

## Парето-оптимальные решения обратной задачи гравиметрии с неопределенной априорной информацией

© Т. Н. Кишман-Лаванова, 2015

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 27 июня 2015 г.

Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко

Розглянуто теоретичні аспекти розв'язування оберненої нелінійної задачі гравіметрії в умовах невизначеності априорної інформації. Априорну інформацію описано за допомогою нечітких множин. Одноцільову геофізичну задачу з невизначеною априорною інформацією трансформовано в багатокритеріальну задачу оптимізації. Одним із критеріїв є функція належності нечіткої множини можливих розв'язків. Розв'язком задачі є множина Парето-оптимальних розв'язків, яку конструйовано в параметричному просторі за допомогою триетапного алгоритму пошуку. Перевагою запропонованого методу є те, що він забезпечує можливість включення широкого інтервалу неймовірнісної априорної інформації до процедури інверсії та може бути застосований для розв'язування сильно нелінійних задач. Це дає змогу зменшити кількість прямих обчислень задачі вибіркоким моделюванням пробних точок у параметричному просторі. Наведено тестовий приклад роботи алгоритму в застосуванні до оберненої задачі гравіметрії для однієї контактної поверхні.

**Ключові слова:** обернена задача гравіметрії, невизначена априорна інформація, Парето-оптимальний розв'язок.

“Ученые на сотни различных ладов выражали свое изумление по поводу того, что при правильной постановке вопроса им удается разгадать любую головоломку, которую задает природа”

*И. Пригожин, И. Стенгерс*

**Введение.** Состоятельность метода решения обратной задачи определяется его способностью использовать как детерминистские, так и статистические подходы для получения новых данных на основании имеющейся информации. Поскольку часто исходные данные и априорная информация в задаче характеризуются неопределенностью как вероятностной, так и невероятностной природы, то разработка метода, реализующего преимущества каждого подхода, будет актуальным и полезным дополнением в теории интерпретации потенциальных полей.

В геофизических обратных задачах имеют дело с двумя типами неопределенности. Неопределенность наблюдаемых данных — вероятностная, это результат случайных ошибок наблюдения. Неопределенность априорной ин-

формации о параметрах модели часто имеет невероятностную природу, т. е. связана с несовершенными знаниями об исследуемом объекте. Она должна быть описана формально с использованием невероятностной меры неопределенности.

Опыт успешного применения невероятностных методов описания неопределенности достаточно известен для инверсии сейсмических данных [Stoffa, Sen, 1991; Sambridge, Drijkoningen, 1992; Sambridge, 1999; Kozlovskaya, 2000; Tarantola, 2005]. Для задач гравиметрии в рамках концепции совмещения детерминистских и вероятностных методов известна работа [Балк и др., 2011], где решается линейная обратная задача гравиметрии и магнитометрии.

В представленной статье остановимся на кратком анализе невероятностных мер неопреде-

ленности. Также покажем, как неопределенность априорной информации описывается посредством нечетких множеств и как вероятностные методы, манипулирующие неопределенной информацией, могут быть адаптированы для решения обратной нелинейной задачи гравиметрии. При этом она формулируется как многокритериальная задача оптимизации, одним из критериев которой выступает априорная информация, а решением является множество интерпретационных моделей, которые с заданной точностью удовлетворяют априорным данным.

Необходимо отметить, что идея о представлении результатов решения обратной задачи в виде множества допустимых решений развивалась в рамках методов Монте-Карло, а также была реализована в концепции гарантированного подхода [Балк, 2004; Балк, Долгалъ, 2012] как новая форма представления результатов количественной интерпретации данных гравиразведки. Также во многих геофизических задачах остается критическим фактором время, необходимое для вычислений прямой задачи. Поэтому построение алгоритма оптимизации, который выполняет поиск в параметрическом пространстве под контролем априорной информации и требует меньшее количество вычислений прямой задачи, чем традиционные методы глобальной оптимизации с выборочным моделированием параметрического пространства, становится актуальной задачей.

Рассмотрим теоретические аспекты решения обратной нелинейной задачи гравиметрии в условиях неопределенности априорной информации — сформулируем постановку задачи, преобразуем одноцелевую геофизическую задачу с неопределенной априорной информацией в многоцелевую задачу оптимизации, приведем алгоритм, используемый для нахождения множеств Парето-оптимальных решений.

**Описание неопределенной априорной информации.** Вероятностные меры описания неопределенностей были значительно развиты в 1970-х годах. В частности, некоторые теории, которые обобщают или дополняют теорию вероятностей, были введены на протяжении этого десятилетия. Все теории неопределенности подобны классической теории вероятности в том смысле, что они описывают некоторый тип и используют интервал  $[0, 1]$  для ее измерения. Разница появляется главным образом в аксиоматическом определении этих мер. Концепция нечеткой меры, введенная М. Сугено [Sugeno, 1977], обеспечивает универсаль-

ные рамки, в которых могут быть сформулированы различные специальные классы неопределенных мер, включая классические вероятностные.

Теория возможности, основанная на определении меры возможности, известна как одна из главных вероятностных теорий неопределенности. Это связано с неопределенностью, вытекающей из неполных знаний, которые принимаются более возможными, чем вероятными. Фундаментальная разница между возможностью и вероятностью была сформулирована Л. А. Задех [Zadeh, 1978] как принцип согласованности возможности и вероятности. Согласно ему, событие должно быть прежде возможным, чем вероятным, т. е. высшая степень возможности не предполагает высшую степень вероятности, а низкая степень вероятности предполагает низкую степень возможности. Однако если событие невозможно, то оно также и невероятно. Более детальный формальный анализ вероятностей, возможностей, нечетких множеств и других мер неопределенности можно найти, например, в монографиях [Klir, Folger, 1988; Zimmermann, 2001].

