформных отображений единичного круга на внутреннюю область сечения базового цилиндра в зависимости от переменных t, t_k .

Способ определения сечения базового цилиндра. Для каждого из базовых цилиндров рассматриваются конформные отображения внешности канонической области двумерной плоскости (единичного круга) на внешность данного сечения. Конформные отображения представляются в виде рядов Лорана (для каждого цилиндра — свой ряд) по комплексной переменной w . Отображения имеют такой вид, чтобы бесконечная точка сферы Римана отображалась в себя:

$$z(\mathbf{w}) = r w + \sum_{j=0}^{\infty} u_j w^{-j}.$$

При этом потребуем, чтобы r было вещественным числом.

Связь базового цилиндра в трехмерном пространстве с областью специального вида в четырехмерном пространстве. k -й момент пространственной области определяется как

$$t_k = \iiint_{D_3} z^{-k} dx dy du. \quad (3)$$

Тогда, учитывая, что трехмерная область D_3 является функцией времени, можно продифференцировать k -й момент по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dt_k}{dt} &= \iint_{\partial D_3} z^{-k} v(x, y, u) ds = \\ &= -\lambda \iiint_{D_3} z^{-k} \Delta p dx dy du = 0, \end{aligned}$$

поскольку давление $p(x, y, u)$ — гармоническая функция в трехмерном пространстве.

Можно рассматривать "реальные" трехмерные пространственные области, тогда u можно обозначить, как обычно, через z . Если же переходить к четырехмерному вещественному пространству (двумерному комплексному), то переменная τ будет комплексной. Тогда двумерный k -й момент можно определить следующим образом:

$$t_k = \iint_{D_1} z_1^{-k} dx dy, \quad (4)$$

где D_1 — сечение четырехмерного носителя масс комплексной прямой,

$$z_2 = \text{const} = u.$$

И такой "двумерный" момент не сохраняется. Выясним, какие величины являются константами в четырехмерном случае.

Поскольку справедлив закон Дарси $v = \lambda \nabla p$ и на границе области $p = 0$, то в процессе деформации области сохраняются следующие величины:

$$\frac{dt_k}{dt} = \int_{\partial D} v(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2} dl = \int_D \Delta p(\zeta) z_1^{k_1} z_2^{k_2} d\zeta = 0.$$

Применяя вторую формулу Грина, получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right) \left(z_1^{k_1} z_2^{k_2} \right) = 0,$$

$$z_1 = x_1 + i y_1, \quad z_2 = x_2 + i y_2.$$

В пространстве двух комплексных переменных рассмотрены плюригармонические функции, частным случаем которых являются гармонические:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_\mu^2} \right) u(z_1, z_2) = 0, \quad \mu = 1, 2,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial y_\mu} \right) u(z_1, z_2) = 0,$$

$$\mu, \nu = 1, 2.$$

Второе равенство превращается в тождество при равенстве индексов.

Возникает вопрос: как связать закон Дарси для четырехмерных объектов с деформацией трехмерных? Ведь моменты сохраняются в четырехмерном пространстве, что происходит с трехмерными "проекциями" D_3 областей D_4 ? Ограничимся сначала рассмотрением областей специального вида, аналогичных базовым цилиндрам в трехмерном пространстве.

Пусть известны $V_i(\xi)$, $\xi \in D$, $\rho = \text{const} > 0$ в $D = D_n$. Здесь под $V_i(\xi)$ понимается внутренний потенциал (или его элемент, представляющий собой высшую производную потенциала), $\rho = \text{const} > 0$ — плотность источников.

Можно также предположить, что задан внешний потенциал $V_e(\xi)$, $\xi \notin \bar{D}$ и справедливы следующие уравнения:

$$\Delta_\xi V_i(\xi) = -4\pi\gamma\rho(\xi), \quad \xi \in D,$$

$$\Delta_\xi V_e(\xi) = 0, \quad \xi \in \bar{D}.$$

В трехмерном случае можно выразить внешний потенциал через плотность источников:

$$V_e(x, y, z) =$$

$$= \gamma \iiint_D \frac{\rho dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

где γ — гравитационная постоянная, ρ — плотность гравитационных масс.

Элемент аномального поля может быть выражен через высшие производные гравитационного потенциала $V_e(\xi)$, $\xi \notin \bar{D}$.

При разложении $V_e(\xi)$, $\xi \notin \bar{D}$, в ряд по степеням r^{-n} , $n \geq 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ получим внутренние моменты области, занятой источниками.

Пусть дана некоторая область в C^n с гладкой границей. Эта область может представлять собой некоторую деформацию канонической области в C^n (единичного круга или поликруга). Тогда деформацию можно представить как динамическую систему, зависящую от $2n$ независимых переменных — обобщенных координат и импульсов z_n, \bar{z}_n :

$$\dot{z}_i = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_i}, \quad \dot{\bar{z}}_i = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где H — гамильтониан системы

$$H = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i z_i - L(z, \bar{z}),$$

$L(z, \bar{z})$ — функция Лагранжа.

Пусть $\iota(t) = \{z_1(t_1, t_2, K, t_n), z_2(t_1, t_2, K, t_n), K, z_n(t_1, t_2, K, t_n)\}$ — функция, голоморфно отображающая каноническую область на искомую область D .

