УДК 519.633

Модифицированное аддитивно-усредненное расщепление для решения трехмерных уравнений гидродинамики

© *Л. Н. Кацалова, 2016*

Украинский гидрометеорологический институт, ГСУЧС, НАН Украины, Киев, Украина
Поступила 18 июня 2016 г.

Представлено членом редколлегии Т. А. Белым

Рівняння гідродинаміки складають основу сучасних екологічних та метеорологічних моделей. Складність реалізації таких моделей обумовлена тривимірністю та нелінійністю рівнянь, а також великими масивами даних та необхідністю оперативного розв'язання. В практику увійшло використання паралельних обчислень при розв'язанні гідродинамічних систем. Такий підхід дає можливість значно зменшити час розв'язання, але потребує розробки нових методів реалізації рівнянь моделі. Викладений у статті метод розв'язання тривимірних рівнянь конвективної дифузії є модифікацією адитивно-усередненого розщеплення тривимірних рівнянь, яка проведена для збільшення ефективності роботи розщеплення при паралельних обчисленнях. Суть модифікації полягає у введенні параметра, що вказує кількість кроків, на яких одномірні задачі розв'язуються методом явного рахування паралельно на різних процесорах без обміну данними між собою. Представлені результати чисельного експерименту, які підтверджують хорошу точність, збіжність та економічність методу.

Ключові слова: гідродинаміка, рівняння конвективної дифузії, паралельні обчислення, адитивно-усереднене розщеплення, метод явного рахування.

Введение. При решении современных метеорологических и экологических задач атмосферные процессы моделируются на основе фундаментальных уравнений гидродинамики [Кибель, 1957; Гилл, 1986; Гладкий, Скопецький, 2005]. Уравнения сохранения количества движения Навье—Стокса, энергии, массы, концентрации примеси, влажности и водности, сохранения и диссипации кинетической энергии турбулентности в полном или упрощенном видах составляют основу многих математических моделей циркуляции атмосферы [Прусов, Дорошенко, 2006].

В общем виде эти уравнения являются трехмерными нелинейными уравнениями конвективной диффузии и не имеют аналитических решений. Модели на основе уравнений гидродинамики, как правило, реализуют с помощью разностных схем [Марчук, 1967; Белов и др., 1989; Самарский, Михайлов, 2001]. Их преимуществом являются универсальность и экономичность. Для конечно-разностных методов наиболее полно развиты основные теоретические понятия: аппроксимация, устойчивость, сходимость [Самарский, Гулин, 1973; Самарский, Вабищевич, 1999], но важным является зависимость точности и времени решения уравнений от величины пространственно-временных шагов дискретной сетки. Чем меньше шаги сетки, тем выше точность и больше машинное время решения.

Проблема точности и экономии времени особенно актуальна для метеорологических и экологических задач, основанных на уравнениях гидродинамики. Такие задачи отличаются сложностью математических вычислений, необходимостью оперировать большими массивами данных и получать решения в оперативном режиме. В мировой практике при реализации гидродинамических моделей используют параллельные вычислительные системы, которые, в свою очередь, нуждаются в соответствующих методах и алгоритмах для их эффективного применения [Дорошенко, 2000].

В настоящей статье представлена модификация метода решения трехмерных уравнений конвективной диффузии, основанного на аддитивно-усредненном расщеплении [Гордезиани, Миладзе, 1974] и методе явного счета, описанного в работах [Прусов и др., 2007; Гук, 2011]. Модификация проведена с целью увеличения эффективности метода для решения задач с помощью алгоритма распараллеливания по направлениям.

Моделирование атмосферных процессов на основе уравнений гидродинамики. При математическом моделировании физических процессов, которые происходят в атмосфере Земли, наиболее распространенной является концепция, согласно которой движение воздуха в атмосфере Земли представляется как движение сплошной среды с позиции метода Эйлера [Roache, 1985; Anderson et al., 1997]. В методе Эйлера рассматривается изменение параметров движения частичек сплошной среды во времени (скорости, ускорения, плотности, температуры, давления), которые проходят через фиксированную точку пространства, и изменение их при переходе из одной точки пространства в другую. Таким образом, в методе Эйлера параметры поля движения воздуха являются функциями времени t и координат пространства $\mathbf{X} \equiv (x_1, x_2, x_3)$.