Использование вероятностных мер для описания неопределенности может обеспечить удобный способ представления априорной информации в гравиметрической обратной задаче и построения эффективного компьютерного алгоритма инверсии геофизических данных. Поэтому целесообразно остановиться на теории возможностей, основанной на определении нечеткого множества в силу ее относительной вычислительной простоты по сравнению с теорией вероятности.

Теория нечетких множеств сейчас хорошо развитая область математики. Ее описание можно найти, например, в работах [Zadeh, 1978; Алтунин, Семухин, 2000; Zimmermann, 2001]. Приведем определение нечеткого множества.

Пусть  $U$  — так называемое универсальное множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач. Нечетким множеством  $A$  называется совокупность пар:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in U \},$$

где  $\mu_A$  — функция принадлежности, т. е.  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ . Функция принадлежности есть аналогом характеристической бинарной функции в обычных множествах.

Операции с нечеткими множествами определяются функцией принадлежности.

1. Функция принадлежности  $\mu_C(x)$  пере-

сечения нечетких множеств  $C = A \cap B$  равна

$$\mu_C(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad x \in U.$$

2. Функция принадлежности  $\mu_C(x)$  объединения нечетких множеств  $C = A \cup B$  равна

$$\mu_C(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad x \in U.$$

3. Функция принадлежности  $\mu_C(x)$  дополнения нечеткого множества  $A$  равна

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad x \in U.$$

Неопределенность информации о модельных параметрах невероятностной природы может быть описана посредством нечетких множеств. Преимущество такого подхода в том, что он обеспечивает возможность включения широкого диапазона невероятностной априорной информации в процедуру инверсии и может быть применен для решения нелинейных задач [Kozlovskaya, 2000].

**Постановка задачи.** Сформулируем постановку задачи, основанную на использовании нечетких множеств. В основе понятия нечеткого множества лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы с общим свойством могут обладать этим свойством в различной степени, а следовательно, принадлежать множеству с различной степенью.

Пусть под земной поверхностью имеем некоторую область  $D$ , массы которой характеризуются неоднородным распределением плотности. Геологический объект, принадлежащий этой области, параметризуется, т. е., описывается совокупностью параметров  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_k] \in M$ , где  $M$  — параметрическое пространство. Каждая модель  $\mathbf{m}$  рассматривается как точка в модельном пространстве  $M$ . Плотность вероятности априорного распределения моделей в этом пространстве обозначим  $p(\mathbf{m})$ .

В  $n$  точках земной поверхности наблюдаемое поле силы тяжести имеет значения  $\Delta g_n = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ . Априорная информация о геологическом объекте получена из некоторых экспериментальных наблюдений. Вероятностный подход к обратной задаче описывает априорную информацию о модели с помощью функции плотности вероятности  $p(\mathbf{m})$ . Задача заключается в поиске апостериори плотности вероятности  $p(\mathbf{d})$  распределения вектора  $\mathbf{m}$ , исходя из наблюдаемых данных, теоретической взаимосвязи между модельными параметрами и наблюдаемым полем, а также априорной информации [Tarantola, Valette, 1982]:

$$p(\mathbf{d}) = k p(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}),$$

где  $k$  — соответствующая нормализующая константа,  $p(\mathbf{m})$  — плотность вероятности априорного модельного распределения,  $L(\mathbf{m})$  — функционал, который сравнивает соответствие между наблюдаемыми и теоретическими данными.

На практике в большинстве геофизических экспериментов считается, что обе — априорная, и апостериорная плотности распределения являются гауссовыми:

$$p(\mathbf{m}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |C_M|^{1/2}} \times \quad (1)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{m} - \mathbf{m}_0]^T C_M^{-1} [\mathbf{m} - \mathbf{m}_0] \right\},$$

$$p(\mathbf{d}_{obs} / \mathbf{m}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |C_D|^{1/2}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}]^T C_D^{-1} [g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}] \right\},$$

где  $\mathbf{m}_0$  — априорная модель,  $C_M$  и  $C_D$  — ковариационные матрицы модели и наблюдаемых данных соответственно,  $|C_M|$  и  $|C_D|$  — соответствующие детерминанты. Ковариационная матрица модели  $C_M$  описывает неопределенности в априорных знаниях о модельных параметрах и корреляции между ними. Ковариационная матрица данных  $C_D$  описывает неопределенности теоретических и наблюдаемых данных. При таких допущениях максимизация (1) эквивалентна минимизации следующей целевой функции:

$$L(\mathbf{m}) = [g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}]^T C_D^{-1} [g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}] + (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)^T C_M^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0). \quad (2)$$

Минимизация (2) может быть выполнена эффективно в случае, когда  $g(\mathbf{m})$  линейная и матрицы  $C_M$  и  $C_D$  диагональные. Оптимальное решение сильно зависит от значений диагональных элементов этих матриц. Если диагональные элементы  $C_D$  больше, чем элементы  $C_M$ , тогда полученное решение слабо зависит от априорной информации, в другом случае решение сходится к априорной модели  $\mathbf{m}_0$ .

Поскольку модельное пространство обычно многомерное, то и соответствующее апри-

орное распределение, как правило, достаточно сложно. Если известно явное выражение плотности вероятности  $p(\mathbf{m})$ , то оно может быть использовано в аналитическом решении, хотя это не всегда необходимо. Например, при использовании методов Монте-Карло достаточно только иметь набор вероятностных правил, которые позволяют генерировать образцы моделей, распределенные согласно функции плотности вероятности  $p(\mathbf{m})$  в модельном пространстве [Mosegaard, Tarantola, 1995].