Рассмотрим, не ограничивая общности, двумерный случай $n = 2$. Тогда под решением обратной задачи потенциала будем понимать область D_4 и функцию $\iota(t)$, конформно отображающую единичный поликруг (в нашем случае — бикруг) $\left\{ t_1, t_2 \in C^2 : |t_1| < 1, |t_2| < 1 \right\}$ на область D_4 .

Введем производящую функцию канонического преобразования: $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2 \rightarrow \log w_1, \log w_2, t_1, t_2$. При канонических преобразованиях, как известно, уравнения Гамильтона также выполняются, если рассматривать изменение некоторых величин как динамическую систему:

$$\Psi(z_1, z_2, t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{km} z_1^k z_2^m + \frac{t_1}{z_1} + \frac{t_2}{z_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{-k-m} z_1^{-k} z_2^{-m}.$$

Дифференциал производящей функции записывается в виде

$$d\Psi = \bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2 + \log w_1 dt_1 + \log w_2 dt_2.$$

При симплектоморфизме $dp_i \wedge dx_i = dP_i \wedge dX_i$, где $p_i, x_i; P_i, X_i$ — соответственно "старые" и "новые" импульсы и координаты. Отсюда следует

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_i} = \bar{z}_i, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t_i} = \log w_i, \quad i = 1, 2.$$

Пусть сначала область D_4 представляет собой произведение двух плоских областей:

$$D_4 = D_1 \times D_2,$$

$$D_i = \{z_i : \bar{z}_i = S_i(z_i)\}, \quad i = 1, 2,$$

где $S_i(z_i)$ — аналитические функции аргумента в некоторой окрестности границы соответствующего единичного круга $E_i = \{|z_i| < 1\}$, $i = 1, 2$. Тогда для функции Ψ получим выражения

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k^{(1)} z_1^k + a_k^{(2)} z_2^k \right) + t_2 \log z_2 + \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} \left(b_m^{(1)} z_1^{-m+1} + b_m^{(2)} z_2^{-m+1} \right) + t_1 \log z_1 - \\ &- \frac{1}{2} v_{01}(t_1) - \frac{1}{2} v_{02}(t_2), \end{aligned}$$

где функции $v_{0i}(t_i)$ удовлетворяют уравнениям

$$2 \log r_{ii} = \partial v_{0i}(t_i) / \partial t_i, \quad i = 1, 2.$$

Последнее соотношение следует из представления функций $z_1(w_1, w_2)$ и $z_2(w_1, w_2)$:

$$\begin{aligned} z_1(w_1, w_2) &= r_{11} w_1 + r_{12} w_2 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^{(1)} w_1^{-k} w_2^{-l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2(w_1, w_2) &= r_{21} w_1 + r_{22} w_2 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^{(2)} w_1^{-k} w_2^{-l}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные в работе [Wiegman, Zabrodin, 2000] для случая C , переносятся практически без изменений, и на случай произведения двух плоских областей.

Рассмотрим зависимость конформного отображения внешности бикруга во внешность четырехмерной области в более общем случае, когда D_4 не является произведением двух плоских областей, но представляет собой аналог базового цилиндра в трехмерном пространстве:

$$z_1(w_1, w_2) = w_1 + w_2 + \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}(w_2) w_1^{-k}. \quad (5)$$

Здесь

$$v_{1k}(w_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{1k} w_2^{-m}, \quad (6)$$

$$S_1(z_1, z_2) = \bar{z}_1, \quad (7)$$

$$S_1(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{1k}(z_2) k z_1^k + \frac{t_{01}(z_2)}{z_1} + \sum_{k=1}^{\infty} g_{1k}(z_2) z_1^{-k-1}. \quad (8)$$

Функции $v_{1k}(w_2)$, $t_{1k}(z_2)$, $g_{1k}(z_2)$, $t_{01}(z_2)$ будем считать аналитическими своих аргументов (точнее, голоморфными, чтобы исключить случай многозначных аналитических функций).

Функция $S_1(z_1, z_2) = \bar{z}_1$ описывает границу сечения базового цилиндра в зависимости от "текущей" комплексной z_1 и "параметра" z_2 . Эта функция является аналогом функции Шварца для двумерной области. Физический смысл производящей в двумерном случае достаточно прост: коэффициенты разложения этой функции в ряд Лорана являются коэффициентами фундаментального решения уравнения Лапласа на плоскости. При этом рассматриваем логарифмический потенциал вне области, создаваемый, например, непрерывно распределенным зарядом внутри области, и наоборот: если задано непрерывное распределение зарядов вне плоской области, то изучаем потенциал, создаваемый внутри.

Таким образом, и для $S(z)$ (функции Шварца, являющейся коэффициентом дифференциальной формы в определении производящей функции) можно записать

$$S(z) = S^+(z) + S^-(z),$$

т. е. функция Шварца представляется в виде

суммы двух функций, первая из которых соответствует внешнему потенциалу, а вторая — внутреннему.