Допустим, что элементарный объем воздуха занимает положение $\mathbf{X}$ в момент времени t: $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$. Тогда некоторое свойство $\Re$ этого элементарного объема воздуха будет изменяться во времени согласно равенству

$$\Re = \Re\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t\right) \equiv \Re\left(\mathbf{X}(t), t\right).$$

Для элементарного объема скорость изменения свойства $\Re$ определяется формулой

$$\frac{d\Re}{dt} = \frac{\partial\Re}{\partial t} + \frac{\partial\Re}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\Re}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\Re}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial\Re}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\cdot\nabla\right)\Re \equiv \frac{\partial\Re}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\Re .$$

Систему уравнений, которые описывают общую циркуляцию атмосферы, запишем в векторном виде [Прусов, Сніжко, 2005]:

- уравнение сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 ; \qquad (1)$$

- уравнение сохранения количества движения (Навье—Стокса)

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\Omega\times\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \nabla\cdot\left(\nu\mathbf{V}\right) ; \qquad (2)$$

- уравнение притока тепла в атмосфере

$$\frac{d\theta}{dt} = \nabla\cdot\left(k_{\mathrm{T}}\nabla\theta - F_{\mathrm{rad}}\right) - \frac{L_v}{c_p}Q_H ; \qquad (3)$$

- уравнение притока удельной влажности

$$\frac{dq}{dt} = \nabla\cdot\left(k_d\nabla q\right) + Q_H ; \qquad (4)$$

- уравнение притока сконденсированной влаги (водности)

$$\frac{d\delta}{dt} = \nabla\cdot\left(k_d\nabla\delta\right) - Q_H ; \qquad (5)$$

- уравнение переноса концентрации примеси

$$\frac{ds}{dt} = \nabla\cdot\left(k_d\nabla s\right) + Q_s ; \qquad (6)$$

- уравнение состояния

$$p = R\rho T . \qquad (7)$$

В системе уравнений (1)–(7) приняты следующие обозначения: ρ — плотность воздуха; $\mathbf{V} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ — скорость перемещения атмосферного воздуха; p — давление воздуха; ν — коэффициент турбулентной вязкости; $\theta = T\left(1000/p\right)^{R/c_p}$ — потенциальная температура воздуха; T — абсолютная температура воздуха; R = 287,04 Дж·кг$^{-1}$·К$^{-1}$ — универсальная газовая постоянная; c_p = 3,5R — удельная теплоемкость при постоянном давлении; q — удельная влажность (масса водяного пара в единице массы воздуха); δ — удельная водность (масса сконденсированной влаги в единице массы воздуха); s — концентрация примеси в воздухе; Ω — угловая скорость вращения Земли; $\mathbf{g} \equiv (0, 0, -g)$ — ускорение; k_{T} — коэффициент турбулентной теплопроводности; k_d — коэффициент турбулентной диффузии; F_{rad} — плотность радиационного потока энергии; $L_v \approx \left[2500{,}8 - 2{,}3(T-273)\right]\times 10^3$ Дж·кг$^{-1}$ — скрытая теплота испарения; Q_H — изменение удельной влажности в единице объема воздуха, который двигается в тех частях атмосферы, где влажность достигает насыщения q_w:

$$Q_H = \begin{cases} 0, & q < q_w, \\ \rho\, dq/dt, & q \ge q_w; \end{cases}$$

Q_s — изменение концентрации примеси в единице объема воздуха в той части атмосферы, где имеют место химические реакции.

Коэффициент турбулентной вязкости ν определяется решением модели, которая является одной из наиболее проверенных и распространенных моделей турбулентности. В качестве зависимых переменных принимаются плотность кинетической энергии турбулентного пульсационного движения $k = \rho\left(v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2\right)/2$ и скорость диссипации $\varepsilon = C_d k^{1,5} L$ турбулентной кинетической энергии k [Шуман и др., 1984]:

$$\frac{dk}{dt}=\nabla\cdot\left(k_k\nabla k\right)+\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\varepsilon+$$

$$+\frac{g}{T}\frac{\nu}{\xi_T}\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}+\gamma_a\right)\equiv\nabla\cdot\left(k_k\nabla k\right)+Q_k\,, \quad (8)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\nabla\cdot\left(k_\varepsilon\nabla\varepsilon\right)+\frac{\varepsilon}{k}C_1\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+ \quad (9)$$

