НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ГЕОФІЗИКИ ім. С.І. Субботіна

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

МИКУЛЯК СЕРГІЙ ВАСИЛЬОВИЧ

Прим. №____

УДК 550.34+539.3+536

ДИСЕРТАЦІЯ

ЗАКОНОМІРНОСТІ ДИНАМІКИ СТРУКТУРОВАНИХ ГЕОСЕРЕДОВИЩ: ТЕОРІЯ, МОДЕЛІ, ЕКСПЕРИМЕНТ

04.00.22 – ГЕОФІЗИКА
103 – НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____________ С.В.Микуляк

Київ-2019

АННОТАЦІЯ

Микуляк С.В. Закономірності динаміки структурованих геосередовищ: теорія, моделі, експеримент. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 04.00.22 – геофізика (10–природничі науки). – Інститут геофізики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню динаміки структурованих геосередовищ з урахуванням їх дискретної та ієрархічної будови. Геосередовища, про які йдеться в роботі, включають широкий клас природних дискретних масивів гірських порід: від масивів гранульованих порід, таких як пісок, до суттєво неоднорідних і фрагментованих областей, якими є сейсмоактивні зони. Дослідження здійснюються в рамках підходу, в якому геосередовище трактується як термодинамічно відкрита складна дискретна система з ієрархічною будовою та нелінійною і дисипативною взаємодією між структурними елементами. Для вивчення динаміки структурованих середовищ використовуються дискретні моделі, оскільки континуальні моделі не здатні відтворити всю різноманітність динамічної поведінки таких середовищ. Крім того, для ієрархічного середовища неможливо здійснити осереднення при переході до континуального опису через відсутність малого параметра.

Для виявлення характерних особливостей хвильових процесів у дискретних середовищах розглядається гранульоване середовище, утворене масивом елементів (гранул) сферичної форми з нелінійним законом взаємодії (закон Герца) та тертям. За допомогою числового методу дискретних елементів аналізуються властивості хвильових полів, що виникають у такому модельному середовищі при різних способах упаковки та різних розмірах гранул. Ці дослідження продемонстрували, що хвильові процеси в дискретному середовищі мають принципові відмінності від аналогічних

процесів у однорідних твердих тілах та залежать від способу упаковки дискретних елементів. Числове моделювання показало, що у регулярно упакованій системі елементів, розташованих в каналі з жорсткими стінками, утворюється стійка хвильова структура, яка зберігає подібність упродовж усього процесу поширення хвилі. Незмінність числа Струхала для хвиль, що поширюються у системах з різними розмірами елементів, а також хвиль різної інтенсивності, дає змогу побудувати метод діагностування структури за параметрами стійкого хвильового утворення на фронті: груповою швидкістю і характерними частотами в спектрі такого утворення.

Моделювання процесу поширення хвиль у шарі гранульованого середовища зі сферичних гранул, розмір яких розподілений за законом Гаусса, виявило існування вихрових хвильових структур, параметри яких залежать від розміру гранул і товщини шару. За допомогою кореляційного аналізу визначено положення, момент виникнення та тривалість існування хвильових структур. У результаті розрахунків з’ясувалося, що хвильові структури не утворюються за відсутності тертя між гранулами, сили тяжіння та у випадку попереднього навантаження. Натомість поведінка збурень у гранульованому середовищі з несферичними гранулами характеризується сильним згасанням хвилі, відсутністю хвильових структур, а також суттєвою чутливістю до початкового напруженого стану.

Характерними особливостями динамічних діаграм деформування широкого класу структурованих геоматеріалів є нелінійність, гістерезис, дилатансія, а також залежність від швидкості деформування. Ці некласичні властивості динамічного деформування пов’язують зі структурною організацією даних матеріалів та процесами, що відбуваються на рівні елементів структури: кристалів, зерен, гранул, тощо.

Проведено комп’ютерні розрахунки двовимірного процесу динамічного деформування гранульованого середовища, утвореного зі сферичних дискретних елементів однакового розміру та сферичних елементів трьох розмірів. Розглядалися різні види взаємодії елементів: пружна, пружнов’язка та пружно-пластична. У всіх випадках діаграми деформування є нелінійними, мають гістерезисний характер та залежать від швидкості деформування та щільності упаковки, тобто всі ті властивості, які характерні для природних матеріалів. Для пружнов’язкої моделі отримано, що нерівноважність взаємодії між структурними елементами середовища призводить до збільшення нерівноважності всього середовища та зростання дисипативних властивостей. При збільшенні тривалості дії імпульсного навантаження, тобто при зменшенні швидкостей деформування, збільшується кривизна діаграми деформування, а залишкова деформація залишається практично незмінною. У випадку пластичної взаємодії між структурними елементами зменшення порогу пластичності зумовлює збільшення нерівноважності середовища та зростання його дисипативних властивостей.

Для середовища, утвореного елементами однакового розміру, спостерігається підвищена деформівність у порівнянні з дисперсним середовищем. Це пов’язано з тим, що елементи групуються в кластери і деформування відбувається як самих елементів так і кластерів, тобто має місце ефект колективної поведінки структурних елементів.

Експериментальне дослідження процесів динамічного деформування гранульованого середовища зі сферичними елементами однакового радіуса під дією імпульсного навантаження показало, що діаграми деформування залежать від розмірів структурних елементів та від характеру їх взаємодії. Збільшення розміру елементів спричинює значне підвищення значень залишкових деформацій, а зміна характеру взаємодії шляхом додавання в середовище флюїду впливає на випуклість діаграми у фазі навантаження.

Розроблено нову експериментальну методику для визначення таких мікрохарактеристик гранульованого середовища як сили, що діють на окремі структурні елементи на дні гранульованого зразка при імпульсному навантаженні. В результаті проведених експериментів отримано експоненціально згасаючі розподіли максимальних значень сил, з якими гранули діють на дно циліндра в діапазоні великих сил. Крім того, комп'ютерне моделювання демонструє те, що експоненційний розподіл сил має місце по всьому зразку і таким чином підтверджує наявність кореляцій сил взаємодії структурних елементів у процесі його динамічного навантаження. Отримані в розрахунках часові залежності координаційного числа, параметра орієнтаційного порядку, радіусу кореляції та розподілу сил чітко демонструють нерівноважний характер процесу деформування в гранульованому середовищі при імпульсному навантаженні.

Для вивчення динаміки ієрархічно організованих дискретних середовищ розроблена модель системи вкладених ангармонічних осциляторів, рівняння руху яких отримано в рамках гамільтонового формалізму. Аналіз перетинів Пуанкаре системи рівнянь для моделі з трьома ієрархічними рівнями з ідентичними на кожному рівні осциляторами та з умовою, що вони рухаються синхронно, виявив локалізовані квазіперіодичні та хаотичні траєкторії. Крім того, спектри потужності для трирівневої моделі має локальні максимуми, що характеризують часові масштаби з сильною кореляцією. Використовуючи аналіз Фур'є компонент розв'язку на різних ієрархічних рівнях системи, встановлено залежність процесу переносу енергії від структурного параметра, пов'язаного зі співвідношенням мас осциляторів на сусідніх рівнях.

Проведено також аналіз коливних процесів у багаторівневій системі. Показано, що існує критичне значення структурного параметра, яке відповідає формуванню співмірних коливань на першому та останньому ієрархічних рівнях. Спектр найнижчого рівня розподіляється в широкій частотній області і домінуючі частоти можуть відрізнятися в залежності від структурного параметра.

Вплив дисипації на формування коливних процесів у ієрархічній системі вивчався в рамках трирівневої моделі, коли найвищий структурний рівень зазнає дії гармонічної сили. Така задача зводиться до суттєво нелінійної багатомірної динамічної системи, методів аналізу якої вкрай мало.

Тому було вдосконалено метод особливих точок, результати якого були перевірені за допомогою методу Гальоркіна та числовим інтегруванням. У результаті досліджень отримано амплітудно-частотні криві, які характеризують резонансні та нелінійні явища у системі. Зокрема, було виявлено зміщення резонансних частот в залежності від міри нелінійності. Також спостерігаються деформації скелетних кривих при зміні міри нелінійності та гістерезисні явища. Аналіз амплітудно-частотних кривих показав, що ієрархічна структура веде себе як підсилювач сигналу, яким збуджується найвищий рівень ієрархії. Це дозволяє зрозуміти механізм накопичення та перерозподілу пружної енергії у складних геосистемах при сейсмічних подіях.