Поведение конформных отображений в C^2 отличается существенным образом от такового в C . Биголоморфные отображения могут не быть конформными. Поэтому ограничимся случаем, когда искомую область можно представить в виде некоторой фигуры, аналогичной базовому цилиндру [Степанова, 1997]:

$$D_4 = D_{z_1} \times \left[z_2^{(1)}, z_2^{(2)} \right] \text{ в } C^2.$$

Здесь D_{z_1} — область в C по переменной z_1 . Трехмерный объект можно представить так:

$$D_4 = D_{z_1} \times \left[x_2^{(1)}, x_2^{(2)} \right] \text{ в } C^2,$$

где $\left[x_2^{(1)}, x_2^{(2)} \right]$ — отрезок действительной переменной x_2 ($z_2 = x_2 + iy_2$, $y_2 = 0$).

Тогда нашей задачей будет определение формы сечений базовых цилиндров при различных $z_2 = \text{const}$. Представим неизвестные функции $t_{1k}(z_2)$ в виде ряда Тейлора, а $v_{1k}(w_2)$, $g_{1k}(z_2)$, $t_{01}(z_2)$ — в виде рядов Лорана от соответствующих переменных. При этом $z_2 = \text{const}$ "нумерует" базовые цилиндры. Получим зависимость сечений базовых цилиндров от второй комплексной координаты в виде аналитической функции. Переменная t_1 играет роль времени. Она представляет собой нулевой "двумерный" момент сечения.

Алгоритм нахождения неизвестных функций. Функции, описывающие конформные отображения внешности бикруга на внешность области источников, в общем случае имеют вид

$$z_1(w_1, w_2) = r_{11} w_1 + r_{12} w_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^{(1)} w_1^{-k} w_2^{-l},$$

$$z_2(w_1, w_2) = r_{21} w_1 + r_{22} w_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^{(2)} w_1^{-k} w_2^{-l}, \quad (9)$$

где w_1, w_2 и z_1, z_2 — комплексные переменные в поликруге (в нашем случае — бикруге)

и в искомой области соответственно. Из формулы (9) видно, что бесконечные точки при таком отображении переходят в бесконечные.

Отображения (9) не могут быть произвольными. В двумерном случае функция $S(z)$ удовлетворяет так называемому условию унитарности: $z = \bar{S}(\bar{z})$. В четырехмерном случае введем аналог условия унитарности:

$$\bar{S}_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = z_1. \quad (10)$$

Можно показать [Wiegman, Zabrodin, 2000], что функции $z_1(w_1, w_2)$ и $z_2(w_1, w_2)$ как функции еще и временных переменных t_1 и t_2 удовлетворяют так называемому уравнению струны, которое можно сравнить с коммутаторами для операторов обобщенных импульсов и координат в случае динамических систем:

$$\begin{aligned} & w_1 \left\{ \frac{\partial z_1}{\partial w_1} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial t_1} - \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial w_1} \frac{\partial z_1}{\partial t_1} \right\} + \\ & + w_2 \left\{ \frac{\partial z_1}{\partial w_2} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial w_2} \frac{\partial z_1}{\partial t_2} \right\} + \\ & + w_1 \left\{ \frac{\partial z_2}{\partial w_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial w_1} \frac{\partial z_2}{\partial t_1} \right\} + \\ & + w_2 \left\{ \frac{\partial z_2}{\partial w_2} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial t_2} - \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial w_2} \frac{\partial z_2}{\partial t_2} \right\} = 1. \quad (11) \end{aligned}$$

Если источник — базовый цилиндр, то можно представить границу сечения базового цилиндра следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1(z_1, z_2, t_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1}^{(1)}(t_1, z_2) z_2^k + \\ &+ \frac{a_{01}^{(1)}(t_1, z_2)}{z_1} + \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l^{(1)}(t_1, z_2) z_1^{-l-1}. \quad (12) \end{aligned}$$

Видно, что переменная z_2 параметризует базовые цилиндры, а переменная t_1 играет роль времени. В двумерном случае это — нулевой момент области. Коэффициенты при различных степенях z_1 — это моменты двумерной области (внешние и внутренние). Внешние моменты — это коэффициенты при положительных степенях z_1 и внутренние при от-

рицательных. Коэффициенты в формуле (12) определяются после подстановки в выражение (10) зависимостей z_1 вида (5). Заметим, что функция, комплексно сопряженная z_1 , в соответствии с принципом симметрии Шварца будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1(\bar{w}_1, \bar{w}_2) &= r_{11} \bar{w}_1 + r_{12} \bar{w}_2 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{a}_{kl}^{(1)} \bar{w}_1^{-k} \bar{w}_2^{-l}, \\ \bar{z}_2(\bar{w}_1, \bar{w}_2) &= r_{21} \bar{w}_1 + r_{22} \bar{w}_2 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{a}_{kl}^{(2)} \bar{w}_1^{-k} \bar{w}_2^{-l}, \\ \bar{w}_1 &= w_1^{-1}, \quad \bar{w}_2 = w_2^{-1}. \quad (13) \end{aligned}$$

Последние соотношения в формуле (13) имеют место на единичной окружности и в силу аналитичности функции Шварца $S_1(z_1, z_2)$ в некоторой области, содержащей остов бикруга, в окрестности остова бикруга. Поэтому второе соотношение в формуле (13) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{z}_2(w_1^{-1}, w_2^{-1}) &= r_{21} w_1^{-1} + r_{22} w_2^{-1} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{a}_{kl}^{(2)} w_1^k w_2^l. \quad (14) \end{aligned}$$

В принципе, можно дискретизировать функцию $S_1(z_1, z_2, t_1)$, искать семейство $S_1^{(s)}(z_1, t_1)$, $s = 1, \dots, S$, где S — число базовых цилиндров.