$$+\frac{\varepsilon}{k}\left[C_2\frac{g}{T}\frac{\nu}{\xi_T}\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}+\gamma_a\right)-C_3\varepsilon\right]\equiv\nabla\cdot\left(k_\varepsilon\nabla\varepsilon\right)+Q_\varepsilon\,,$$

$$i,j=1,2,3\,,$$

где $C_d=0{,}3$; $C_1=1{,}43$; $C_2=0{,}29$, $C_3=0{,}09$ — эмпирические постоянные; γ_a=0,0098 К·м$^{-1}$ — сухоадиабатический вертикальный градиент температуры. Турбулентная вязкость определяется соотношением

$$\nu=C_4\,k^2/\varepsilon\,. \quad (10)$$

Полуэмпирическая модель (8)—(10), известная в научных кругах как (k–ε)-модель турбулентности, основана на полученных Рейнольдсом уравнениях движения тепло- и массопереноса для усредненных величин.

Уравнения модели циркуляции атмосферы (1)—(10) — это в основном трехмерные уравнения конвективной диффузии, не имеющие аналитических решений. Реализация подобных моделей численно связана с большими затратами машинных ресурсов и времени. В связи с этим экономичность и эффективность параллельных вычислений являются одними из главных критериев при выборе метода решения уравнений модели.

Постановка задачи. Приведенные выше уравнения гидродинамики можно записать в общем виде следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Lambda u=f \quad \text{при} \quad \left(x_1,x_2,x_3\right)\in\Omega/\Gamma,\ t>0, \quad (11)$$

$$u\left(0,x_1,x_2,x_3\right)=u^0\left(x_1,x_2,x_3\right) \quad \text{при} \quad \left(x_1,x_2,x_3\right)\in\Omega\,, \quad (12)$$

$$u\left(t,x_1,x_2,x_3\right)\equiv 0 \quad \text{при} \quad \left(x_1,x_2,x_3\right)\in\Gamma,\ t>0, \quad (13)$$

где $\Omega=\left[0,\ell_1\right]\times\left[0,\ell_2\right]\times\left[0,\ell_3\right]$ — пространственная область определения задачи; Γ — граница области Ω; $u=u\left(t,x_1,x_2,x_3\right)$ — зависимая функция; $f=f\left(t,x_1,x_2,x_3\right)$ — свободный член уравнения; $\Lambda=\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha$ — пространственный дифференциальный оператор, представленный суммой операторов; $\Lambda_\alpha=v_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mu_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)$, v_α,μ_α — коэффициенты конвекции и диффузии.

В работах [Кацалова, 2013; 2015] предложен и исследован метод решения задачи (11)—(13). Суть метода состоит в применении аддитивно-усредненного расщепления к трехмерному уравнению и экономичной конечно-разностной схемы явного счета к последовательности полученных одномерных задач.

Решение одномерных задач можно проводить параллельно по времени на разных процессорах. Но практика показала, что при обычном аддитивно-усредненном расщеплении обмен данными на каждом шаге не позволяет получать значительную экономию времени решения задачи. В связи с этим была проведена модификация метода аддитивно-усредненного расщепления [Черниш, 2009]. Суть модификации состоит в введении параметра m, который указывает количество временных шагов, на которых можно проводить решение одномерных задач без обмена данными между ними.

Дискретизируем пространственно-временную область задачи:

$$\omega_\tau=\left\{\,t^n=n\tau,\ n=0,1,...\right\}$$

— временная сетка,

$$\omega_h=\omega\left(h_1,h_2,h_3\right)=$$
$$=\left\{\left(x_1=j_1h_1,x_2=j_2h_2,x_3=j_3h_3\right):h_\alpha=\right.$$
$$\left.=\ell_\alpha/J_\alpha\,,\ j_\alpha=0,...,J_\alpha,\ \alpha=1,2,3\right\}$$

— равномерная по каждому координатному направлению x_a пространственная сетка.