Розроблено модель землетрусів, яка базується на двох фундаментальних принципах: ієрархічній структурі сейсмоактивних областей та концепції самоорганізованої критичності. Сейсмічна область моделюється ієрархічною системою структурних елементів – блоків кубічної форми, які розташовуються у випадковому порядку. В систему ззовні підводиться енергія, яка накопичується в блоках нерівномірно. Якщо енергія блоку досягає порогового значення, вона вивільняється і передається найближчим сусідам. Частина цієї енергії дисипує, а інша випромінюється у навколишнє середовище. Використання енергії у якості змінної спростило застосування схеми клітинних автоматів для формалізації процесу перерозподілу енергії між блоками.

Модель відтворює всі основні емпіричні властивості сейсмічних процесів: скейлінгове співвідношення частота-енергія (закон Гутенберга-Ріхтера), узагальнений закон Оморі для часу згасання афтершоків, закон про продуктивність афтершоків, закон Бетта про середнє значення відносної різниці у магнітуді між основним землетрусом і його найбільшим афтершоком, фрактальні розподіли гіпоцентрів (епіцентрів) зі степеневими залежностями кількості подій від відстані між гіпоцентрами (епіцентрами) і, нарешті, γ-розподіл для часу очікування. У моделі порогова енергія залежить від розміру блоку та розподіляється відповідно до закону Гаусса. Після сильних землетрусів вони перерозподіляються при зменшенні середніх значень. Зміна порогової енергії призводить до запуску серії афтершоків.

Перевага цієї моделі полягає в тому, що немає необхідності вводити допоміжну неоднорідність для отримання просторового фрактального розподілу землетрусів, як це робиться в інших моделях, адже запропонована модель вже враховує природну ієрархічну структуру сейсмічної зони. Більше того, опис поведінки сейсмічної зони після сильного землетрусу фізично обґрунтовується.

Для вивчення акустичної емісії, яка має місце в процесі зсувного деформування гранульованого середовища, розроблена методика експериментальних досліджень зсувного деформування масиву гранул кубічної форми, в тому числі при дії зовнішніх періодичних та неперіодичних збурень. На основі отриманих в експериментах записах акустичних збурень, які випромінює гранульоване середовище в процесі деформування, побудувано розподіл цих збурень за енергією (закон Гутенберга-Ріхтера). Виявилось, що показник степеня знаходиться в межах, які характерні для землетрусів. Крім того, для великих акустичних збурень спостерігаються форшоки і афтершоки. Афтершоки затухають за степеневим законом, законом Оморі, як для сейсмічного процесу, з показником близьким до 1.

Опромінювання гранульованого середовища періодичними хвилями з різними частотами в процесі його деформування показало, що слабкі збурення впливають на цей процес і максимальний ефект спостерігається при частоті 500 Гц. Розроблено та реалізовано алгоритм для управління процесами зсувної деформації гранульованого середовища за допомогою зовнішніх збурень, який забезпечує уникнення великих напружень.

Динаміка зсувного деформування гранульованого середовища, утвореного кубічними елементами, досліджувалась за допомогою методу дискретних елементів. Розглядалась задача про розподіл різних видів енергії та міжгранульних сил під дією сталого зсувного навантаження та при сталій швидкості. Отримані залежності видів енергії масиву блоків від часу мають стохастичний характер, а їхні спектри є степеневими залежностями, за виключенням пружних енергій. Степеневий характер спектрів свідчить про відсутність виділених частот і про масштабну інваріантність процесу, що є характерним для систем, які перебувають у критичному стані.

Для стрибків кінетичної енергії поршня, які можна розглядати як збурення, що передаються від гранульованого масиву до зовнішнього середовища, побудовано розподіли енергії та часову залежність кількості збурень до та після великих збурень. Аналіз цих залежностей вказує на те, що розподіли енергії збурень мають степеневий характер, а показник степеня близький до показника степеня у законі Гутенберга-Ріхтера для землетрусів. Щодо форшоків та афтершоків, то їхнє існування залежить від швидкості деформування та розмірів структурних елементів: при великих швидкостях і малих розмірах вони відсутні. Наявні афтершоки затухають з показником степеня близьким до 1, тобто за законом Оморі. Також виявлено подібність розподілів та кореляційних функцій флуктуацій швидкостей у модельному середовищі і у сейсмоактивному регіоні в Каліфорнії, який включає в себе розлом Сан Андреас. Отже, враховуючи статистичну схожість зсувних та сейсмічних процесів, ці результати поглиблюють розуміння природних сейсмічних процесів та розширюють можливості прогнозування та контрольованого впливу на них.

Ключові слова: геосередовище, гранульоване середовище, ієрархічні структури, самоорганізована критичність, землетруси, форшоки, афтершоки, ангармонічні осцилятори, метод дискретних елементів.

ANNOTATION

Mykulyak S.V. The regularities of the dynamics of structured geomedia: theory, model, experiment.– Qualifying scientific work on the rights of manuscript. Thesis for a doctor's degree in physical and mathematical sciences, specialty 04.00.22 – geophysics (10 natural sciences). – Institute of Geophysics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to studying the properties of dynamics of geomedia taking into account their discrete and hierarchical structure. The geomedia considered in the thesis cover a broad class of natural discrete rocks massifs: from granular rock massifs e.g. sand to substantially heterogeneous and fragmented areas such as seismically active zones. The research is carried out within the framework of the approach considering the geomedium as a thermodynamically open complex system consisted of hierarchically embedded discrete elements with nonlinear and dissipative interactions. Discrete models are used to study the dynamics of structured media, since continuum models are not able to reproduce the entire variety of dynamic behavior of such media. In addition, for a hierarchical medium, it is not possible to make averaging during the transition to the continual description due to the lack of a small parameter.

To identify the characteristic features of wave processes in discrete media, a granular medium formed by the massif of spherical elements (grains) with the nonlinear interaction law (Hertz law) and friction is considered. Using the numerical discrete element method, the properties of wave fields occurring in such model media with different packings and different discrete grain sizes are studied. The studies testified that wave processes in discrete media fundamentally differ from similar processes in homogeneous solids and the wave fields depend on the type of packing the elements. The numerical simulation shown that, in a regularly

packed system located in a channel with rigid walls, the wave structure propagating in stable self-similar manner is formed. The immutability of the Strouhal number for waves propagating in systems with different element sizes, as well as waves of varying intensity, makes it possible to construct the method for diagnostics of a structure using the parameters of stable wave formation at the front: group velocity and characteristic frequencies in the spectrum of a certain formation.

The simulation of the wave propagation in a layer of the granular medium with spherical granes whose sizes are distributed by the Gauss law discovered a periodic wave structure creation. Parameters of these structures depend on grain sizes and layer height. The location and time of the existence of wave structures were determined via the correlation analysis. The simulations uncovered the absence of periodic structures when there is no gravity, friction between particles, and the layer is prestressed. Dealing with granular medium consisted of non-spherical grains it is revealed that such medium is characterized by strong wave attenuation, the absence of wave structures formation, and essential sensitivity to the initial stressed state.

According to huge experimental data, the dynamic deformation diagrams for a wide class of structured geomaterials exhibit the nonlinearity, hysteresis, dilatation, as well as dependence on the rate of deformation. These non-classical features of dynamic deformation caused by the structural organization of these materials and with some processes occurring at the level of structure elements: crystals, grains, granules, etc.

The simulations of two-dimensional dynamic deformation of the granular media formed by identical spherical particles and spherical particles with three sizes were carried out. The elastic, elastic-viscous and elastic-plastic types of interaction between particles were incorporated. In all cases, the deformation diagrams are nonlinear. They have a hysteretic nature and the form of the diagrams depends on the rate of deformation and on the density of the package. All these properties are characteristic of natural materials. For the elastic-viscous model it was found that the nonequilibrium interactions between the structural elements lead to increasing the nonequilibrity of the entire medium and the growth of dissipative properties. It was observed also that increasing the duration of the pulsed load, namely, when the strain rate decreases, provides the increase in curvature of the deformation diagram, whereas the residual deformation remains practically unchanged. In the case of plastic interaction between structural elements, the decrease of the threshold of plasticity leads to the increasing of the medium nonequilibrity and the growth of its dissipative properties.

The deformability for the medium formed by particles of fixed size is larger than for the dispersive one. This is due to the fact that the particles are grouped into clusters and then not only elements but also clusters are deformed. Here the effect of particle collective behavior is encountered.

The experimental studies of the dynamic deformations of the granular medium, formed by identical spherical elements and subjected to the pulse loading, showed that the deformation diagrams for this medium depend on the size of structural elements and the nature of their interaction. Increasing of the sizes of structural elements leads to a significant increase in the values of residual deformations. The change in the nature of the interaction of particles with the fluid addition changes the convexity of the diagram in the load phase.