Если статистические оценки априорной информации невозможны, тогда невероятностная априорная информация может быть описана способом более эффективным, чем с помощью функции плотности распределения PDF, а именно посредством нечетких множеств. Важное преимущество в том, что основные операции нечетких множеств обеспечивают достаточно удобное комбинирование различных четких и нечетких ограничений на модельные параметры. Однако необходимо помнить, что функция принадлежности не может быть использована вместо априори PDF в классической формулировке обратной задачи, так как они не только выражают два разных типа неопределенной информации, но также соответствуют разным мерам неопределенности, которые должны удовлетворять разным аксиомам. Чтобы комбинировать разные типы неопределенности в одной схеме инверсии, необходимо изменить формулировку обратной задачи.

**Преобразование традиционной одноцелевой геофизической обратной задачи в многоцелевую задачу оптимизации.** Пусть  $X$  — нечеткое множество возможных решений, определенное в параметрическом пространстве с функцией принадлежности  $\mu_M(\mathbf{m})$ , и пусть  $p(\mathbf{d}_{obs} | \mathbf{m})$  — условная функция плотности вероятности экспериментальных данных (т. е. вероятность получения определенных экспериментальных данных для значений модельных параметров). Тогда решение обратной задачи должно:

- максимизировать функцию принадлежности нечеткого множества возможных решений  $\mu_M(\mathbf{m})$ ;
  - максимизировать плотность условной вероятности PDF наблюдаемых данных  $p(\mathbf{d}_{obs} | \mathbf{m})$ .
- Такая оптимизационная задача — это задача многоцелевой оптимизации с двумя целевыми функциями, т. е.

$$\mathbf{F}(\mathbf{m}) = (F_1(\mathbf{m}), F_2(\mathbf{m})), \quad (3)$$

где  $F_1(\mathbf{m}) = p(\mathbf{d}_{obs} | \mathbf{m})$ ,  $F_2(\mathbf{m}) = \mu_M(\mathbf{m})$ .

Важно отметить, что в случае одноцелевой оптимизационной задачи качество решения оценивается функцией невязки для каждого решения в параметрическом пространстве. В случае многоцелевой задачи каждое решение имеет  $L \geq 2$  оценочных значений, одно для каждой целевой функции. Вектор целевой функции отображает параметрическое пространство  $R^k$  в целевое пространство  $R^L$ . Решения с многоцелевыми значениями позволяет сравнить концепция недоминирования.

Для задачи с более чем одной целевой функцией (т. е.  $f_j, j = 1, \dots, L$  и  $L > 1$ ) два произвольных решения  $x$  и  $y$  могут находиться в следующих отношениях — одно доминирует другое или ни одно из решений не доминирует другое.

- Решение  $x$  доминирует решение  $y$ , если
- $x$  не меньше, чем  $y$  по всем компонентам, т. е.  $f_j(x) \geq f_j(y)$  для всех  $j = 1, 2, \dots, L$ ,
- $x$  строго больше  $y$ , по крайней мере для одной компоненты, т. е.  $f_j(x) > f_j(y)$  по крайней мере для одного  $j = 1, 3, \dots, L$ .

Решение есть Парето-оптимальным, если оно не доминируется в целевом пространстве ни одним другим решением, т. е.  $x^* \in R^k$  есть Парето-оптимальным или недоминантным решением многоцелевой обратной задачи с вектором целевой функции  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_L(x))$  тогда и только тогда, если не существует вектор  $x \in R^k$  такой, что

$$f_i(x^*) \leq f_i(x) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, L\} \text{ и}$$

$$f_j(x^*) < f_j(x) \text{ по крайней мере для одного}$$

$$j \in \{1, 3, \dots, L\}.$$

Парето-множество обеспечивает компромисс между критериями для недоминантного решения: один критерий улучшается, другой ухудшается. Если критериев три, то Парето-множество может быть представлено в виде трехмерной поверхности в координатах критериев, которая показывает имеющийся компромисс между рассматриваемыми критериями.

Парето-множество — это множество не улучшаемых (по критериям) параметров.

Д. Гольдберг [Goldberg et al., 1992] предложил эту концепцию распространить на случай поиска недоминантного множества на множестве решений. Рассмотрим ряд решений  $N$ , которые имеют  $L (> 1)$  значений целевых функций. Для поиска недоминантного множества решений может быть использована следующая процедура.

Шаг 1.  $i = 1$ .

Шаг 2. Для всех  $j \neq i$  сравнить решения  $x_i$  и  $x_j$ , используя приведенное определение доминантности для всех  $M$  компонентов.

Шаг 3. Если для любого  $j$ ,  $x^{(i)}$  доминируется  $x^{(j)}$ , отмечаем  $x^{(i)}$  как "доминируемое".

Шаг 4. Если все решения в множестве сравнены, т. е.  $i = N$ , переходим к шагу 5, иначе увеличиваем  $i$  на единицу и переходим к шагу 1.

Шаг 5. Все решения, которые не отмечены как "доминируемые", есть недоминантные решения.

Качество решения оценивается двумя значениями: условной PDF наблюдаемых данных, которая показывает, на сколько решение удовлетворяет наблюдаемым данным, и функцией принадлежности нечеткого множества возможных решений, которая показывает, на сколько модель удовлетворяет априорной информации. Эти значения могут "конфликтовать" друг с другом, поэтому члены Парето-множества — компромиссные решения: невозможно уменьшить одну целевую функцию без увеличения другой.

**Алгоритм глобальной оптимизации с использованием определения Парето-множества.** Для эффективного поиска в многомерном параметрическом пространстве используем подход, предложенный М. Самбриджем [Sambridge, 1999] в его алгоритме окрестностей, т. е. аппроксимацию параметрического пространства диаграммами Вороного.