Определим пространство H_0 как множество векторов

$$\left\{y=\left(y_0,y_1,...,y_N\right):y_{b\left(i_1,i_2,i_3\right)}=\right.$$
$$\left.=0,\ i_\alpha\in\left\{0,J_\alpha\right\},\alpha=1,2,3\right\}$$

со скалярным произведением

$$\left(y,v\right)=h\sum_{x\in\omega_h}y\left(x\right)v\left(x\right)=\sum_{i_1=1}^{J_1-1}\sum_{i_2=1}^{J_2-1}\sum_{i_3=1}^{J_3-1}h\,y_{b\left(i_1i_2i_3\right)}v_{b\left(i_1i_2i_3\right)}\,,$$

где

$$N=\prod_{\alpha=1}^{3}\left(J_\alpha+1\right)-1\,,\quad h=h_1h_2h_3\,,$$

$b(i_1,i_2,i_3)=a\cdot(i_1,i_2,i_3)^T$ — биективнйый оператор, $a=(a_1,a_2,a_3)$ — проекционный вектор, $a_\alpha=\prod_{s=0}^{\alpha-1}(J_s+1)$, $J_0=0$. По сути оператор $b(i_1,i_2,i_3)$ определяет переход от трехцифрового индексирования к последовательному для каждого узла сетки ω_h и значений y в них.

Для элементов этого пространства рассматривается норма $\|y\|=\sqrt{(y,y)}$.

Определим следующие операторы, которые действуют в H_0:

$$y_{\bar{x},i}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h},\ y_{x,i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}.$$

Запишем конечно-разностную схему для задачи (11)—(13), полученную с помощью модификации аддитивно-усредненного расщепления [Прусов и др., 2009б] и метода явного счета [Гук, 2011], так:

$$\frac{y_\alpha^{n-m+1+s}-y_\alpha^{n-m+s}}{3\tau}+B_\alpha y_\alpha^{n-m+1+s}-A_\alpha y_\alpha^{n-m+s}=\varphi_\alpha^{n-m+s},$$

$$s=0,...,m-1,\ \alpha=1,2,3, \tag{14}$$

где

$$(B_\alpha y)_i=\left(\frac{v_\alpha}{2}+\frac{\mu_\alpha}{h_\alpha}\right)y_{\bar{x}_\alpha,i},$$

$$(A_\alpha y)_i=\left(\frac{v_\alpha}{2}-\frac{\mu_\alpha}{h_\alpha}\right)y_{x_\alpha,i},$$

$$i=1,...,N-1,$$

$$y^{n+1}=\frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}y_\alpha^n, \tag{15}$$

$$y_\alpha^{n-m}=y^{n-m},\ \alpha=1,2,3,\ y^0=u^0, \tag{16}$$

$$y_0^{n+1}=0\ ,\ y_N^{n+1}=0,\ n=1,2,... \tag{17}$$

Легко видеть, что при $m=1$ имеет место аддитивно-усредненное расщепление с использованием метода явного счета. В работе [Прусов и др., 2009а] теоретически показано, что модифицированное аддитивно-усредненное расщепление дает ощутимый выигрыш времени при значениях параметра m от 2 до 10. При $m>10$ экономия времени значительно не увеличивается по сравнению с $m=10$.

Численный эксперимент. Проиллюстрируем работу модифицированного аддитивно-усредненного расщепления и метода явного счета на примере решения двумерной задачи, которая имеет аналитическое решение:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial u}{\partial x_2}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+f \tag{18}$$

при

$$(x_1,x_2)\in[0;1]^2,\ t\in[0;10],$$

$$u(0,x_1,x_2)=\sin(x_1+x_2)$$

при

$$(x_1,x_2)\in[0;1]^2,\ t=0,$$

$$u(t,x_1,x_2)=u_A(t,x_1,x_2)$$

при

$$(x_1,x_2)\in\partial[0;1]^2,\ t\in[0;1],$$

где

$$v_k=\sin(x_k),|v_k|\le v_{\max}=1,\mu_k=$$

$$=0{,}001+0{,}1\cdot\sin^2(x_k)>0,$$

$$f(t,x_1,x_2)=\Big(v_1+v_2-\big(v_{\max}+0{,}1(\sin(2x_1)+\sin(2x_2))\big)\Big)\times$$

$$\times\cos(x_1+x_2-v_{\max}t)+(\mu_1+\mu_2)\sin(x_1+x_2-v_{\max}t).$$

Аналитическое решение этой задачи конвективной диффузии имеет вид

$$u_A(t,x_1,x_2)=\sin(x_1+x_2-v_{\max}t).$$

Численные эксперименты были проведены при $\Delta x_1=\Delta x_2=0{,}01$.