Таким образом, необходимо подставить в указанные выражения значения $z_2 = z_2^{(s)}$, $s = 1, \dots, S$.

Уравнения (9), (13) и "уравнение струны" (10) устанавливают зависимость между гармоническими моментами t_k внешности базового цилиндра, гармоническими моментами внутренности базового цилиндра v_k и коэффициентами u_j конформного отображения.

После того, как коэффициенты разложения неизвестных функций будут найдены, можно уточнить их значения с помощью решения следующей системы уравнений:

$$Ax = f_{\delta} = f + \delta f, \quad (15)$$

в которой f_{δ} является вектором входных дан-

ных задачи (т. е. элементом аномального потенциального поля), а A — $M \times N$ матрица, которая получается, если область источников описывать с помощью полученных конформных отображений, с элементами a_{ij} , $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$; x — N -вектор, который требуется определить (в нашем случае — это вектор коэффициентов конформного отображения); f — M -вектор, описывающий полезный сигнал, f_δ обозначает наблюдаемый элемент аномального гравитационного поля вместе с помехой, δf характеризует M -вектор помехи.

Таким образом, решаем *прямую задачу* нахождения элемента аномального потенциального поля, когда источник этого поля описывается с помощью найденного на предыдущем этапе конформного отображения канонической области на область источника. Плотность масс источника считается известной (для простоты положим ее равной константе, но такой выбор не ограничивает общности).

Результаты математического эксперимента.

Описанная методика нахождения линейных трансформаций аномального гравитационного поля была опробована на ряде модельных примеров. В первом модельном примере "аномальная" плотность породы источников гравитационного поля полагалась равной $\rho = 1,5 \text{ г/см}^3 = 1500 \text{ кг/м}^3$. Во втором и последующих модельных примерах избыточная по сравнению с вмещающей породой плотность была $\rho = 1,0 \text{ г/см}^3 = 1000 \text{ кг/м}^3$, т. е. по сравнению с вмещающими слоями земной коры плотность была на заданное значение больше. Для одного из примеров приводятся параметры модельных тел и результаты определения формы оснований этих тел. Ос-

тальные примеры были аналогичны (отличия заключались в количестве призм, их взаимном расположении и глубине залегания). В приведенных в статье примерах нижняя кромка призматических тел находится на одной и той же глубине, равной 1,0 км. Это сделано для того, чтобы проанализировать зависимость точности определения решения обратной задачи от глубины залегания верхней кромки. В более сложных случаях можно рассматривать тела, расположенные произвольным образом в пространстве.

В компьютерных технологиях при вычислении гравитационных полей, создаваемых заданной конфигурацией тел, полагалось произведение $\gamma r = f$, где через f обозначался входной параметр задачи, а затем полученные значения умножали на соответствующее этому произведению в системе СИ число. Учитывалось также при построении карт элементов аномальных полей и их трансформаций, что $1 \text{ мГал} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$. Необходимо отметить, что решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) представляет собой весьма сложную задачу. СЛАУ решались с помощью методов решения систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью и симметрической положительно полуопределенной матрицей, предложенных В. Н. Страховым [Страхов, 1999], а также с помощью усовершенствованного автором метода ортогональных преобразований [Stepanova, 2009].

Модельный участок № 1. Размер площади 120×120 км. Общее количество расчетных гравиметрических пунктов составляет 6000, сеть нерегулярная. Рельеф земной поверхности от-

Параметры призматических тел в модельном примере № 1

Номер модельного тела	Координаты центра тела, км		Горизонтальные размеры, км		Глубина залегания верхней и нижней кромок, км	
	X_c	Y_c	D_x	D_y	Z_1	Z_2
1	- 39,0	- 22,0	22,0	21,0	0,5	1,0
2	- 9,2	- 8,2	18,4	16,7	0,7	1,0
3	9,4	4,5	18,4	14,8	0,75	1,0
4	25,4	8,3	14,0	27,0	0,84	1,0
5	32,4	24,8	8,6	13,	0,86	1,0
6	36,8	32,	6,	35,	0,88	1,0
7	39,8	35,	6,	6,	0,9	1,0

носителем спокойный, перепад высот составляет около 100 м. Для данной сети было рассчитано модельное гравитационное поле, обусловленное семью прямоугольными призмами. Параметры призм приведены в таблице. С помощью описанного алгоритма найдена форма сечения и высота каждой из призм. С целью приближения к реальным геофизическим данным внесена погрешность в гравитационное поле, создаваемое призмами на уровне $\| \Delta x - f_{\delta} \|_E^2 / \| f_{\delta} \|_E^2 = 1 \cdot 10^{-5}$ и $1 \cdot 10^{-3}$. Здесь через $f_{\delta} = f + \delta f$ обозначены значения элемента аномального гравитационного поля (вектор значений), $\| f \|_E^2 = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_N^2$, N — число точек, в которых задавалось гравитационное поле. На рис. 1 приводится приблизительная схема расположения призм. На рис. 2, 3 показаны гравитационные поля, создаваемые призмами в модельных примерах № 1 и № 2, на рис. 4 — сечение модельной призм