М. Самбридж показал, как диаграммы Вороного могут быть использованы в алгоритмах глобальной оптимизации для уменьшения количества вычислений прямой задачи и для увеличения разрешающей способности области исследования. Вычисление прямой задачи заменяется поиском ближайшего элемента диаграммы Вороного. В алгоритме, предлагаемом в статье, используется деление Вороного для определения области поиска Парето-оптимальных точек. Поиск выполняется способом, подобным описанному в работе [Sambridge, 1999], т. е. шаг поиска определяется размером и границами ячейки Вороного вокруг возмущенной точки.

В работе [Kozlovskaya, 2000] предложен алгоритм глобальной оптимизации, который реализуется в три этапа.

Первый этап — моделирование начальной популяции из нечеткого множества возможных решений. Вычисления прямой задачи не требуются, а моделирование может быть выполнено так:

1) создать популяцию  $K$  пробных точек из множества возможных решений;

2) оценить функцию принадлежности для каждой точки. Точки с  $\mu_M > \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon < 1$ , включить в конечную популяцию точек, другие отбросить;

3) случайным способом возмутить все принятые точки и вычислить  $\mu_M$  для каждой новой точки. Включить в конечную популяцию точки с  $\mu_M > \varepsilon$ .

Процедура повторяется до достижения необходимого количества пробных точек. Они формируют начальную популяцию  $M = \{m^1, m^2, \dots, m^N\}$  в параметрическом пространстве, которое аппроксимирует предыдущее множество ячейками Вороного  $\{v(m^1), v(m^2), \dots, v(m^N)\}$ .

Значение  $\varepsilon$  выбирается в соответствии с нашими представлениями об априорной информации: если оно принимается равным 1, значит есть основания полностью доверять априорным данным. Если априорная информация недостоверная и необходимо исследовать области с меньшей вероятностью, указывается меньшее значение  $\varepsilon$ .

Второй этап — вычисление начального Парето-оптимального множества, которое требует оценки функции невязки и решения прямой задачи в каждой точке начальной популяции. Он может быть выполнен так:

4) вычислить значения функций невязки  $F_1(m)$  и  $F_2(m)$ , сформировать вектор целевой функции  $F = (F_1, F_2)$  в каждой точке начальной популяции;

5) выбрать Парето-оптимальное множество  $P$  точек из  $M$ .

Третья стадия — это возмущение точек из полученного Парето-оптимального множества:

6) создать новую пробную точку  $m^{N+1}$  в параметрическом пространстве случайным возмущением выбранной Парето-оптимальной точки  $m^p \in P$ ,  $p \in \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  внутри ячейки  $v(m^p)$ ;

7) вычислить  $\mu_M(m^{N+1})$ . Если  $\mu_M(m^{N+1}) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторое пороговое значение, то переходим к шагу 6;

8) проверить Парето-оптимальность точки  $m^{N+1}$ . Вычислить значения вектора целевой функции  $F(m^{N+1}) = (F_1(m^{N+1}), F_2(m^{N+1}))$  и сравнить эти значения с вычислениями для других членов популяции;

9) если  $m^{N+1}$  Парето-оптимально, включить его в Парето-множество решений и исключить точки им доминируемые (обновить Парето-множество);

10) перейти к шагу 6.

Алгоритм работает до тех пор, пока окрестности всех Парето-оптимальных точек будут

исследованы и расстояние между новой сгенерированной точкой и ее ближайшей окрестностью станет меньше, чем некоторое пороговое значение. Выбор окончательного решения из множества  $P$ , полученного на последней стадии, может быть сделан с использованием анализа компромисса между значениями функции принадлежности нечеткого множества и функции невязки. Возможен также случай, когда конечное Парето-множество содержит только одно решение.

**Адаптация алгоритма к обратной задаче гравиметрии для трехмерных контактных поверхностей.** Хорошо известно, что эффективность любого метода нелинейной оптимизации существенно зависит от количества модельных параметров. Рассмотрим достаточно простой модельный пример, чтобы проиллюстрировать работу предложенного алгоритма.

Решим обратную нелинейную задачу гравиметрии для одной контактной поверхности на ограниченном участке исследования. Она относится к классу некорректных задач. Детальная постановка задачи приведена в работе [Булах, Кишман-Лаванова, 2006], где она решается методом градиентного спуска.

Здесь кратко остановимся на основных моментах параметризации задачи.

Контактная поверхность определяется положением горизонтальной плоскости  $\zeta = H_0$ . В каждой точке  $[(\xi_0, \eta_0)_j, j = 1, 2, \dots, m]$  поверхность отклоняется от этой фиксированной плоскости на величину

$$Z = Z(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m \frac{Q1_j}{\left[1 + Q2_j (\xi - \xi_{0j})^2 + Q3_j (\eta - \eta_{0j})^2\right]^\alpha} \quad (4)$$

Значения параметров  $Q1, Q2, Q3$  определяют конфигурацию поверхности. Параметр  $\alpha$  зафиксироваем,  $\alpha = 2$ .

Если контактная поверхность располагается выше плоскости  $Z = H_0$ , будем полагать, что  $Z(\xi, \eta) > 0$ . Если поверхность имеет погружение и располагается ниже фиксированной плоскости, то  $Z(\xi, \eta) < 0$ .

