

Гомогенізація процесів дифузії у просторах з напівпрозорими мембранами

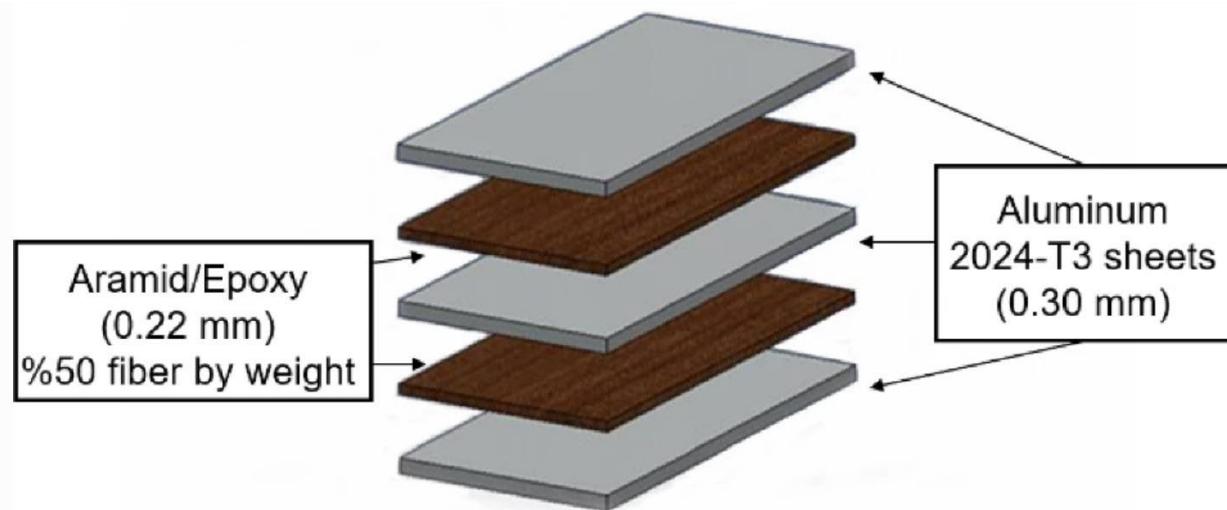
Ольга Арясова

- **Мета стажування:** участь у проекті «Гомогенізація дифузії з бар'єрами» (Homogenization of diffusions with interfaces), що фінансується DFG.
- **Період стажування:** 01.09.2024-31.08.2026
- **Індивідуальне завдання на стажування:** У рамках розпочатої раніше співпраці з Єнським університетом буде вивчено гомогенізацію процесів дифузії у середовищах із бар'єрами. Буде доведено теореми існування та єдиності для дограничних процесів, дослідження впливу різних типів мембран на дифузійні характеристики граничного процесу. Будуть створені перспективи сумісних досліджень з колегами з Інституту геонаук Єнського університету.
- **База стажування:** університет імені Фрідріха Шиллера (Friedrich-Schiller-Universität Jena), м. Єна, Німеччина

Мотивація

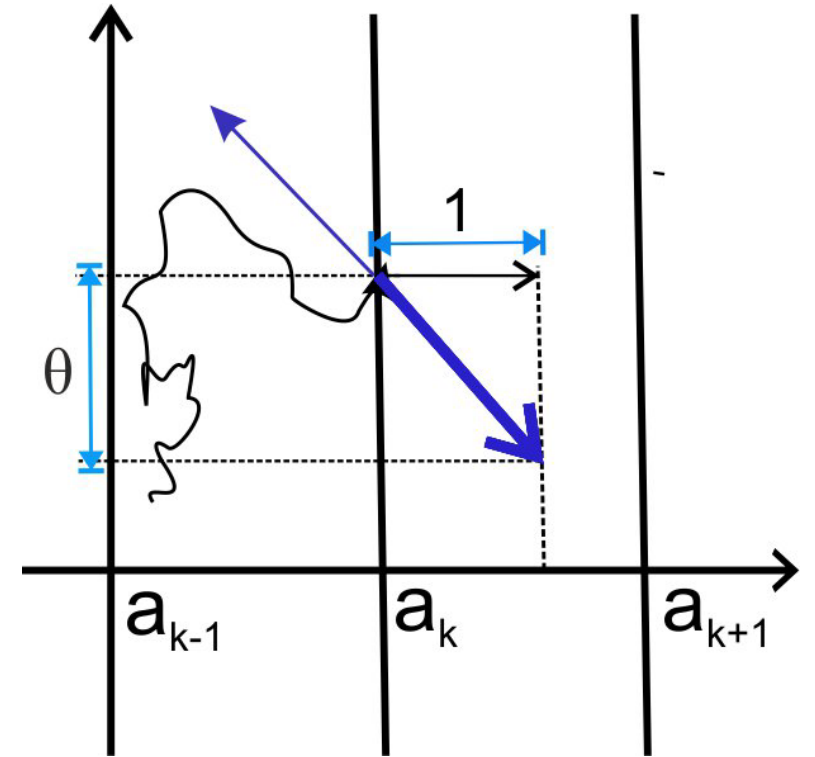
Матеріалознавство. Наша модель мотивована дослідженням композитного матеріалу, що складається з дуже тонких пластин різної проникності. У матеріалознавстві такі матеріали називаються зміцненими або армованими, як, наприклад, скловата, зміцнена алюмінієвою фольгою.