The novel experimental technique for the study of such microcharacteristics of the granular medium as forces acting on individual structural elements at the bottom of the granular sample under dynamic load is developed. As a result of experiments, the distributions showing the exponentially decaying maximum values of the forces with which the spherical grains act on the cylinder bottom in the range of large forces are obtained. In addition, the computer simulation demonstrates that the exponential force distribution takes place throughout the sample and thus confirms the presence of correlations between grains forces in the process of dynamic loading of granular specimens. The time dependencies of the coordination number, the orientation order parameter, the correlation radius, and the distribution of forces obtained in the calculations clearly demonstrate the nonequilibrium nature of the deformation process in the granular medium under impulse loading.

To study the dynamics of hierarchically organized discrete media, the model of the system of embedded anharmonic oscillators is elaborated. The equation of motion is obtained within the Hamiltonian formalism. Using the Poincaré section technique, it is stated that the system of equations for the model having three hierarchical levels with oscillators identical on each level and under the condition that they move simultaneously possesses the localized quasiperiodic and chaotic trajectories. Moreover, from these studies it follows that the power spectrum for a three-level model has local maxima that characterize time scales with strong correlation. Using the Fourier analysis of the solution's components at different hierarchical levels of the system, the dependence of the energy transfer on the structural parameter associated with the mass oscillator ratio at neighboring levels is established.

The study of vibrating processes in the multilevel system is also carried out. It is shown that there exists a critical value of the structural parameter corresponding to the formation of comparative oscillations in the first and the last hierarchical levels. The spectrum of the lowest level is distributed in a wide frequency domain and the dominant frequencies vary depending on structural parameter.

The effect of dissipation on the formation of oscillation processes in the hierarchical system was studied within the framework of the three-level model, when the highest structural level is subjected to the action of harmonic force. Such problem is reduced to the substantially nonlinear, multidimensional dynamic system whose methods of analysis are extremely small. Therefore, the method of singular points was improved, the results of which were verified using the Galerkin method and numerical integration. As a result of the study, the amplitude-frequency curves that characterize the resonant and nonlinear phenomena in the system are obtained. In particular, the displacement of the resonance frequencies was detected, depending on the degree of nonlinearity. Also, there are deformations of backbone curves when changing the degree of nonlinearity as well as hysteresis phenomena. The analysis of amplitude-frequency curves showed that the hierarchical structure behaves as an amplifier of the signal applied to the highest level of the hierarchy. This allows to understand the mechanism of accumulation and redistribution of elastic energy in complex geosystems during seismic events.

The earthquake model is developed based on two fundamental principles: the hierarchical structure of seismically active regions and the concept of self-organized criticality. The seismic region is modeled by the hierarchical system of structure elements – cubic blocks arranged in a random order. Energy enters the system from outside and accumulates unevenly in the blocks. When the energy of the block reaches the threshold value, it is released and transmitted to its closest neighbors. Part of this energy dissipates and another one is radiated into the environment. The use of energy as a variable simplified the implementation of the cellular automata scheme to formalize the process of redistributing energy between blocks.

The model reproduces the basic empirical properties of seismic processes: the frequency-energy scaling relation (the Gutenberg-Richter law), the generalized Omori law for temporal decay of aftershocks, the aftershock productivity law, Båth's law for the mean value of the relative difference in magnitude between the major earthquake and its largest aftershock, the fractal distributions of hypocenters (epicenters) with power-law dependencies of the number of events on distances between hypocenters (epicenters), and, finally, the γ distribution for waiting times. In the model, the threshold energies depend on the block sizes and are distributed according to the Gauss law. After strong earthquakes they are redistributed at the decreasing average values. The change of threshold energies leads to the triggering of aftershock series.

The advantage of this model is that there is no need to introduce auxiliary inhomogeneity to obtain a spatial fractal distribution of earthquakes. The model takes into account the natural hierarchical structure of a seismic area. Moreover, the description of the behavior of a seismic area after a strong earthquake is physically based.

The experimental method for studying the shear of the granular massif consisting of cubic grains, as well as the behavior of the massif during external periodic and nonperiodic perturbations has been developed to study the acoustic emission arising from the shear deformation of the granular medium. The acoustic perturbations detected in the experiments with the granular medium shear made it possible to build distribution of the perturbations on energy (Gutenberg-Richter's law). It turned out that the exponent is within the limits that are characteristic of earthquakes. Moreover, for large acoustic disturbances the foreshocks and aftershocks are observed as well. It is shown that aftershocks attenuate in accordance with the power law having exponent close to 1, which coincides with the exponent in Omori’s law for a seismic process.

It is found out that the action by weak periodic waves with distinct frequencies on the granular medium under shear deformation, affect the medium’s state. There exists the frequency (500 Hz) when maximal effect of periodic stimulus is manifested. We have developed the algorithm for controlling the processes of shear deformation of granular medium by means of external perturbations, which provides the avoiding of large stresses.

The dynamics of shear deformation of the granular medium formed by the cubic elements was investigated using the discrete element method. The problem of the distribution of different types of energy and intergranular forces under the action of the constant load force and at constant speed was considered. The obtained dependences of the energy types of the granular massif on time are stochastic and their spectra are power dependencies, except for elastic energies. The power law of the spectra shows the absence of selected frequencies and the large-scale invariance of the process, which is characteristic for systems in critical state.

For jumps of kinetic energy of the piston, which can be considered as perturbations transmitted from the granular massif to the external environment, energy distribution and temporal dependence of the number of disturbances before and after the main shock are built. The analysis indicates that the distributions of energy disturbances are of a power degree, and the exponent is close to the exponent in the Gutenberg-Richter law for earthquakes. As for foreshocks and aftershocks, their presence depends on the rate of deformation and the size of the structure elements: at high speeds and small sizes they are absent. Available aftershocks attenuate with the exponent close to 1, namely, according to the Omori's law. Similarities have also been found between the distribution of velocity fluctuations and the correlation functions in the model medium and in the seismic region in California, which includes the San Andreas fault. Consequently, taking into account the statistical similarity of shear and seismic processes, these results open the prospect of a better understanding of natural seismic processes and possibilities of forecasting and controlled influence on them.

Key words: geomedium, granular medium, hierarchical structures, self-organized criticality, earthquakes, forshocks, aftershocks, anharmonic oscillators, discrete element method.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

***Статті в наукових виданнях*:**

1. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Моделювання динаміки дискретного середовища. Доповіді НАН України. 7, 113-116 (1999).
2. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості нелінійних збурень, що виникають в блокових середовищах різної структури під дією імпульсних навантажень. Доповіді НАН України. 5, 138-142 (2002).

3. **Микуляк, С.В.**, Даниленко, В.А.: Особливості поширення нелінійних хвиль в структурованих середовищах та використання їх для оцінки параметрів структури. Геофізичний журнал. **26**(3), 70-76 (2004).
4. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**, Скуратівський С.І.: Побудова моделі дискретного ієрархічного геофізичного середовища з урахуванням нелінійної взаємодії між елементами структури. Доповіді НАН України. 3, 110-116 (2006).
5. **Микуляк, С.В.**: Построение одномерных дискретных иерархических моделей геофизической среды и их исследование. Физическая мезомеханика. **9**(5), 63-67 (2006).
6. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості утворення та поширення солітонів в пружно-пластичному структурованому середовищі. Доповіді НАН України. 12, 102-105 (2006).
7. **Микуляк, С.В.**: Моделирование процессов динамического деформирования дискретной среды под воздействием импульсной нагрузки. Физическая мезомеханика **10**(6), 69-74 (2007).
8. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп'ютерне моделювання процесів динамічного деформування структурованого геофізичного середовища. Доповіді НАН України. 2, 123-129 (2008).
9. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп'ютерне моделювання процесів деформування структурованого геофізичного середовища з пружнов'язкою взаємодією між елементами структури. Доповіді НАН України. 6, 113-118 (2009).
10. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп'ютерне моделювання двовимірного процесу деформування структурованого геофізичного середовища з пружнопластичною взаємодією між елементами структури. Доповіді НАН України. 8, 96-100 (2009).
11. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Моделювання процесів динамічного деформування структурованого геофізичного середовища з

пружнопластичною взаємодією елементів структури. Геофізичний журнал. **32**(3), 60-65 (2010).

12. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Розподіл сил у структурованому середовищі в полі сили тяжіння. Доповіді НАН України. 11, 96-99 (2011).
13. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості поширення нелінійних хвиль у сипкому середовищі. Доповіді НАН України. 2. 95-98 (2012).
14. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**, Поляковський В.О.: Експериментальне дослідження динамічного деформування структурованого геофізичного середовища. Доповіді НАН України. 10, 109-115 (2013).
15. **Mykulyak, S.V.**: Features of nonlinear wave propagation in a layer of granular medium. Phys. Mesomech. **17**(2) 157-162 (2014).
16. **Микуляк, С.В.**, Поляковський В.О.: Експериментальне дослідження динамічного деформування структурованого середовища під дією імпульсного навантаження. Геофізичний журнал. **36**(2), 120-126 (2014).
17. Danylenko,V.A., **Mykulyak, S.V.**, Skurativskyi, S.I.: Energy redistribution in hierarchical systems of oscillators. Eur. Phys. J. B. **88**, 143 (2015).
18. Danylenko,V.A., **Mykulyak, S.V.**, Polyakovskyi, V.O., Kulich, V.V., Oleynik, I.I.: Force distribution in a granular medium under dynamic loading. Phys. Rev. E. 96, 012906 (2017).
19. **Mykulyak, S.V.**, Skurativska, I.A., Skurativskyi, S.I.: Forced nonlinear vibrations in hierarchically constructed media. Intern. J. Non-Lin. Mech. 98, 51–57 (2017).
20. **Mykulyak, S.V.**: Hierarchical block model for earthquakes. Phys. Rev. E. **97**, 062130 (2018).
21. **Mykulyak, S.**, Kulich, V., Skurativskyi, S.: Simulation of shear motion of angular grains massif via the discrete element method. In: Hu, Z., Petoukhov, S., Dychka, I., He, M. (eds.) Advances in Intelligent Systems and Computing, pp. 74–81. Springer, (2019).

22. **Микуляк С.В.**: Блоково-ієрархічна модель сейсмічних процесів. Доповіді НАН України. 11, 55-62 (2018).

23. **Mykulyak S.V.**, Polyakovskyi V.O., Skurativskyi S.I.: Statistical properties of shear deformation of model block media and analogies with natural seismic processes. arXiv: submit/2444622 [physics.geo-ph] 24 Oct 2018.

Тези доповідей і матеріали конференцій:

1. **Mykulyak, S.V.**, Danylenko, V.A., Vakhnenko, V.O.: The wave spectral evolution in a discrete medium with nonlinearity. Proceedings of Tenth International Congress on Sound and Vibration, vol.6, pp.3573-3579. Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003.
2. **Микуляк, С.В.**: Компьютерное моделирование динамического деформирования гранулированной среды под действием импульсной нагрузки. В: Физика импульсных разрядов в конденсированных средах, Материалы XII Международной научной школы семинара, с.177. Николаев, 22 –26 августа 2005.
3. **Микуляк, С.В.**: Компьютерное моделирование процессов динамического деформирования структурированных геоматериалов. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XVII Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича, с.с.195-197. ИИПТ НАН Украины, Николаев, 21-25 августа 2007.
4. **Микуляк, С.В.**: Зависимость деформационных свойств структурированных геоматериалов от характера взаимодействия между элементами структуры. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XVIII Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича, с.214-216. Алушта, 17-23 сентября 2007.

5. **Микуляк, С.В.**: Распространение волн сжатия в структурированной среде. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XIX Международной научной школы им.акад. С.А. Христиановича, с.228. Алушта, 21-27 сентября 2009.
6. **Mykulyak, S.V.**: Computer modeling of nonlinear dynamic processes in structured geophysical media. In: Geodynamical Phenomena: From Observations and Experiments to Theory and Modelling. Proceedings of International Conference, p.p.115-117. Kiev, September 20-24 2010.
7. **Микуляк, С.В.**: Нелинейные волны в сыпучей среде. Компьютерное моделирование. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XXI Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича, с.с.252-254. Алушта, 19-25 сентября 2011.
8. **Микуляк, С.В.**, Поляковський, В.О.: Експериментальне дослідження поведінки гранульованого середовища під дією імпульсного навантаження. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XXII Международной научной школы им.акад. С.А. Христиановича, с.с.240-242. Алушта, 21-27 сентября 2012.
9. **Mykulyak S.V**., Skurativskyi S.I.: Peculiarities of dynamical phenomena in hierarchical systems of oscillators. In: Nonlinear analysis and applications. Proceedings of 3th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery S. Melnik, p.43. Kyiv, Ukraine, 1–3 April 2015.
10. **Mykulyak, S.**, Skurativskyi, S.: Nonlinear dynamics of the system of hierarchically coupled oscillators with power law interactions. In: Book of Abstracts. International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPhA-2017), c.c.42-43. Cherkasy, Ukraine, 17-19 October 2017.

11. **Микуляк, С.В.**, Куліч, В.В.: Статистичні властивості процесу зсувного деформування гранульованого середовища. В: Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Матеріали Всеукраїнської наукової конференції. с.с. 22-23. Ворохта, 27лютого-2 березня (2018).
12. Kulich, V., **Mykulyak, S.**: Simulation of shear deformation in granular massif. In: Nonlinear analysis and applications. Proceedings of 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery S. Melnik, p.43. Kyiv, Ukraine, 4–6 April 2018.

Монографії:

1. Нагорний В.П., Микуляк С.В., Венгрович Д.Б., Скуратівський С.І., Бєлінський І.В., Денисюк, І.І., Куліч, В.В., Шеремет, Г.П. Динамічні процеси в геофізичних середовищах: теорія, експеримент, технології. НАН України, Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна, Київ (2016).

ЗМІСТ

ВСТУП..24
РОЗДІЛ 1. ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В СТРУКТУРОВАНИХ СЕРЕДОВИЩАХ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ)..38
1.1. Моделі геосередовищ як відкритих блоково-ієрархічних систем........38
1.2. Концепція самоорганізованої критичності..43
1.3. Особливості динамічного та статичного деформування гранульованих середовищ..47
1.4. Математичні моделі гранульованих середовищ................................ 50
1.5. Комп’ютерне моделювання динамічних процесів у гранульованих середовищах..53
РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ ПОШИРЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ У ДИСКРЕТНИХ СЕРЕДОВИЩАХ..60
2.1. Поширення нелінійних хвиль у двовимірному шарі гранульованого середовища з регулярною, квазірегулярною та хаотичною упаковками елементів..60
2.2. Спектральна еволюція хвилі в дискретному середовищі з нелінійністю……………………………………………………………..73
2.3. Особливості утворення та поширення солітоноподібних хвиль у дискретному середовищі з пружно-пластичною взаємодією між елементами структури...76
2.4. Особливості поширення нелінійних хвиль у двовимірному шарі гранульованого середовища в полі сили тяжіння................................81
2.4.1. Нелінійні хвилі в шарі гранульованого середовища...................81
2.4.2. Хвилі у напруженому гранульованому середовищі...................85
2.4.3. Хвилі у середовищі з несферичними гранулами........................86
2.5. Хвильові структури у тривимірному шарі гранульованого середовища в полі сили тяжіння..89

2.6. Висновки..104

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СЕРЕДОВИЩ..106

3.1. Комп’ютерне моделювання процесів динамічного деформування двовимірних дискретних масивів з різними видами взаємодії між структурними елементами..106

3.1.1. Пружна взаємодія...106

3.1.2. Пружнов’язка модель взаємодії...117

3.1.3. Пружно-пластична взаємодія...123

3.2. Експериментальне дослідження динамічного деформування гранульованого середовища під дією імпульсного навантаження.....127

3.3. Розподіл міжгранульних сил у полі сили тяжіння..............................136

3.4. Розподіл сил та їх кореляційні властивості у гранульованому середовищі під дією імпульсного навантаження...............................139

3.5. Висновки..154

РОЗДІЛ 4. ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ІЄРАРХІЧНИХ СТРУКТУРОВАНИХ ГЕОСЕРЕДОВИЩАХ...158

4.1. Одновимірна дискретна модель ієрархічно структурованого середовища...159

4.2. Модель геосередовища як система ієрархічно вкладених осциляторів..163

4.2.1. Побудова математичної моделі ієрархічно вкладених осциляторів..164

4.2.2. Дослідження моделі з трьома ієрархічними рівнями...............167

4.2.3. Дослідження моделі з багатьма ієрархічними рівнями............174

4.3. Нелінійні коливання в ієрархічному середовищі під дією зовнішнього періодичного збурення..176