мы и сечения, полученные в результате решения цепочки уравнений Тоды. Сечения строились при $z = 0, 1, 0, 2$ и $0, 4$ км для первого тела (расположенного в левом нижнем углу приведенной на рис. 1 схемы расположения источников). При этом ось z у нас направлена вниз, т. е. первому значению z соответствует самое близкое к дневной поверхности сечение. Чем ближе сечение оказывалось к нижней кромке, тем хуже оно восстанавливалось (поле ослабевает по мере удаления от его источника). Погрешность в определении высоты призм составила максимум 10%: для самой низкой призмы 9,76; далее — 8,37; 7,4; 7,2. В целом можно отметить, что погрешность в определении параметров призматических тел зависит от интенсивности гравитационного поля, создаваемого ими, и от априорной информации. Чем точнее начальное приближение к форме изучаемого объекта, тем лучше получаемое решение обратной задачи аппроксимирует гравитаци-

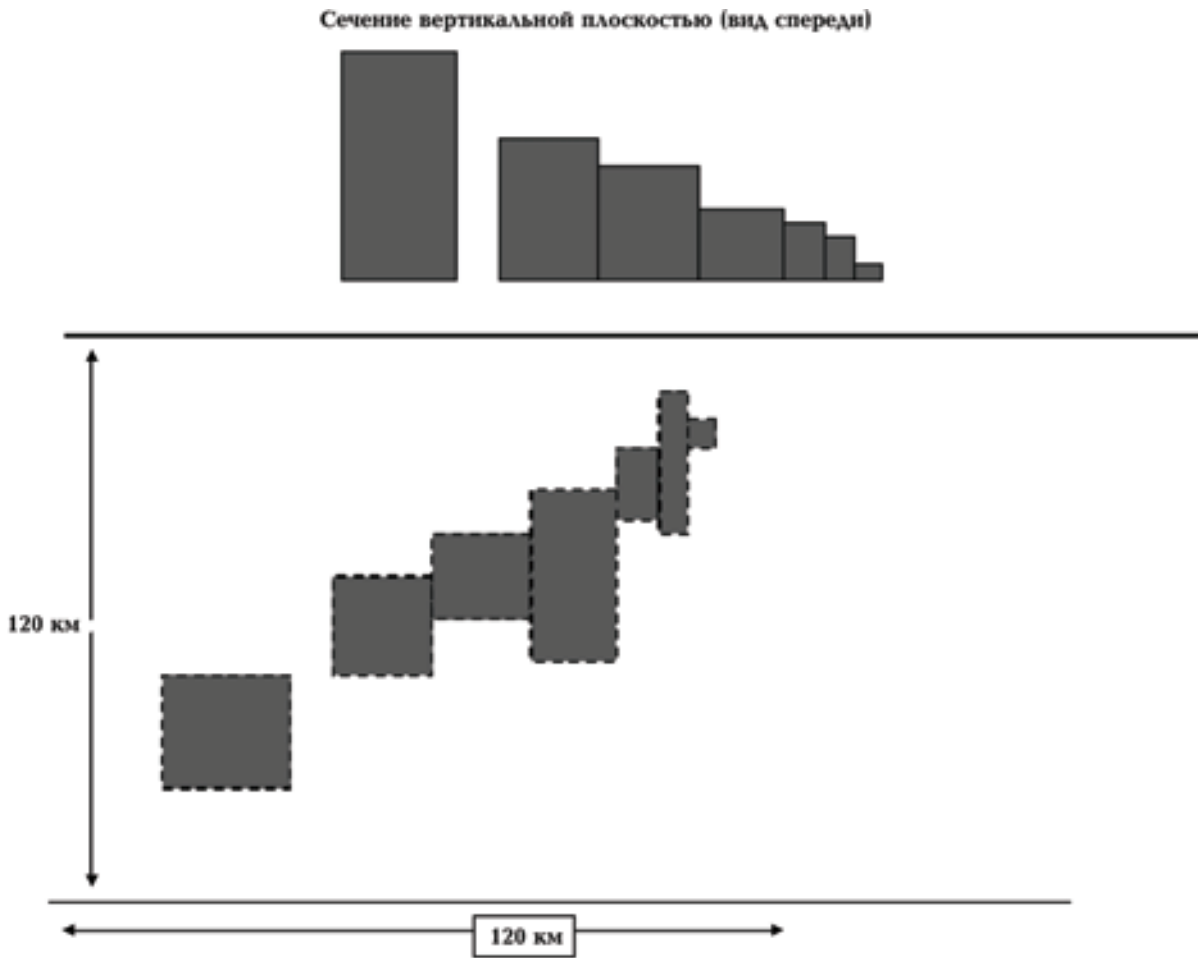


Рис. 1. Схема расположения прямоугольных призм в модельном примере № 1 (сверху вид спереди, снизу — вид сверху).