Нас цікавлять ефективні параметри такої системи.



Модель

Розглядається процес дифузії у три- (дво-) вимірному просторі. Простор “порізаний” на шари паралельними площинами (прямими), положення яких визначається точками a_k . Між площинами процес веде себе як звичайна дифузія, а на кожній з площин процес відбивається миттєво у напрямку $\pm(1, \vartheta(a_k, y))$ з так званими імовірностями проникнення $0.5(1 \pm \varepsilon \vartheta(a_k, y))$.



Математична постановка задачі

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \dots), \\ u(0, x) &= f(x), \\ \frac{1 + \varepsilon \beta(x)}{2} \frac{\partial u(t, x+)}{\partial \nu(x)} &= \frac{1 - \varepsilon \beta(x)}{2} \frac{\partial u(t, x-)}{\partial \nu(x)}, \quad x \in S_1 \cup S_2 \cup \dots.\end{aligned}$$

Положення площин (мембран) визначається співвідношенням

$$a_k^\varepsilon = \int_0^{\varepsilon k} \rho(y) dy, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Результат

- При $\varepsilon \rightarrow 0$ розв'язки початково крайової задачі прямують до розв'язку початкової задачі

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \left\langle g(\beta(x), \nu(x), \rho(x)), \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) &= f(x).\end{aligned}$$

Приклад

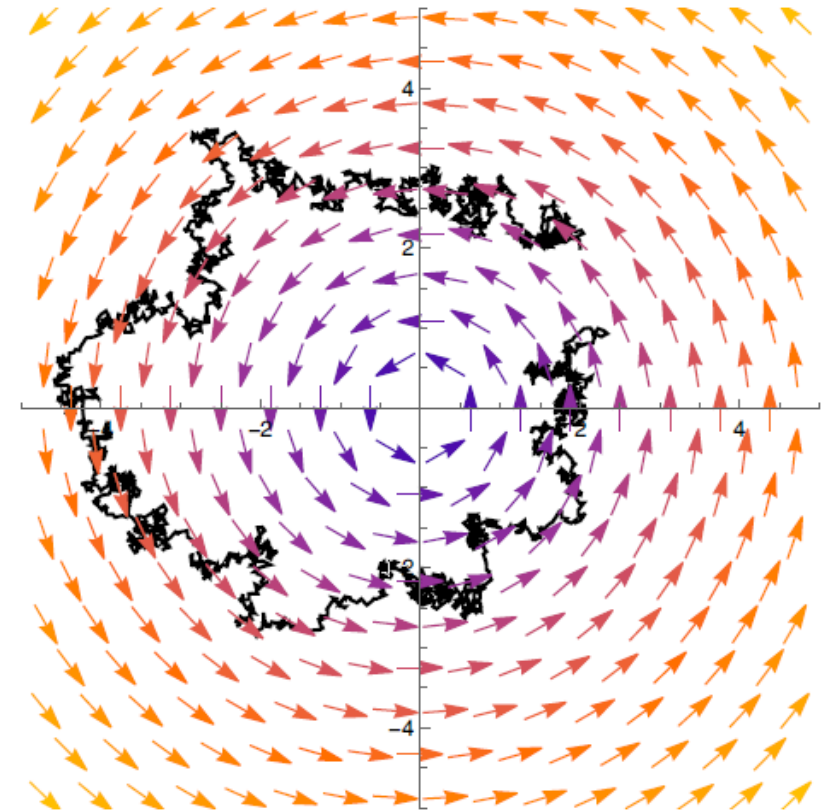
Розглянемо двовимірне стохастичне диференціальне рівняння