4.3.1. Математична модель ієрархічної системи з дисипацією..........177

4.3.2. Дослідження вимушених коливань у тришарових ієрархічних середовищах методом особливих точок..179
4.3.3. Застосування методу Гальоркіна для нелінійної моделі...........185
4.4. Ієрархічна блокова модель сейсмічного процесу...............................191
4.5. Висновки...206

РОЗДІЛ 5. ЕКПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗСУВНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ГРАНУЛЬОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА........................ 209

5.1. Експериментальний стенд для дослідження зсувного деформування гранульованого масиву, утвореного гранулами кубічної форми......209
5.2. Результати вимірювань реакції гранульованого середовища на зсувне деформування...216
5.3. Вплив малих збурень на зсувне деформування..................................221
5.4. Висновки...225

РОЗДІЛ 6. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗСУВНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ГРАНУЛЬОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА....................... 227

6.1. Побудова числової моделі для розрахунку динаміки масиву кубічних елементів...228
6.2. Зсувне деформування гранульованого середовища при дії постійної зсувної сили...233
6.3. Зсув гранульованого середовища за постійної швидкості деформування...242
6.4. Флуктуації швидкостей елементів у процесі зсувного деформування...248
6.5. Висновки...253

ВИСНОВКИ...255
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……………………………………...261
Додаток 1...297
Додаток 2...299

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Гірські породи, що утворюють літосферу надзвичайно різноманітні, але є одна важлива характеристика, властива чи не всім гірським породам – дискретність. Дискретність спостерігається на всіх масштабних рівнях: від зерен в гірських породах, розміри яких складають міліметри або їх частки, до кусків гірської породи, які можна спостерігати на кар'єрах чи оголених скелях з сантиметровими чи метровими розмірами, до тектонічних блоків, розміри яких складають десятки та сотні кілометрів і до найбільших структурних елементів Земної кори – тектонічних плит, які простягаються на тисячі або навіть на десятки тисяч кілометрів [1-8]. Особливо яскраво проявляє себе дискретна структурованість на межах тектонічних плит, де гірська порода руйнувалася землетрусами впродовж тривалого часу [9-16].

У більшості теоретичних досліджень геосередовища моделюються в рамках континуального підходу і значно рідше зосереджуються на дискретності геосередовищ. На необхідність враховувати дискретність геосередовищ звернули увагу Садовський, Болховітінов, Писаренко [2,3]. Ця необхідність зумовлена тим, що існує ряд явищ, які неможливо описати в рамках моделі суцільного середовища. Зокрема, не вдається адекватно описати сейсмічні процеси в сейсмоактивних зонах, які є суттєво неоднорідними середовищами з численними розломами і тріщинами. Іншим прикладом некласичної поведінки геосередовища, пов'язаним з його структурою, є існування природної акустичної емісії у свердловинах гірських порід [17, 18, 9]. Наявність домінантних частот у масивах гірських порід також пов'язана зі структурною будовою цих порід [17-21]. В експериментах з потужною 20 хвилинною вібродією силою 200 КН і частотою 12 Гц на земну поверхню поблизу свердловини [17] виявилось, що після припинення вібродії амплітуда мікросейсмічних коливань всередині свердловини продовжувала збільшуватись і досягала максимума через 7,5-10 хвилин, після чого відбувався плавний спад амплітуди до фонового значення за 15-20 хвилин. Таким чином середовище проявляло здатність на деякий час акумулювати енергію від зовнішнього джерела збурення. Варто зазначити, що в однорідному неструктурованому середовищі такі ефекти не спостерігаються.

На користь структурованої будови гірських масивів свідчить суттєва неоднорідність полів зміщень від потужних підземних вибухів як за абсолютною величиною, так і за напрямком. [22, 23]. Як показали результати вимірювань зміщень при підземних ядерних вибухах, проведених на полігоні у Семипалатинську, деформації на межах структурних елементів гірського масиву (блоків) на 2-3 порядки перевищують відповідні значення у самих блоках [22, 24]. Крім того, ефект від вибухової дії значно перевищує той, який мав би місце в однорідному середовищі, а саме: на відстанях, що перевищують розмір зони руйнування, утворюються суттєві тріщини, аномально великі зсуви, значні деформації рейок залізної дороги, а також аномальні за об’ємом викиди гірської породи у підземних виробках [9, 22, 23].

На сьогодні не існує універсальної математичної моделі, яка б описувала динамічну поведінку таких складних стуктурованих геосередовищ, тому створення моделей для адекватного опису їх динаміки є актуальною.

Для належного опису динаміки структурованих геосередовищ моделі повинні враховувати їх неоднорідність, дискретність, ієрархічність та той факт, що вони знаходяться у нерівноважному стані та є термодинамічно відкритими системами. Ці моделі мають відтворювати статистичні властивості таких складних динамічних природних процесів як землетруси, зсуви ґрунтів, селі, сходження сніжних лавин, тощо. Вони повинні давати краще розуміння цих процесів з тим, щоб здійснювати заходи захисту та мати можливість впливати на них.

Також важливим завданням дослідження ієрархічно структурованих геосередовищ є вивчення реакції таких систем на зовнішні збурення та виявлення закономірностей їх динамічної поведінки. Розуміння процесів перерозподілу енергії у ієрархічних системах важливе для сейсмічних досліджень в областях зі складною структурою та для забезпечення сейсмічної безпеки складних промислових та цивільних об’єктів.

Виявлення закономірностей хвильових процесів у структурованих геосередовищах, пов’язаних з процесами самоорганізації, та дослідження деформаційних властивостей структурованих геосередовищ на основі використання дискретних моделей також є вкрай необхідним для доповнення та контролю континуального опису дискретного середовища, не втративши при цьому можливість відтворити всю різноманітність динамічної поведінки такого середовища.

Мета і завдання дослідження відповідно до предмета та об’єкта дослідження. Метою роботи є розробка моделей неоднорідних геосередовищ з урахуванням їх дискретної і ієрархічної будови та вивчення закономірностей динаміки таких середовищ.

Для досягнення цієї мети необхідно було вирішити такі *задачі*:

- Дослідити закономірності поширення хвиль у дискретних середовищах з нелінійною взаємодією дискретних елементів та виявити явища самоорганізації.
- Вивчити вплив характеру взаємодії між структурними елементами, а також їх розмірів та форми на деформаційні властивості структурованих середовищ.
- Експериментально та теоретично проаналізувати еволюцію мікропараметрів дискретного середовища в процесі динамічного деформування.
- Розробити математичну модель динаміки ієрархічного дискретного середовища та теоретично дослідити її властивості щодо відгуку ієрархічного середовища на зовнішні збурення, особливості обміну

енергії між різними рівнями ієрархії, а також існування різних типів розв’язків моделі.

- Розробити модель для опису сейсмічних процесів у сейсмоактивній зоні. Дослідити властивості даної моделі щодо відтворення нею емпіричних закономірностей, отриманих для реальних сейсмічних процесів.
- Експериментально та теоретично з’ясувати подібність зсувного деформування гранульованого середовища та процесів, що мають місце у сейсмоактивних зонах з метою можливості впливу на природні сейсмічні процеси.

Об’єктом дослідження є структуроване геосередовище.

Предмет дослідження – динамічні процеси у структурованих ієрархічних середовищах.

Методи дослідження та достовірність і обґрунтованість отриманих результатів і висновків:

- Числовий метод дискретних елементів, який використовувався для моделювання динаміки структурованих дискретних середовищ. Перевага цього методу полягає у тому, що він дозволяє описувати індивідуальну поведінку великої кількості структурних елементів. Достовірність результатів забезпечувалася тестуванням програм, написаних на основі даного методу, порівнянням отриманих розв’язків систем нелінійних диференційних рівнянь з використанням декількох відмінних числових методів.
- Метод якісного аналізу дав змогу дослідити режими, які допускає модель ієрархічних осциляторів.
- За допомогою методу особливих точок проведено дослідження коливань у трирівневій ієрархічній системі ангармонічних осциляторів.

- Метод Гальоркіна дав можливість перевірити достовірність результатів отриманих методом особливих точок.
- Метод клітинних автоматів застововувався для побудови блоково-ієрархічної моделі землетрусів. Даний метод є основним для моделювання процесів самоорганізованої критичності. Достовірність результатів, отриманих на основі даної моделі, підтверджується порівнянням отриманих статистичних закономірностей з аналогічними закономірностями для природних сейсмічних процесів.
- Методи математичної статистики застосовувались для обробки результатів числових розрахунків та експериментальних даних.
- Експериментальний метод використовувався для вивчення динаміки дискретних середовищ. Достовірність експериментальних результатів забезпечувалась калібруванням всіх вимірювальних пристроїв.