Таким образом, сама контактная поверхность определяется функцией

$$H(\xi, \eta) = H_0 - Z(\xi, \eta). \quad (5)$$

Запишем параметры, определяющие геологическую модель:

$$P = \{jk; [\sigma; H_0; W1; W2]_t, t = 1, 2, \dots, jk\}, \quad (6)$$

$$W1 = [\alpha; m; (\xi_0, \eta_0)_j, j = 1, 2, \dots, m],$$

$$W2 = [(Q1; Q2; Q3)_j, j = 1, 2, \dots, m],$$

где  $jk$  — количество контактных поверхностей;  $\sigma$  — избыточная плотность масс, которые размещаются ниже поверхности раздела;  $H_0$  — горизонтальная плоскость, нулевой уровень, относительно которого ведется отсчет отметок рельефа контактной поверхности. Параметры, которые определяют функцию (4) (отклонение поверхности от нулевого уровня), записаны двумя группами. В группу  $W1$  входит  $\alpha$  — показатель степени и совокупность  $m$  точек  $[(\xi_0, \eta_0)_j, j = 1, 2, \dots, m]$ . Эти величины будут определяться интерпретатором до решения задачи и в ходе решения задачи не изменяются. В группу  $W2$  входят  $3m$  параметра. Они будут изменяться от своего начального значения  $W2^{(0)}$  до конечного  $W2^*$ . Эти величины совместно с фиксированными данными определяют результат решения.

Функции принадлежности для переменных параметров модели запишутся следующим образом:

$$\mu_{Q1}(Q1) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < Q1 < 1, \\ 0, & \text{если } Q1 \leq 0 \wedge Q1 \geq 1, \end{cases}$$

$$\mu_{Q2}(Q2) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < Q2 < 0,5, \\ 0, & \text{если } Q2 \leq 0 \wedge Q2 \geq 0,5, \end{cases}$$

$$\mu_{Q3}(Q3) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < Q3 < 0,5, \\ 0, & \text{если } Q3 \leq 0 \wedge Q3 \geq 0,5. \end{cases}$$

Пусть априорные данные о глубине  $H_0$  к контактной поверхности описываются следующими возможными утверждениями:

- 1) возможно, что  $H_0$  имеет значения от 1 до 2 км или меньше;
- 2) маловероятно, что  $H_0$  больше 4 км.

В этом случае можем описать параметр  $H_0$  возможным распределением, связанным с нечетким множеством с функцией принадлежности (рис. 1):

$$\mu_H(H_0) = \begin{cases} H_0, & 0 < H_0 < 1, \\ 1, & 1 \leq H_0 \leq 2, \\ 2 - H_0 / 2, & 2 < H_0 < 4. \end{cases} \quad (7)$$

Очевидно, функция плотности вероятности априорной информации в этом случае не

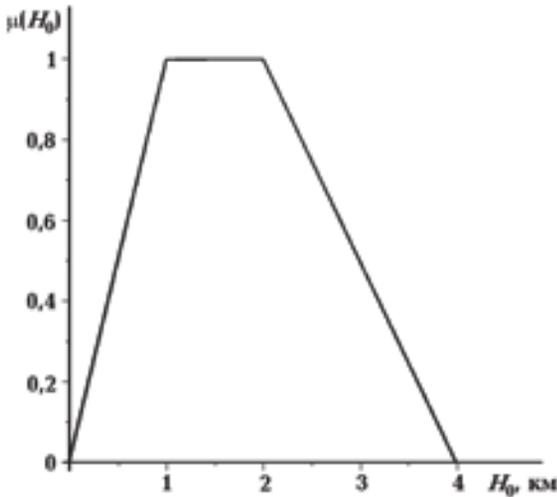


Рис. 1. Функция принадлежности нечеткого множества.

может считаться гауссовой и будет асимметричной, так как  $H_0 \geq 0$ . Заметим также, что нельзя просто ограничить  $H_0$  неравенством  $0 \leq H_0 \leq 4$ , так как мы располагаем сведениями, что значения глубины между 1 и 2 км более возможны, чем другие.

Сначала построим нечеткие множества для различных параметров моделей, далее скомбинируем их в одно общее нечеткое множество, используя определение декартового произведения. В конечном счете, функция принадлежности модели запишется так:

$$\mu_M(m) = \min(\mu_{H_0}(H_0), \mu_{Q1}(Q1), \mu_{Q2}(Q2), \mu_{Q3}(Q3)). \quad (8)$$

Уравнение (8) может быть использовано для

вычисления значений функции принадлежности модели. Вторая целевая функция (оснований для того, чтобы считать ее гауссовой, нет) может быть записана так, поскольку она отображает расположение Парето-множества в параметрическом пространстве:

$$L(m) = [g(m) - t]^T C_D^{-1} [g(m) - t]. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) образуют вектор целевой функции многоцелевой оптимизационной задачи.

Моделью для наблюдаемого поля служило неравномерное распределение точек на площади  $6 \times 6$  км, глубина  $H_0 = 1$  км, избыточная плотность  $0,5$  г/см<sup>3</sup>. Остальные параметры приведены в табл. 1. Соответствующее этому распределению наблюдаемое поле приведено на рис. 2.

Начальная популяция моделей была смоделирована в параметрическом пространстве в соответствии с функцией принадлежности нечеткого множества возможных решений (шаг 1—3 алгоритма). Было выполнено два модельных теста по регулярной сети  $6 \times 6$  с шагом 1 км для различных значений  $H_0, Q1$ , различного количества точек в начальной популяции и различных пороговых значений  $\epsilon$  (табл. 2).

Первый тест был выполнен для 60 точек начальной популяции и широкой области возможных значений глубины. Только одна Парето-точка была выбрана с начальной популяции. Окончательное решение было получено как результат прямого поиска в окрестности этой точки (рис. 3).