$$X_t^0 = x + W_t^1 - \int_0^t Y_s^0 ds,$$

$$Y_t^0 = y + W_t^2 + \int_0^t X_s^0 ds,$$

що описує, наприклад, швидкість зарядженої частинки в постійному магнітному полі за умови впливу зовнішнього стохастичного електричного поля (W_1, W_2) .

Напрямок обертання частинки є додатним.



Приклад (продовження)

Будемо додавати до моделі мембрани, розташовані на рівній відстані $\alpha_k^\varepsilon = k\varepsilon$, так що $\rho(x)=1$. У деякій великій кулі навколо початку координат задамо специфічні функції, що визначають проникність мембран і кут

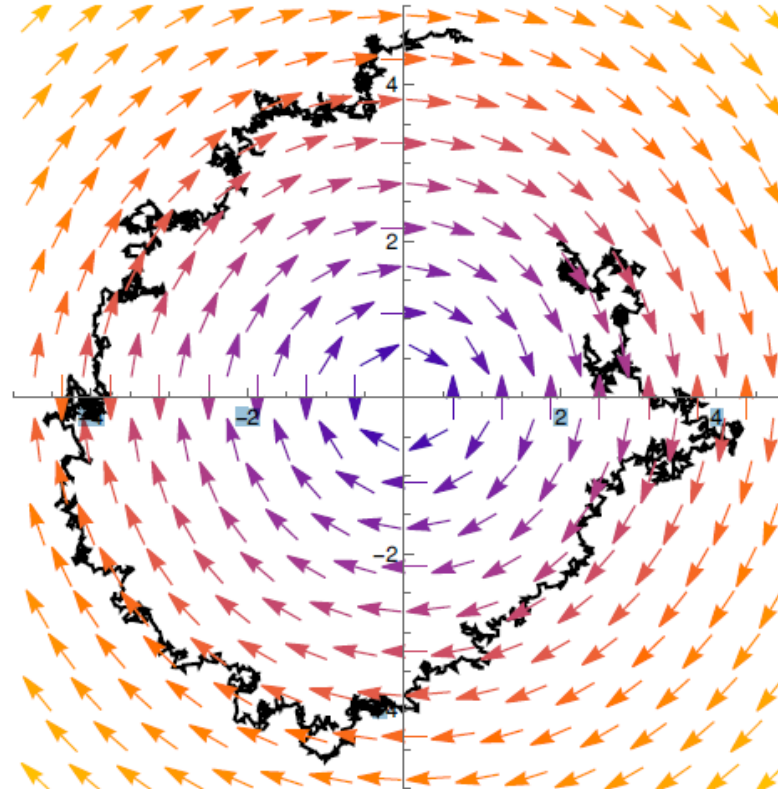
$$\beta(x, y) = \frac{2y^3}{\gamma + y^2}, \quad \theta(x, y) = -\frac{2x^3 y}{(\gamma^2 + x^2)(\gamma + y^2)}, \quad \gamma = 10^{-2}.$$

Тоді за доведеним результатом граничний процес має додатковий перенос, спричинений наявністю мембран

$$X_t = x + W_t^1 - \int_0^t Y_s \, ds + \int_0^t \frac{2Y_s^3}{\gamma + Y_s^2} \, ds,$$
$$Y_t = y + W_t^2 + \int_0^t X_s \, ds - \int_0^t \frac{2X_s^3 Y_s^4}{(\gamma^2 + X_s^2)(\gamma + Y_s^2)^2} \, ds.$$

Приклад (продовження)

У великій кулі навколо початку координат новий перенос приблизно дорівнює $(Y, -X)$, тобто напрямок обертання усередненої частинки тепер є від'ємним.



Формальні результати

- За звітний період підготовлено статтю.
- Участь з доповіддю у *17th Colloquium Bachelier on Financial Mathematics and Stochastic Calculus, 13 to 18 January, 2025, Metabief, France.*
- Перебування як запрошений науковець у *Scuola Normale Superiore di Pisa (Italy).*

Дякую!