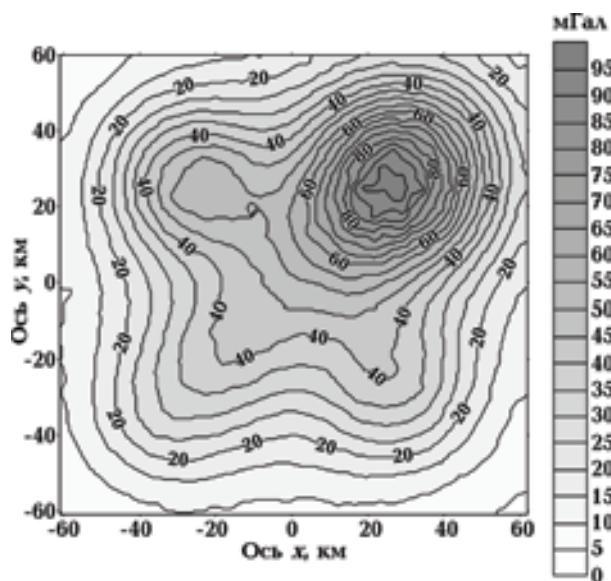


Рис. 2. Карта изолиний гравитационного поля, полученного в результате аппроксимации в модельном примере № 1; $N = 9676$.

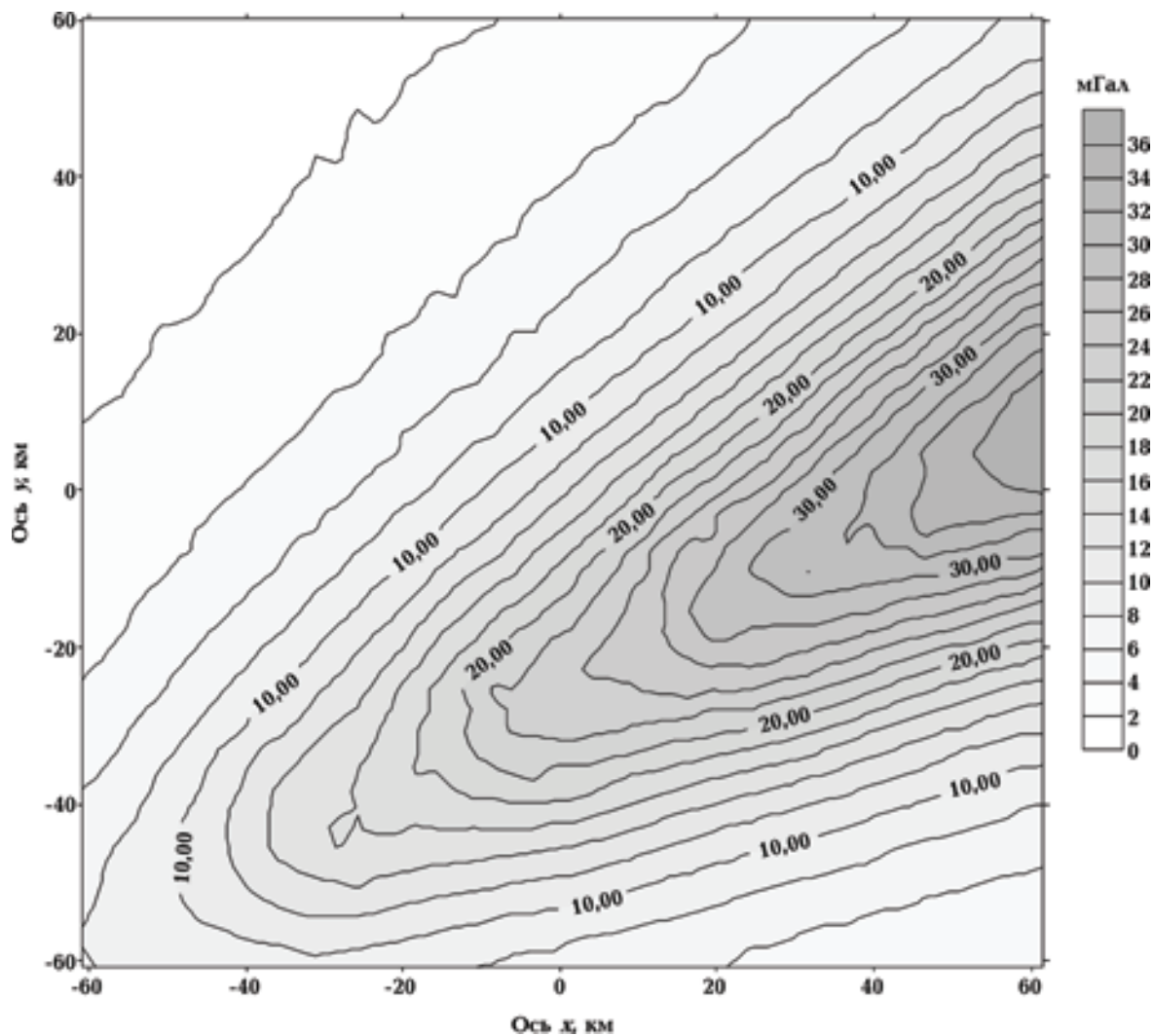


Рис. 3. Карта изолиний разности гравитационных полей: исходного и полученного в результате аппроксимации в модельном примере № 1; $N = 9676$.