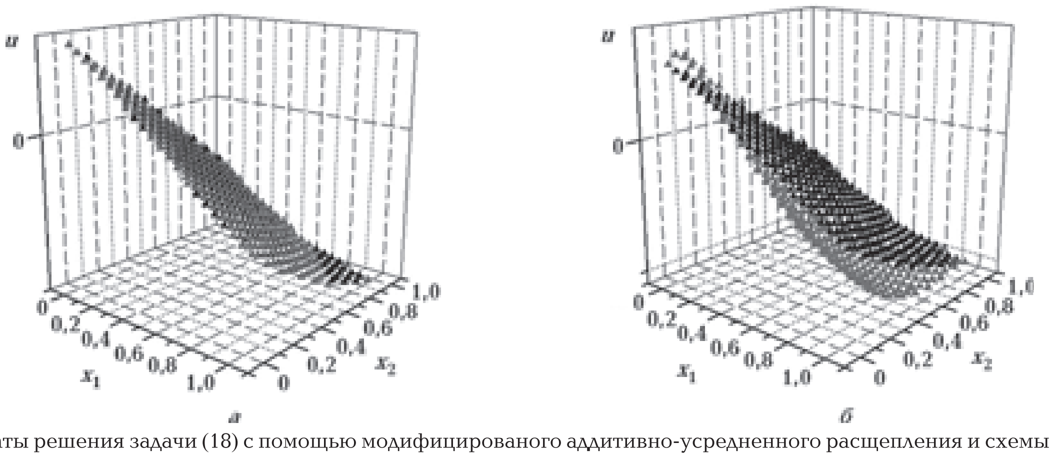
Результаты решения задачи (18) с помощью модифицированного аддитивно-усредненного расщепления и схемы явного счета представлены в табл. 1 и частично изображены на рисунке.

Результаты, представленные в табл. 1, экспериментально подтверждают устойчивость и сходимость предложенного метода. Имеет место устойчивость метода при соотношении временного и пространственного шагов $\tau=10h$; очевидно, что $er\to0$ при $\tau\to0$ с порядком $O(\tau)$.

Видим, что при увеличении параметра m точность ухудшается. По результатам тестирования была выведена зависимость точного решения от m: $er(m)\approx0{,}9m$, где er — ошибка при $m=1$.

По сути уменьшение точности является ценой за выигрыш времени расчетов.

По данным табл. 2 очевидно ожидаемое уменьшение машинного времени с увеличением параметра m. Таким образом, применение параллельных вычислений является эффективным при значении параметра $m>1$, при этом выигрыш времени существенный.



Результаты решения задачи (18) с помощью модифицированого аддитивно-усредненного расщепления и схемы явного счета (серый — численное решение, черный — аналитическое): *а* — $\tau = 0{,}01$, $m = 1$; *б* — $\tau = 0{,}1$, $m = 10$.

Т а б л и ц а 1. Максимальное отклонение $er = \max\limits_{i=1,\,N-1} |u_i - y_i|$ решения задачи (18) с помощью модифицированного аддитивно-усредненного расщепления и схемы явного счета y и аналитического решения u_A при разных значениях временного шага и параметра m

m \ τ	**0,1**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
1	0,076241	0,008112	0,004126	0,000841
2	0,130510	0,019590	0,010054	0,002060
4	0,206657	0,043349	0,022487	0,004643
8	0,414267	0,089145	0,047077	0,009871
10	0,418327	0,110943	0,059074	0,012479

Т а б л и ц а 2. Время t решения задачи (18) с помощью модифицированного аддитивно-усредненного расщепления и схемы явного счета с использованием двух процессоров при разных значениях временного шага и параметра m

m	t (τ=0,1)	t (τ=0,01)	t (τ=0,005)	t (τ=0,001)
1	0,460	4,58	9,16	45,812
2	0,264	2,644	5,284	26,420
4	0,168	1,680	3,36	16,792
8	0,124	1,196	2,392	11,976
10	0,112	1,104	2,204	11,02

Выводы. Моделирование циркуляции атмосферы, как правило, проводится на основе фундаментальных уравнений гидродинамики, которые в общем виде являются трехмерными уравнениями конвективной диффузии и не имеют аналитических решений.

Задачи метеорологии и экологии, основанные на моделях циркуляции атмосферы, имеют значительную сложность и требуют не только точных, но и быстрых решений. В силу этого обстоятельства их решение часто проводится с помощью конечно-разностных схем и параллельных вычислений. Такой подход позволяет добиться большей точности при меньших затратах машинного времени.

В статье изложен метод решения трехмерных задач конвективной диффузии, эффективный при параллельных вычислениях. Метод состоит в применении аддитивно-усредненного расщепления по направлениям на последовательность одномерных задач, которые решаются параллельно без обновления краевых условий на протяжении m временных шагов. Представлены результаты решения тестовой задачи.