Наукова новизна отриманих результатів:

- Вперше проаналізовано характер поширення нелінійних збурень у двовимірному дискретному масиві, утвореному зі сферичних дискретних елементів, в залежності від упаковки. Отримано еволюцію спектра нелінійної хвилі, що поширюється у дискретному середовищі, утвореному зі сферичних елементів трьох розмірів. Змоделювано процес поширення нелінійної хвилі в ланцюгу дискретних елементів у рамках узагальненої моделі Герца із врахуванням їх пластичного деформування.
- Вперше виявлено та досліджено вихрові хвильові структури в процесі поширення хвилі стиснення в шарі гранульованого середовища, яке розташоване в полі сили тяжіння.
- Вперше встановлено вплив на діаграми деформування дискретних середовищ виду взаємодії дискретних елементів: пружного, пружно-пластичного, пружнов’язкого, типу упаковки та розмірів дискретних

елементів. Показано зв'язок внутрішньої структури з нелінійністю, гістерезисом, формою діаграм.

- Розроблено нову експериментальну методику вимірювання сили, що діє на окремі гранули на дні гранульованого зразка. В результаті експериментальних та комп'ютерних досліджень встановлено, що розподіл максимального значення сил, з якими гранули діють на дно циліндра в гранульованому середовищі, утвореному сферичними гранулами, при імпульсному навантаженні мають експоненційно згасаючий характер в дапазоні великих сил. Крім того, числове моделювання показало, що експоненційний розподіл сил має місце по всьому зразку і таким чином підтверджується наявність кореляцій міжгранульних сил в процесі його динамічного навантаження. За допомогою комп'ютерного моделювання показано, що процес деформування гранульованого середовища є нерівноважним процесом.
- Запропоновано нову модель ієрархічного дискретного середовища як системи вкладених ангармонічних осциляторів. Доведено, що модель з трьома ієрархічними рівнями має періодичні, квазіперіодичні та хаотичні розв'язки. Показано, що процес перерозподілу енергії між рівнями, інтенсивність збудження осциляторів на ієрархічному рівні визначається структурним параметром. Розглянуто періодичні режими, що виникають у трирівневій ієрархічній моделі з дисипацією, коли найвищий структурний рівень зазнає дії гармонічної сили. Аналіз амплітудно-частотних кривих показав, що ієрархічна структура може вести себе як підсилювач сигналу, яким збуджується найвищий рівень ієрархії.
- Розроблено нову модель землетрусів, яка базується на двох фундаментальних принципах: ієрархічній структурі сейсмоактивних областей та концепції самоорганізованої критичності. Модель відтворює основні емпіричні властивості сейсмічних процесів: закон Гутенберга-Ріхтера, узагальнений закон Оморі, закон про

продуктивність афтершоків, закон Бетта про середнє значення відносної різниці у магнітуді між основним землетрусом і його найбільшим афтершоком, фрактальні розподіли гіпоцентрів (епіцентрів) зі степеневою залежностями кількості подій від відстані між гіпоцентрами (епіцентрами) та γ-розподіл для часу очікування.

- Розроблено методику експериментальних досліджень зсувного деформування гранульованого середовища, сформованого з гранул кубічної форми, в тому числі при дії на середовище зовнішніх періодичних та неперіодичних збурень.
- Запропоновано алгоритм для управління процесом зсувної деформації гранульованого середовища за допомогою зовнішніх збурень, який забезпечує уникнення великих напружень. Експерименти підтвердили ефективність застосування даного алгоритму.
- Обґрунтовано в рамках числового моделювання, що розподіл енергії акустичних збурень, які генерує гранульоване середовище з кубічними елементами при його зсувному деформуванні, близький до розподілу Гутенберга-Ріхтера, а афтершоки затухають за законом Оморі. Встановлено, що розподіл флуктуацій швидкостей елементів у такому модельному середовищі є експоненційною залежністю, а кореляція флуктуацій швидкостей – витягнутою експонентою, подібно до того, як це встановлено у натурних експериментах для флуктуацій швидкостей руху земної поверхні у сейсмоактивному регіоні в Каліфорнії.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати та висновки, викладені в дисертаційній роботі, одержані автором особисто або у співавторстві та опубліковані в журналах, які входять до затвердженого МОН Переліку наукових фахових видань України з фізико-математичних наук, або іноземних видань. За темою дисертації автором опубліковано 36 наукових праць: статей – 23 (6 входять до міжнародної наукометричної бази Scopus), з них 5 – без співавторів [25-47], 1 – матеріал міжнародної конференції (входить до міжнародної наукометричної бази Scopus), 12 тез доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях [48-59], 1 – монографія [60].

Особистий внесок автора в основні роботи, виконані в співавторстві, визначається наступним чином:

- статті [25-27], [30], [32-37] – постановка задач, виконання комп'ютерних розрахунків, обробка результатів, участь в аналізі та інтерпритації даних.
- стаття [18] – побудова моделі дискретного ієрархічного середовища як системи вкладених осциляторів, числові розрахунки за моделлю, участь в аналізі та інтерпритації даних.
- стаття [39] – постановка задачі, планування експримента, обробка результатів, , участь в аналізі та інтерпритації даних.
- стаття [40] – постановка задачі, планування експримента, обробка результатів, аналіз та інтерпритація даних.
- стаття [41] – постановка задачі, участь у вдосконалені моделі дискретного середовища як системи вкладених осциляторів та участь в аналізі результатів. Матеріали цієї статті також ввійшли в докторську дисертацію Скуратівського С.І. "Процеси самоорганізації в нерівноважних середовищах з структурою", Київ (2016).
- стаття [42] – постановка задачі, планування експримента, обробка результатів, участь в аналізі та інтерпритації даних, розрахунок процесу динамічного деформування гранульованого середовища, що відповідає експерименту.
- стаття [43] – постановка задачі, участь в отриманні результатів та їх аналізі.
- стаття [45] – постановка задачі, участь в написанні комп'ютерної програми для розрахунку динаміки блокового середовища, в розрахунках та в їх аналізі. Обробка результатів розрахунків.

- стаття [47] – постановка задачі, планування експримента, обробка результатів, аналіз та інтерпритація даних.
- монографія [60] – розділи 3,4.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дослідження доповідались на таких наукових конференціях:

- Tenth International Congress on Sound and Vibration, vol.6, pp.3573-3579, Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003.
- XII Международная научная школа-семинар “физика импульсных разрядов в конденсированных средах”. ИИПТ НАН Украины, Николаев, 22 –26 августа 2005.
- Компьютерное моделирование динамического деформирования структурированной геофизической среды под действием импульсной нагрузки. В: Импульсные процессы в механике сплошных сред. Материалы VII Международной научной школы семинара, с.188. ИИПТ НАН Украины, Николаев, 22 –26 августа 2005.
- VII Международная научная школа-семинар “Импульсные процессы в механике сплошных сред”. ИИПТ НАН Украины, Николаев 21-25 августа 2007.
- XVII Международная научная школа им. акад. С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках”. Алушта, 17-23 сентября 2007.
- XVIII Международная научная школа им. акад. С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках”. Алушта, 19-25 сентября 2008.
- XIX Международная научная школа им. акад. С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и

динамические явления в горных породах и выработках”. Алушта, 21-27 сентября 2009.