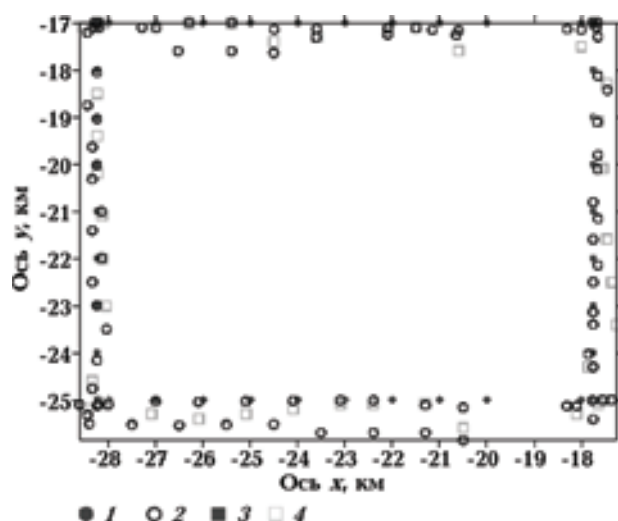


Рис. 4. Сечение базового цилиндра плоскостью $z = \text{const}$: 1 — исходное сечение первого призматического тела плоскостью $z = \text{const}$; 2 — сечение первого призматического тела плоскостью $z = 0,4$; 3 — сечение первого призматического тела плоскостью $z = 0,2$; 4 — сечение первого призматического тела плоскостью $z = 0,1$.

рующее тело. Максимальное число итераций в математическом эксперименте было равно 100. Поэтому время счета (т. е. полное время, которое потребовалось для определения высоты и формы четырех призматических тел параметрами, приведенными в таблице по соз-

Список литературы

Булах Е. Г. Об одном алгоритме решения обратной задачи гравиметрии по аномальному полю, осложненному фоновым влиянием. Докл. НАН Украины. 1999. № 2. С. 122—126.

Евграфов М. А. Аналитические функции. Москва: Наука, 1991. 448 с.

Зигаров Д. О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и его применении к вопросам геофизики. София: Изд. Болгар. АН, 1968. 253 с.

Зигаров Д. Обратна гравиметрична задача геопрочуването и геодезията. София: Изд. Болгар. АН, 1984. 278 с.

Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. Москва: Мир, 1985. 222 с.

Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наук. думка, 1978. 227 с.

даваемому ими гравитационному полю, составило 10 ч на компьютере Pentium-IV с частотой 2 ГГц). Количество коэффициентов (параметров неизвестных функций) полагалось равным от 40 до 80 для каждой из функций, описывающих конформное отображение единичного круга на искомую область (т. е. на каждое из сечений призматических тел плоскостями $z = \text{const}$).

Задача решалась с точностью 5—10%. Математический эксперимент показал, что более точно определяется форма тела, если поле создается одним или двумя призмами, отделенными друг от друга на расстояние в пределах от двух до четырех максимальных горизонтальных размеров сечения. В связи с этим можно порекомендовать сначала разделять аномальные потенциальные поля (что можно осуществить с помощью метода линейных интегральных представлений), а затем решать нелинейные обратные задачи.

Заключение. В статье приводится новый метод решения обратной нелинейной задачи гравимангниторазведки, основанный на решении уравнений бездисперсионной цепочки Тоды. Описанная методика может применяться при интерпретации различных геофизических данных в целях уточнения границ аномалиеобразующих масс, полученных другими способами.

Старостенко В. И., Дядюра В. А., Заворотько А. Н. Об интерпретации гравитационного поля методом подбора. Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1975. № 4. С. 78—85.

Степанова И. Э. Бездисперсионные цепочки Тоды при решении обратных задач гравимангниторазведки. Вопросы геологической интерпретации геофизических полей: Материалы 38-й сессии Международ. семинара им. Д. Г. Успенского. Пермь, 24—28 января 2011 г. С. 270—271.

Степанова И. Э. Об интегральном уравнении обратной трехмерной задачи потенциала. Математическое моделирование. 1997. Т. 9. № 4. С. 77—84.

Степанова И. Э. О восстановлении источника гравитационных масс в задачах типа рудных. Физика Земли. 1998. № 11. С. 86—89.

Степанова И. Э. О применении методов тео-

- рии динамических систем к решению нелинейных обратных задач геофизики. *Физика Земли*. 2013. № 2. С. 1—10.
- Степанова И. Э. Применение бездисперсионных цепочек Toda при решении обратных задач геофизики и геодезии. Вопросы геологической интерпретации геофизических полей: *Материалы 39-й сессии Международ. семинара им. Д. Г. Успенского*. Воронеж, 30 января — 2 февраля 2012 г. С. 259—260.
- Страхов В. Н. Геофизика и математика. Москва: ОИФЗ РАН, 1999. 64 с.
- Страхов В. Н., Бродский М. А. К проблеме единственности в плоских обратных задачах гравиметрии и магнитометрии. *Докл. АН СССР*. 1983. Т. 273. № 5. С. 1097—1101.
- Страхов В. Н., Бродский М. А. О единственности решения плоской обратной задачи потенциала для многоугольников. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1984. С. 128—142.
- Цирульский А. В., Никонова Ф. И., Фегорова Н. В. Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением эквивалентных семейств решений. Свердловск: Изд. Ин-та геофизики АН СССР, 1980. 135 с.
- Цирульский А. В., Пруткин И. Л. О решении обратной задачи гравиметрии для произвольных классов двумерных и трехмерных потенциалов. *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*. 1981. № 11. С. 45—63.
- Stepanova I. E., 2009. On the S -approximation of the Earth's gravity field. *Regional version, Inverse Problems in Science and Engineering* 17 (Issue 8), 1095—1111.
- Zabrodin A., 1999. Random matrices and Laplacian growth. arXiv: 0907.4929.
- Wiegmann P. B., Zabrodin A., 2000. Conformal maps and integrable hierarchies. *Comm. Math. Phys.* 213, 523—538.