Результаты численного эксперимента подтверждают эффективность применения модифицированного аддитивно-усредненного расщепления и метода явного счета для параллельных вычислений при решении многомерных уравнений конвективной диффузии. Решение тестовых задач показало, что метод устойчив, сходим и дает хорошую точность, хорошо работает в случае переменных коэффициентов. Введенная модификация позволяет значительно уменьшить время решения задачи.

Результаты численного эксперимента подтверждают целесообразность использования модифицированного аддитивно-усредненного расщепления и метода явного счета при решении гидродинамических уравнений. Прежде всего, это обусловлено экономичностью и хорошей точностью описанного метода.

Список литературы

Белов П. Н., Борисенков Е. П., Панин Б. Д. Численные методы прогноза погоды. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1989. 376 с.

Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Москва: Мир, 1986. 416 с.

Гладкий А. В., Скопецький В. В. Методи чисельного моделювання екологічних процесів: Навч. посіб. Київ: НТУУ «КПІ», 2005. 148 с.

Гордезиани Д. Г., Меладзе Г. В. О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 1974. №1. С. 246—250.

Гук Л. М. Метод явного рахунку для реалізації моделі циркуляції атмосфери. *Вісник Київ. нац. ун-та ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2011. № 4. С. 102—106.

Дорошенко А. Ю. Математические модели и методы организации высокопроизводительных параллельных вычислений. Алгебродинамический подход. Киев: Наук. думка, 2000. 177 с.

Кацалова Л. М. Дослідження збіжності адитивно-усередненого розщеплення на основі методу явного розрахунку для тривимірних рівнянь конвективної дифузії. *Геофиз. журн.* 2015. Т. 37. № 6. С. 131—136.

Кацалова Л. М. Один метод реалізації спрощеної моделі циркуляції атмосфери. *Вісник Київ. нац. ун-та ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2013. № 1. С. 178—171.

Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Москва: Гостехиздат, 1957. 375с.

Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1967. 353 с.

Прусов В. А., Дорошенко А. Ю. Моделювання природних і техногенних процесів в атмосфері. Київ: Наук. думка, 2006. 542 с.

Прусов В. А., Дорошенко А. Ю., Черныш Р. И. Выбор параметра модифицированного аддитивно-усредненного метода. *Кибернетика и системный анализ.* 2009а. № 4. С. 98—105.

Прусов В. А., Дорошенко А. Ю., Черныш Р. И. Метод численного решения многомерной задачи конвективной диффузии. *Кибернетика и системный анализ.* 2009б. № 1. С. 100—107.

Прусов В. А., Дорошенко А. Ю., Черныш Р. И., Гук Л. Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии. *Кибернетика и системный анализ.* 2007. № 3. С. 64—74.

Прусов В. А., Сніжко С. І. Математичне моделювання атмосферних процесів: Підручник. Київ: Ніка-Центр, 2005. 496 с.

Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.

Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. Москва: Наука, 1973. 416 с.

Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва: Физматлит, 2001. 320 с.

Черниш Р. І. Модифікована адитивно-усереднена схема розщеплення. *Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача*, 25—27 травня 2009 р.: Тези доп. Львів, 2009. С. 242.

Шуман У., Гретцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы численного моделирования турбулентных течений. В кн.: *Методы расчета турбулентных течений.* Москва: Мир, 1984. С. 103—226.

Anderson D. A., Tannehill J. C., Pletcher R. H., 1997. Computational fluid mechanics and heat transfer. Second Edition. Taylor and Francis, 792 p.

Roache P. J., 1985. Computational Fluid Dynamics. Albuquerque: Hermosa Publ., 616 p.

Modified additive-averaged splitting for solving three-dimensional equations of hydrodynamics

© *L. N. Katsalova, 2016*

Hydrodynamic equations form the basis of modern ecological and meteorological models. The complexity of the implementation of such models is due to three-dimensionality and nonlinearity of the equations, as well as large amounts of data and the need for prompt solutions. The use of parallel computing for solving hydrodynamic systems entered in the world practice. This approach makes it possible to reduce solution time significantly, but requires the development of new methods of implementation of the model equations. The described method for solving three-dimensional equations of convective diffusion is a modification of additive-averaged splitting three-dimensional equations. The modification carried out to increase the efficiency of splitting for the parallel computing. The essence of the modification is the introducing a parameter that indicates the number of steps, on which one-dimensional problems are solved by an explicit account in parallel on different processors without exchange of data between them. The results of numerical experiments that confirm the good accuracy, convergence and efficiency of the proposed method are shown.