- International Conference “Geodynamical Phenomena: From Observations and Experiments to Theory and Modelling”. Kiev, September 20-24, 2010.
- XXI Международная научная школа им. акад. С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках”. Алушта, 19-25 сентября 2011.
- XXII Международная научная школа им. акад. С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках”. Алушта, 21-27 сентября 2012.
- XXIII Международная научная школа им. акад. С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках”. Алушта, 22-28 сентября 2013.
- 3th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery S. Melnik “Nonlinear analysis and applications”. Kyiv, Ukraine, 1–3 April 2015.
- International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPhA-2017). Cherkasy, Ukraine, 17-19 October 2017.
- Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018.
- 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery S. Melnik “Nonlinear analysis and applications”. Kyiv, Ukraine, 4–6 April 2018.
- Наукові семінари Відділення геодинаміки вибуху.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, шести розділів, висновків і списку використаних джерел, що включає 406 найменувань. Робота містить 303 сторінки машинописного тексту, 150 рисунків та 2 додатки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках планових НДР Відділення геодинаміки вибуху Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України за такими науковими темами:

- Розробка наукових основ динаміки деформування ієрархічного геофізичного середовища (1998 – 2002 рр., номер держреєстрації 0198U000239).
- Удосконалення моделей геофізичних середовищ і розв'язок хвильових задач (1995 – 1999 рр., номер держреєстрації 0195U004811).
- Дослідження деформування геофізичного середовища і розробка методів видобутку енергоносіїв (2000 – 2004 рр., номер держреєстрації 0100U000057).
- Створення геомеханічної моделі літосфери в зв'язку з розвитком мінерально-сировинної бази України (2002 – 2006 рр, номер держреєстрації 0102U002241).
- Розробка наукових основ нелінійної нерівноважної геомеханіки та новітніх технологій і техніки для підвищення нафтогазовіддачі пластів (2003 – 2007 рр., номер держреєстрації 0103U000043).
- Розробка новітніх технологій інтенсифікації видобутку енергоносіїв на основі досліджень динаміки геофізичних середовищ (2004 – 2007 рр., номер держреєстрації 0104U008452).
- Розробка наукових основ нелінійної, нерівноважної геофізики та технології інтенсифікації видобутку мінеральної сировини (2007 – 2011 рр., номер держреєстрації 0106U011729).

- Розробка наукових основ нелінійної нерівноважної геодинаміки та технологій інтенсифікації вилучення вуглеводнів із надр (2008 – 2012 рр, номер держреєстрації 0107U010776).
- Розробка наукових основ створення новітніх імпульсних технологій та техніки для підвищення нафтогазовіддачі пластів на основі досліджень динаміки структурно-неоднорідних геосередовищ (2008 – 2010 рр., номер держреєстрації 0107U010777).
- Дослідження закономірностей деформування геосередовищ та розробка наукових основ новітніх технологій видобутку енергоносіїв (2010 – 2012 рр., номер держреєстрації 0109U008684).
- Розробка наукових основ динаміки ієрархічно-блокових геосередовищ для створення новітніх імпульсних геотехнологій (2011 – 2013 рр., номер держреєстрації 0110U007857).
- Розробка наукових основ нелокальної геодинаміки (2012 – 2017 рр., номер держреєстрації 0113U000008).
- Розробка наукових основ самоорганізації нерівноважних геофізичних середовищ. (2012 – 2016 рр., номер держреєстрації 0112U003239).
- Розробка наукових основ нерівноважної геомеханіки (2013 – 2017 рр., номер держреєстрації 0113U000007).
- Дослідження закономірностей динаміки структурно-неоднорідних геосередовищ. (2013 – 2017 рр., номер держреєстрації 0113U000006).
- Розробка наукових основ нерівноважної динаміки геосередовищ для створення новітніх технологій інтенсифікації видобутку корисних копалин (2014 – 2016 рр., номер держреєстрації 0113U007992).
- Дослідження закономірностей самоорганізації і утворення структур в нерівноважних геофізичних середовищах з метою розробки новітніх ефективних методів видобування корисних копалин (2017 – 2019 рр., номер держреєстрації 0117U000248).

- Дослідження закономірностей нелінійної нерівноважної геодинамки для створення наукових основ розробки новітніх імпульсно-хвильових технологій підвищення видобутку вуглеводнів (2017 – 2019 рр., номер держреєстрації 0117U 000249)
- Дослідження критичних явищ та інших проявів самоорганізації у структурованих геосередовищах з метою оцінки сейсмічних ризиків (2017 – 2019 рр., номер держреєстрації 0118U000044).

Практичне значення отриманих результатів.

- У результаті дослідження знайдено, що при щільній упаковці сферичних структурних елементів у системі поширюється стійка хвильова структура. Подібність хвильових рухів у масивах регулярної структури з різними розмірами структурних елементів та різними інтенсивностями дає можливість діагностувати розміри цих структур за хвильовими швидкостями та спектральними характеристиками хвильових утворень.
- Вивчення процесів перерозподілу енергії в ієрархічних системах важливі для сейсмічних досліджень в областях зі складною структурою та для забезпечення сейсмічної безпеки складних промислових та цивільних об’єктів.
- Розроблена блоково-ієрархічна модель землетрусів дає можливість дослідження причин та умов виникнення передвісників з метою прогнозування великих землетрусів.
- Подібність процесів зсувного деформування гранульованого середовища та природних сейсмічних процесів відкриває перспективи для визначення умов виникнення великих землетрусів, а також можливість впливати на сейсмічний процес з метою релаксації напружень у сейсмоактивній зоні щоб уникнути руйнівних землетрусів.

- Вивчення зсувного деформування гранульованого середовища також можуть мати практичне значення для кращого розуміння таких природних процесів як зсуви ґрунтів, селів, сходження сніжних лавин, тощо, прогнозування наслідків цих небезпечних процесів та можливості впливу на них.
- Розроблені комп'ютерні коди для опису динаміки гранульованих середовищ можуть бути використані для моделювання різноманітних технологічних процесів, пов'язаних з динамікою гранульованих масивів: перемішування гранульованих сумішей, подрібнення гірських порід у мельницях, укладка гравійної засипки при будівництві доріг, тощо.
- Отримані результати можуть використовуватися у навчальному процесі.

Подяка. Я щиро вдячний науковому консультанту член-кореспонденту, доктору фіз.-мат. наук Даниленку В'ячеславу Андрійовичу за те, що він зацікавив мене проблематикою щодо трактування структурованих геосередовищ як складних ієрархічно-структурованих блокових відкритих систем, за постійну всебічну підтримку, цінні поради і багаторазові корисні обговорення. Також висловлюю вдячність доктору фіз.-мат. наук Скуратівському С.І. за плідну співпрацю щодо моделювання ієрархічного середовища як системи вкладених нелінійних осциляторів та в інших дослідженнях, цінні поради, обговорення результатів. Моя подяка кандидату техн. наук Поляковському В.О. за виготовлення експериментальних установок, проведення експериментів та плідне обговорення результатів. Висловлюю також подяку кандидату фіз.-мат. наук Кулічу В.В. за спільну роботу у розробці комп'ютерного коду *CuBluck* для розрахунку динаміки блокового середовища. Моя подяка також Поляковській Т.С. за допомогу у проведенні експериментів, Юшициній Я.О. за допомогу в оформленні дисертації, а також всім співробітникам Відділення геодинаміки вибуху, хто мене підтримував.

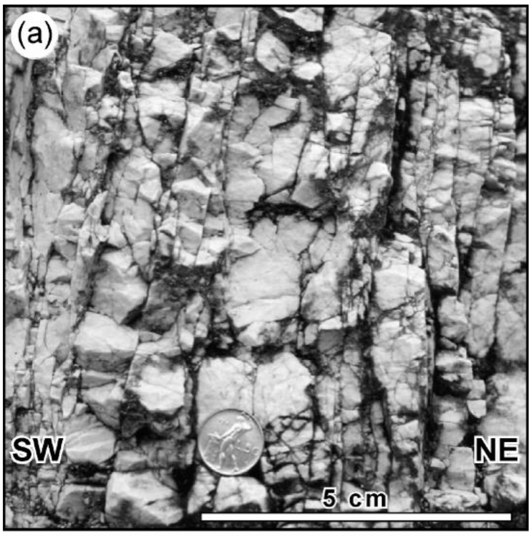
РОЗДІЛ 1

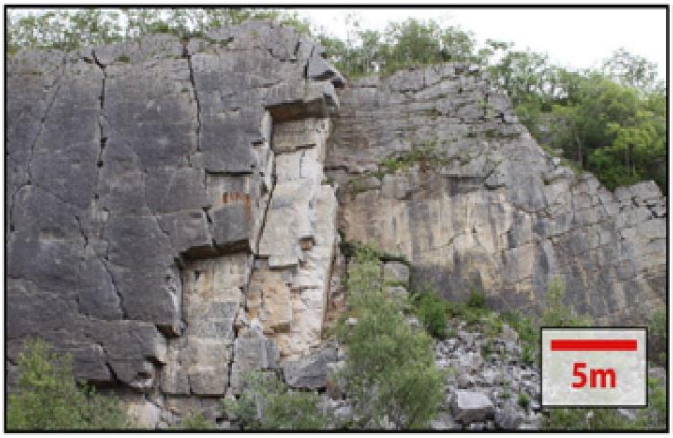
ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ У СТРУКТУРОВАНИХ СЕРЕДОВИЩАХ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ)