On solving reverse problems of geophysics applying the methods of the theory of dynamic systems

© I. E. Stepanova, D. N. Rayevsky, 2014

Methods of solving the reverse problems of geophysics on discovery of the forms of anomaly-forming bodies by the study of solving nonlinear differential equation, which is transformed into infinite chain of linear differential equations — the so-called chain of Toda hierarchies. Infinite system of linear differential equations is in its turn closely tied with geometric parameters of the area sought for — its moments. Moments of the area in three-dimensional space determine reflection of some canonical area upon some unknown source of anomalous field, which can be found by minimization of some regularizing functional. Examples of solving reverse problems of ore type — when the source of gravity field is limited in space and has a stellar property in relation to some of its interior point are presented.

Key words: regularization, dynamic system, Toda chains, conform reflection, moments of the area.

References

- Bulah E. G., 1999. An algorithm for solving the inverse problem of the anomalous gravity field, complicated by the influence of the background. *Doklady NAN Ukrainy* (2), 122—126 (in Russian).
- Evgrafov M. A., 1991. Analytic functions. Moscow: Nauka, 448 p. (in Russian).
- Zidarov D., 1968. On the solution of some inverse problems of potential field and its application to issues of Geophysics. Sofia: Bulgarian AS Publ., 253 p. (in Bulgarian).
- Zidarov D., 1984. Obratna gravimetrichna zadacha v geoprouchvaneto i geodezijata. Sofia: Bulgarian AS Publ., 278 p. (in Bulgarian).
- Makdonal'd I., 1985. Symmetric functions and Hall

- polynomials. Moscow: Mir, 222 p. (in Russian).
- Starostenko V.I.*, 1978. Stability of numerical methods in gravimetry. Kiev: Naukova Dumka, 227 p. (in Russian).
- Starostenko V.I., Djadjura V.A., Zavorot'ko A.N.*, 1975. On the interpretation of the gravitational field of the method of selection. *Izvestija AN SSSR. Ser. Fizika Zemli* (4), 78—85 (in Russian).
- Stepanova I.E.*, 2011. Dispersionless Toda chain in solving inverse problems of gravity and magnetic data. On geological interpretation of geophysical fields: Proceedings of the 38th session of the Intern. seminar on D.G. Uspensky. Perm, January 24—28, 2011, 270—271 (in Russian).
- Stepanova I.E.*, 1997. An integral equation of the three-dimensional inverse problem of potential. *Matematicheskoe modelirovanie* 9 (4), 77—84 (in Russian).
- Stepanova I.E.*, 1998. On the reconstruction of the source of gravitational masses in the problems of the type of ore. *Fizika Zemli* (11), 86—89 (in Russian).
- Stepanova I.E.*, 2013. Applications of the theory of dynamical systems to the solution of nonlinear inverse problems of geophysics. *Fizika Zemli* (2), 1—10 (in Russian).
- Stepanova I.E.*, 2012. Application dispersionless Toda in solving inverse problems of geophysics and geodesy. On geological interpretation of geophysical fields: *Proceedings of the 39th session of the Intern. seminar on D.G. Uspensky*. Voronezh, January 30 — February 2, 2012, 259—260 (in Russian).
- Strakhov V.N.*, 1999. Geophysics and mathematics. Moscow: JIPE RAS Publ., 64 p. (in Russian).
- Strakhov V.N., Brodskij M.A.*, 1983. Uniqueness problem in flat inverse problems of gravimetry and magnetometry. *Doklady AN SSSR* 273 (5), 1097—1101 (in Russian).
- Strakhov V.N., Brodskij M.A.*, 1984. On the uniqueness of the inverse problem of potential flat for polygons. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Novosibirsk: Nauka, 128—142 (in Russian).
- Cirul'skij A.V., Nikonova F.I., Fedorova N.V.*, 1980. Method of interpretation of gravity and magnetic anomalies with the construction of families of equivalent solutions. Sverdlovsk: Institute of Geophysics of the USSR Academy Publ., 135 p. (in Russian).
- Cirul'skij A.V., Prutkin I.L.*, 1981. Solution of the inverse gravity problem for arbitrary classes and three-dimensional potentials. *Izvestija AN SSSR. Ser. Fizika Zemli* (11), 45—63 (in Russian).
- Stepanova I.E.*, 2009. On the S -approximation of the Earth's gravity field. *Regional version, Inverse Problems in Science and Engineering* 17 (Issue 8), 1095—1111.
- Zabrodin A.*, 1999. Random matrices and Laplacian growth. arXiv: 0907.4929.
- Wiegmann P.B., Zabrodin A.*, 2000. Conformal maps and integrable hierarchies. *Comm. Math. Phys.* 213, 523—538.