Второй тест выполнялся для этой же области, но количество точек начальной популяции

Т а б л и ц а 1. Параметры модели, использованной для вычисления наблюдаемого поля

Номер	$x_0$	$y_0$	$Q1$	$Q2$	$Q3$
1	-1	2	0,5	0,2	0,2
2	0	-1	0,6	0,2	0,2
3	0	0	0,3	0,2	0,2
4	1	1	0,2	0,2	0,2
5	2	0	0,3	0,2	0,2
6	3	1	0,3	0,2	0,2
7	3	2	0,5	0,2	0,2
8	3	3	0,3	0,2	0,2

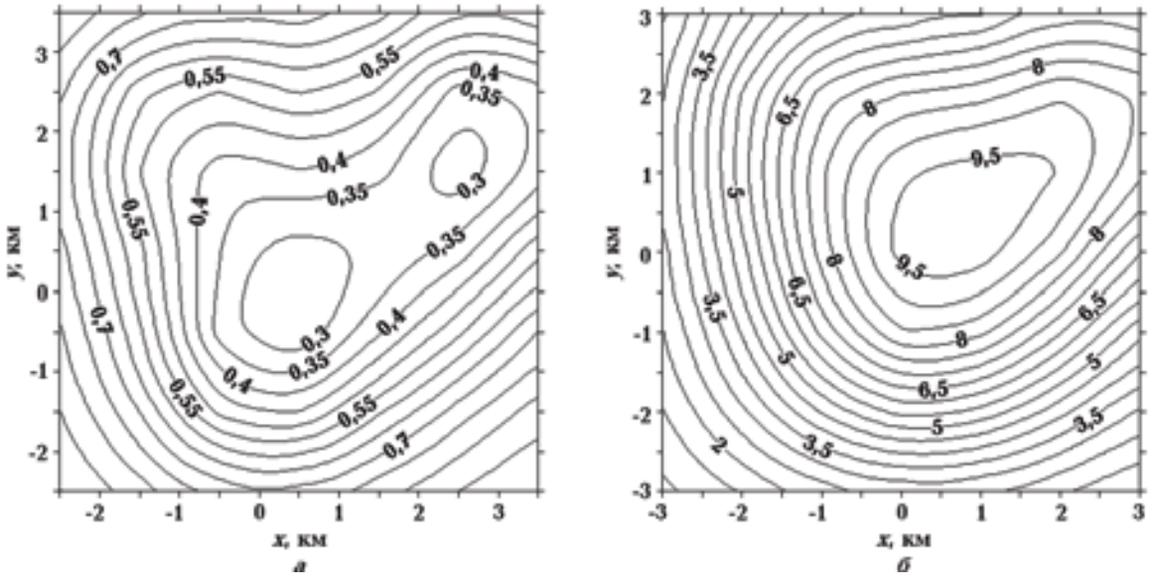


Рис. 2. Рельеф заданной поверхности (а) и соответствующее поле аномалии силы тяжести (наблюденное) (б).

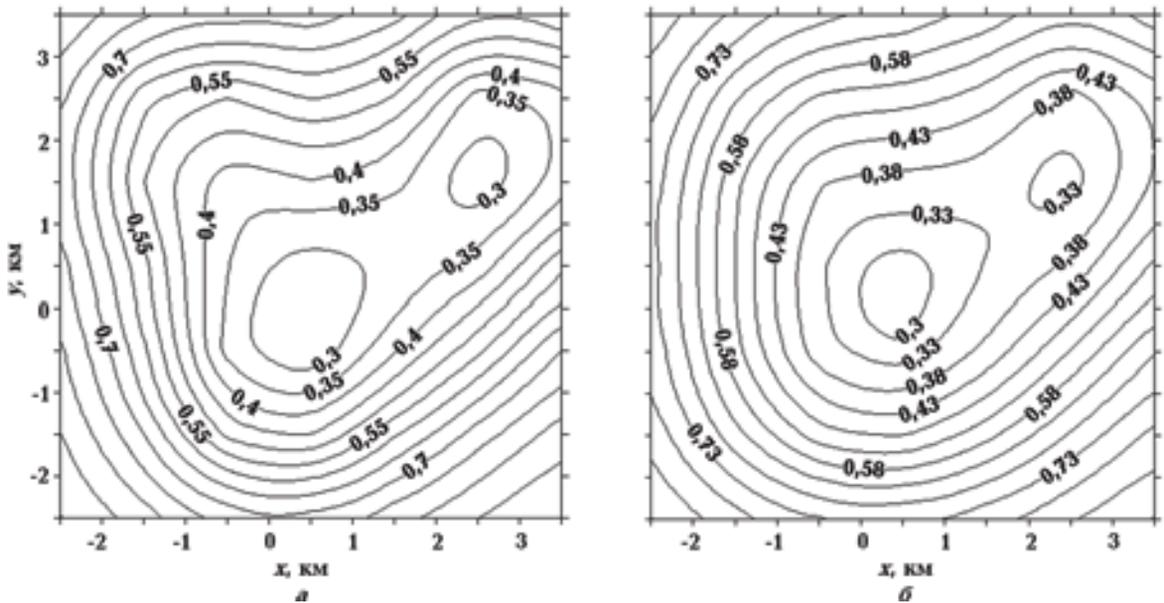


Рис. 3. Парето-оптимальное решение для первого теста: а — заданный рельеф контактной поверхности; б — подобранный рельеф поверхности. Функция невязки 2,44. Функция принадлежности 0,96.