Key words: hydrodynamics, convection diffusion equation, parallel computing, additive-averaged splitting, explicit account method.

References

Belov P. N., Borisenkov E. P., Panin B. D., 1989. Numerical methods of weather forecasting. Leningrad: Gidrometeoizdat, 376 p. (in Russian).

Gill A., 1986. The dynamics of the atmosphere and ocean. Moscow: Mir, 416 p. (in Russian).

Gladkiy A. V., Skopetskiy V. V., 2005. Methods of numerical modeling of environmental processes: Textbook. Kyiv: NTU «KPI», 148 p. (in Ukrainian).

Gordeziani D. G., Meladze G. V., 1974. Simulation of the third boundary value problem for multidimensional parabolic equations in an arbitrary domain by one-dimensional equations. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* (1), 246—250 (in Russian).

Huk L. M. 2011. Explicit account method for realization of atmospheric circulation model. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universiteta im. Tarasa Shevchenka. Ser. fiz.-mat. nauky* (4), 102—106 (in Ukrainian).

Doroshenko A. Yu., 2000. Mathematical models and methods of high-performance parallel computing. Algebrodynamical approach. Kiev: Naukova Dumka, 177 p. (in Russian).

Katsalova L. N., 2015. The study of convergence of additive-averaged splitting based on the scheme of explicit solution for three-dimensional equations of convective diffusion. *Geofizicheskiy zhurnal* 37(6), 131—136 (in Ukrainian).

Katsalova L. N., 2013. One method of implementation of simplified atmospheric circulation model. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universiteta im. Tarasa Shevchenka. Ser. fiz.-mat. nauky* (1), 178—171 (in Ukrainian).

Kibel I. A., 1957. Introduction to hydrodynamic methods of short-term weather forecasting. Moscow: Gostekhizdat, 375 p. (in Russian).

Marchuk G. I., 1967. Numerical methods in weather forecasting. Leningrad: Gidrometeoizdat. 353 p. (in Russian).

Prusov V. A., Doroshenko A. Yu., 2006. Modelling of natural and anthropogenic processes in the atmosphere. Kyiv: Naukova Dumka, 542 p. (in Ukrainian).

Prusov V. A., Doroshenko A. Yu., Chernysh R. I., 2009a. Selecting of parameter of modified additive-averaged method. *Kibernetika i sistemnyy analiz* (4), 98—105 (in Russian).

Prusov V. A., Doroshenko A. Yu., Chernysh R. I., 2009b. The method of numerical solution of multidimensional problem of convective diffusion. *Kibernetika i sistemnyy analiz* (1), 100—107 (in Russian).

Prusov V. A., Doroshenko A. Yu., Chernysh R. I., Guk L. N., 2007. Efficient difference scheme numerical solution of the convective diffusion problem. *Kibernetika i sistemnyy analiz* (3), 64—74 (in Russian).

Prusov V. A. Snizhko S. I., 2005. Mathematical modeling of atmospheric processes: Textbook. Kyiv: Nika-Tsentr, 496 p. (in Ukrainian).

Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N., 1999. Numerical methods for solving convection-diffusion problems. Moscow: Editorial URSS, 248 p. (in Russian).

Samarskiy A. A., Gulin A. V., 1973. Stability of difference schemes. Moscow: Nauka, 416 p. (in Russian).

Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P., 2001. Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples. Moscow: Fizmatlit, 320 p. (in Russian).

Chernysh R. I., 2009. Modified additive-averaged splitting scheme. *Conference of Young Scientists from the modern problems of mechanics and mathematics named after Y. S. Pidstryhach, May 25—27, 2009: abstracts*. Lviv, P. 242 (in Ukrainian).

Schumann W., Groetzbach G., Kleiser L., 1984. Direct methods for the numerical simulation of turbulent flows. In: *Methods of calculation turbulent flows.* Moscow: Mir, P. 103—226 (in Russian).

Anderson D. A., Tannehill J. C., Pletcher R. H., 1997. Computational fluid mechanics and heat transfer. Second Edition. Taylor and Francis, 792 p.

Roache P. J., 1985. Computational Fluid Dynamics. Albuquerque: Hermosa Publ., 616 p.