**Т а б л и ц а 2. Параметры, используемые для формирования начальной популяции модельной задачи**

Номер теста	Количество точек в начальной популяции	$\epsilon$	Параметры функции принадлежности нечеткого множества	
			$H_0$	$Q_{1j}$
1	60	0,8	1	0,4
2	80	0,7	1,2	0,3

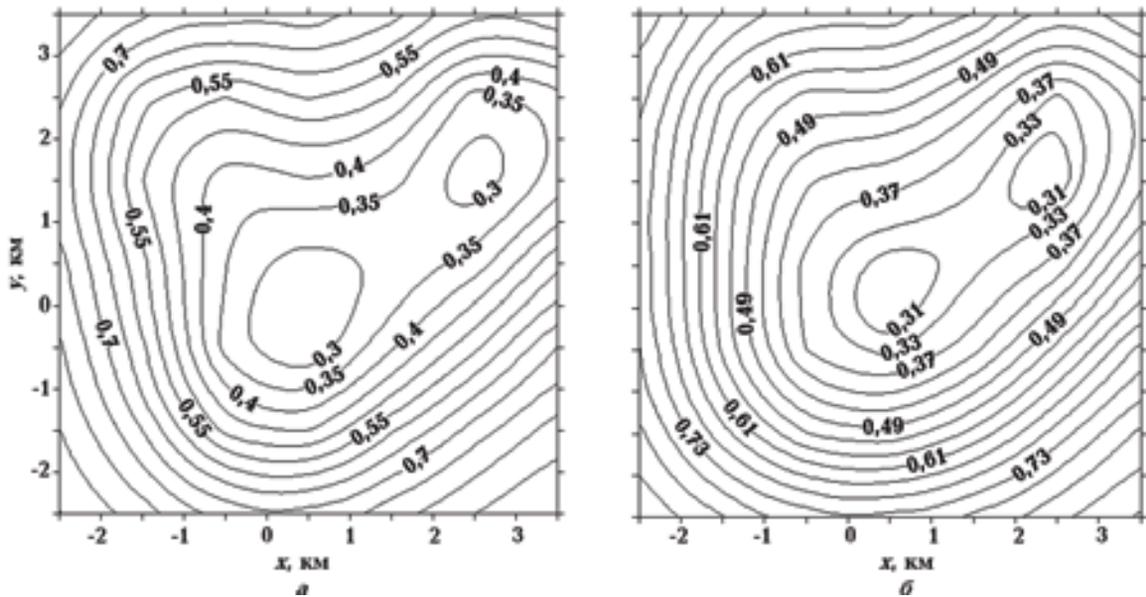


Рис. 4. Решение для второго теста с двумя Парето-оптимальными точками: *а* — заданный рельеф контактной поверхности; *б* — подобранный рельеф поверхности. Функции невязки, соответствующие локальным минимумам,  $F_1 = 2,16$ ;  $F_2 = 3,51$ . Функция принадлежности 0,97.

было больше. Начальное Парето-множество, полученное на втором этапе алгоритма, содержит два разных Парето-оптимальных решения, очевидно расположенных в окрестностях двух локальных минимумов.

Только одно Парето-оптимальное решение осталось после выполнения прямого поиска в окрестностях обеих точек и обновления Парето-множества (рис. 4).

Заметим, что значение функции невязки конечного решения меньше предыдущего.

Два предыдущих примера показывают, что если начальная область поиска с равной вероятностью большая, то количество точек в начальной популяции должно быть достаточно большим, чтобы в процессе поиска параметрическое пространство было исследовано более детально и чтобы избежать сходимости алгоритма к одному локальному минимуму.

Результаты тестов также показывают, что алгоритм позволяет получить достаточно удовлетворительные решения уже на этапе поиска Парето-множества. Последующий прямой поиск в окрестностях Парето-оптимальных точек значительно уменьшает функцию невязки и отбрасывает некоторые локальные минимумы.

**Заключение.** Ключевая идея работы — разработать алгоритм инверсии гравиметрических данных в условиях неопределенности разнородной априорной информации, используя возможности детерминистического и вероятностного подходов. В рамках вероятностного подхода априорное распределение модельных параметров описывается посредством нечетких множеств. Это предложение основано на том факте, что априорная информация часто связана с неопределенностью в большей мере не вероятностной природы. Детерминистический подход используется для вычисления поля от заданного распределения модельных параметров, а также для формализации априорной информации посредством естественных ограничений, независимых оценок избыточной массы источников аномалии, ограничения на максимально допустимые превышения плотности одного тела относительно плотности другого, оценки максимально возможного модуля помехи в измерениях.

Поскольку создание такого алгоритма — задача вполне независимая, то он может быть использован для решения широкого круга нелинейных геофизических обратных задач.

**Список литературы**

- Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Тюмень: Изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2000. 352 с.
- Балк П.И. О принципиальных недостатках общепринятых форм представления результатов математической интерпретации потенциальных полей. *Геофиз. журн.* 2004. Т. 26. № 5. С. 124—132.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Обратные задачи гравиметрии как задачи извлечения достоверной информации в условиях неопределенности. *Физика Земли.* 2012. № 5. С. 85—101.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Мичурин А.В. Смешанные вероятностно-детерминистские методы решения линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии. *Геофизика.* 2011. № 2. С. 20—29.
- Булах Е.Г., Кишман-Лаванова Т.Н. Еще один аппроксимационный подход к решению обратных задач гравиметрии в классе трехмерных контактных поверхностей. *Геофиз. журн.* 2006. Т. 28. № 2. С. 54—62.
- Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. Москва: Прогресс, 1986. 432 с.
- Goldberg D.E., Deb K., Clark J.H., 1992. Genetics algorithm, noise and the sizing of population. *Complex systems* 6, 333—362.
- Klir G.J., Folger T.A., 1988. Fuzzy sets, uncertainty and information. New Jersey: Prentice-Hall Int. 368 p.
- Kozlovskaya E., 2000. An algorithm of geophysical data inversion based on non-probabilistic presentation of a priori information and definition of Pareto-optimality. *Inverse problem* 16, 839—861.
- Mosegaard K., Tarantola A., 1995. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *J. Geophys. Res.* 100 (B7), 12431—12447.
- Sambridge M., 1999. Geophysical inversion with a neighborhood algorithm — I. Searching a parameter space. *Geophys. J. Int.* 138 (2), 479—494.
- Sambridge M., Drijkoningen G.G., 1992. Genetic algorithms in seismic waveform inversion. *Geophys. J. Int.* 109, 323—342.
- Stoffa P.L., Sen M.K., 1991. Nonlinear multiparameter optimization using genetic algorithms: inversion of plane wave seismograms. *Geophysics* 56, 1749—1810.
- Sugeno M., 1977. Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey. *Fuzzy Automata and Decision Processes.* New York: North-Holland, 89—102.
- Tarantola A., 2005. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. Philadelphia, Pa: Society for Industrial and Applied Mathematics, 342 p.
- Tarantola A., Valette B., 1982. Generalized non linear inverse problem using the least squares criterion. *Rev. Geophys. Space* 20, 219—232.
- Zadeh L.A., 1978. Fuzzy sets as a basis of a theory of possibility. *Fuzzy Sets Syst.* 1, 3—28.
- Zimmermann H.-J., 2001. Fuzzy set theory — and its applications (4<sup>th</sup> ed.). Dordrecht: Kluwer, 544 p.

## Pareto-optimal solutions of the inverse problem of gravimetry with indeterminate a priori information

© T. N. Kishman-Lavanova, 2015

The paper discusses theoretical aspects of solving the nonlinear inverse problem of gravimetry with uncertainty of a priori information. The a priori information is described by fuzzy sets. Special-purpose geophysical problem with uncertain a priori information is transformed into a multi-objective optimization problem. One of the criteria is the membership function of a fuzzy set of possible solutions. Solution of the problem is a set of Pareto-optimal solutions, which is constructed in the parametric space applying a three-step search algorithm. The advantage of the proposed method is that it provides a possibility of including the wide range of non-probabilistic a priori information in the inversion procedure and can be applied to the solution of highly nonlinear problems. This reduces the number of direct computing problems by selective modeling of sample points in the parametric space. A test example has been given of the algorithm applied to the inverse problem of gravimetry for a single contact surface.

**Key words:** inverse problem of gravimetry, indeterminate a priori information, Pareto-optimal solution.

References

- Altunin A. E., Semukhin M. V.*, 2000. Models and algorithms for decision making in fuzzy conditions: Tyumen: Publ. House of Tyumen. State Univ., 352 p. (in Russian).
- Balk P. I.*, 2004. About the fundamental shortcomings of the conventional forms of presentation of the results of mathematical interpretation of potential fields. *Geofizicheskiy zhurnal* 26 (5), 124—132 (in Russian).
- Balk P. I., Dolgal A. S.*, 2012. Inverse problem of gravimetry as a problem of extracting reliable information under uncertainty. *Fizika Zemli* (5), 85—101 (in Russian).
- Balk P. I., Dolgal A. S., Michurin A. V.*, 2011. Mixed probabilistic and deterministic methods for solving linear inverse problems of gravity and magnetic. *Geofizika* (2), 20—29 (in Russian).
- Bulakh E. G., Kishman-Lavanova T. N.*, 2006. Another approximation approach to the solution of inverse problems of gravimetry in a class of three-dimensional contact surfaces. *Geofizicheskiy zhurnal* 28(2), 54—62 (in Russian).
- Prigozhin I., Stengers I.*, 1986. Order out of Chaos: Man's New Dialogue with Nature. Moscow: Progress, 432 p. (in Russian).
- Goldberg D. E., Deb K., Clark J. H.*, 1992. Genetics algorithm, noise and the sizing of population. *Complex systems* 6, 333—362.
- Klir G. J., Folger T. A.*, 1988. Fuzzy sets, uncertainty and information. New Jersey: Prentice-Hall Int. 368 p.
- Kozlovskaya E.*, 2000. An algorithm of geophysical data inversion based on non-probabilistic presentation of a priori information and definition of Pareto-optimality. *Inverse problem* 16, 839—861.
- Mosegaard K., Tarantola A.*, 1995. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *J. Geophys. Res.* 100 (B7), 12431—12447.
- Sambridge M.*, 1999. Geophysical inversion with a neighborhood algorithm — I. Searching a parameter space. *Geophys. J. Int.* 138 (2), 479—494.
- Sambridge M., Drijkoningen G. G.*, 1992. Genetic algorithms in seismic waveform inversion. *Geophys. J. Int.* 109, 323—342.
- Stoffa P. L., Sen M. K.*, 1991. Nonlinear multiparameter optimization using genetic algorithms: inversion of plane wave seismograms. *Geophysics* 56, 1749—1810.
- Sugeno M.*, 1977. Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey. *Fuzzy Automata and Decision Processes*. New York: North-Holland, 89—102.
- Tarantola A.*, 2005. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. Philadelphia, Pa: Society for Industrial and Applied Mathematics, 342 p.
- Tarantola A., Valette B.*, 1982. Generalized nonlinear inverse problem using the least squares criterion. *Rev. Geophys. Space* 20, 219—232.
- Zadeh L. A.*, 1978. Fuzzy sets as a basis of a theory of possibility. *Fussy Sets Syst.* 1, 3—28.
- Zimmermann H.-J.*, 2001. Fuzzy set theory — and its applications (4<sup>th</sup> ed.). Dordrecht: Kluwer, 544 p.