1.1. Моделі геосередовищ як відкритих блоково-ієрархічних систем

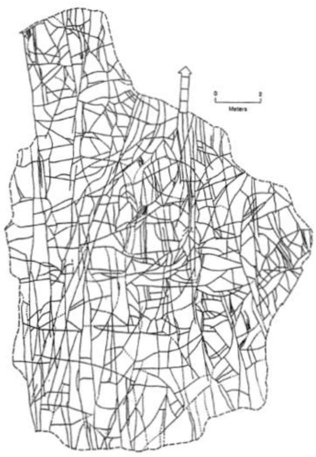
Структурованість геосередовищ досить явно спостерігається на різних масштабах. На рис. 1.1 зображені приклади структурованих геосередовищ зі структурними елементами чотирьох різних масштабів. Детальний аналіз Земної кори від тектонічних плит і геоблоків до кусків породи при подрібненні породи за допомогою вибухів до гранул та зерен гірських порід показав, що існує деяка впорядкована ієрархія переважаючих розмірів, а статистичні розподіли розмірів у межах кожного ієрархічного рівня схожі між собою [3]. Ці розподіли структурних елементів за розмірами для всіх масштабів мають полімодальний характер, тобто моди (розміри) L_i утворюють ієрархічну послідовність, яка близька до геометричної прогресії: $L_{i+1}/L_i = K$, причому константа K, як показують дослідження, лежить в доволі вузькому інтервалі від 2 до 5 та не залежить від масштабу [3, 5].

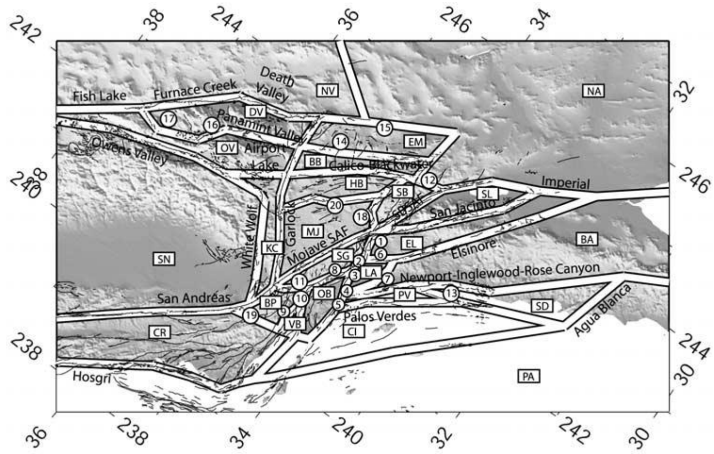
Очевидна неоднорідність та структурованість геосередовищ, а також неможливість пояснити ряд ефектів у рамках континуального підходу змушує шукати інші моделі, які б враховували структуру середовища та її дискретність. Садовський, Писаренко, Родіонов [2, 3, 5, 9, 61] запропонували концептуальну фізичну модель, в якій геологічні масиви розглядаються як складні системи, що формуються зі структурних елементів (блоків), розміри яких утворюють ієрархічну послідовність. Блоки розділені більш тонкими прошарками, які також формуються з блоків меншого розміру з аналогічно структурованими прошарками і така внутрішня будова є самоподібною (рис. 1.2). Товщини прошарків також утворюють ієрархічну послідовність, оскільки вони пов’язані з розмірами відповідних блоків. Міцність породи прошарків нижча за міцність блоків, що утвоюють ці прошарки. Оскільки прошарки можуть мати порожнини, то в них можливе проникнення флюїдів, які в свою чергу можуть змінювати фізичні властивості самих прошарків. Така система блоків, так само як і її складові, відкрита для енерго- та масообміну з оточуючим середовищем.





(*б*)





(*в*) (*г*)

Рис.1.1. Зображення фрагментів структурованих геосердовищ чотирьох масштабів: (*а*) гірська порода на кар’єрі С.Сімон (розлом Матіната, Італія) [11], масштаб – 5 см; (*б*) каменоломня Травбарров, Ланкашир, Англія [62], масштаб 5м; (*в*) схема розломів Юкка-Маунтейн, Невада, США [63], масштаб – 2 милі; (*г*) система розломів Сан Андреас, Каліфорнія, США, масштаб – 220 км [64].

В систему увесь час ззовні надходить енергія у вигляді пружних хвиль, квазістатичного навантаження, тепла, гравітаційних збурень від Місяця, потоку флюїдів тощо. Ця енергія перерозподіляється між елементами структури і далі частково накопичується у вигляді пружної енергії, а частково витрачається на руйнування, інша частина дисипує і перетворюється на тепло.

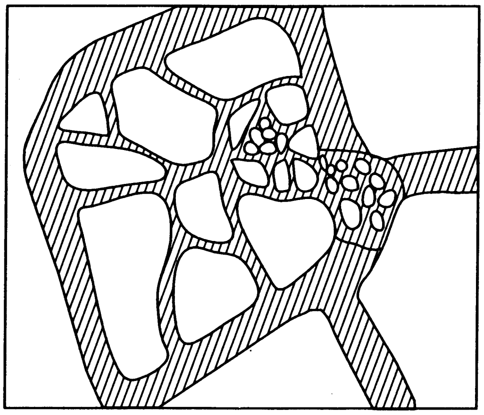


Рис.1.2. Схематичне зображення блокового ієрархічного геосередовища (взято з [9]).

При надходженні енергії ззовні, деякі блоки досягають критичного енергонасичення, при якому вони втрачають стійкість і викидають надлишок енергії у вигляді пружних хвиль, яку поглинають сусіди. Такий перерозподіл енергії може призвести до нестійкості всю систему чи значну її частину. Якщо в систему надходить значна кількість енергії, то в результаті лавиноподібного перерозподілу енергії між блоками енергія випромінюється назовні системи у вигляді землетрусів або акустичної емісії. Якщо енергії недостатньо, то вона встигає дисипувати, а отже, зовнішні ефекти не виникають.

У процесі втрати стійкості накопичена пружна енергія трансформується в сейсмічну, теплову, електромагнітну і т.д. Передбачити поведінку такої складної системи важко, адже втрата стійкості невеликого блоку може призвести до лавинного процесу втрати стійкості значною кількістю блоків. Це змушує мати інформацію про всю систему і на різних рівнях ієрархії, що є практично неможливим. Тому для опису поведінки такої складної системи необхідно застосовувати статистичні методи. Основна складність полягає в тому, що між структурними елементами існують далекодіючі кореляції. Крім того ієрархічна будова середовища не дає можливості застосовувати будь-які методи усереднення, адже неможливо виділити малий параметр, пов'язаний з характерним розміром середовища.

На основі даної концепції блоково-ієрархічної будови літосфери побудовано ряд математичних моделей. Це спрощені моделі, в яких враховується блокова структура або ієрархічність середовища. Габрієлов із співавт. [65, 66] моделювали сейсмічний процес за допомогою двовимірних систем із 24 та 54 блоків прямокутної форми з пружною взаємодією. В цій моделі враховувалось обертання блоків як абсолютно жорстких тіл. Дослідження такої системи дало можливість оцінити властивості стохастичного відгуку на динамічне навантаження і співставити їх з властивостями реального сейсмічного процесу. Автори роботи [67] в рамках даної блокової моделі досліджували вплив міграції флюїдів через систему міжблокового простору на повільний рух блокового середовища, а також на його сейсмічну активність. Тривимірна модель, утворена блоками, розташованими на площині з основою у вигляді квадратів з регулярною упаковкою, застосовувалась авторами робіт [68–71] для створення штучних каталогів землетрусів, з метою порівняння їх властивостей з реальними землетрусами, при дії різних межових навантажень. У роботах [72–75] тривимірні блоки відтворювали реальну форму тектонічних блоків, які існують у регіоні Вранча. Напрямок та величина швидкості руху блоків відповідали експериментальним даним. Взаємодія між блоками в наведених моделях описувалась як пружною, так і пружнов'язкою моделями.

В роботі [76] у двовимірній постановці досліджувався процес еволюції осадкових басейнів. Тут середовище моделювалось масивом блоків шестикутної форми з регулярною початковою упаковкою.

Створено ряд моделей, в яких концентрується увага на ієрархічній будові геосередовищ та їх відгуку на динамічні збурення. В цих моделях суттєво формалізовані як самі елементи структури, так і зв'язки між ними. В моделях [77, 78] розглядається процес консолідації блоків різних рівнів як формальний випадковий процес. Тут отримано ймовірності тривалості перебування блоків у консолідованому стані та середні інтенсивності стрибків пружної енергії у масиві, розподіли ймовірностей консолідованого і неконсолідованого стану фіксованої множини блоків.

Інша ієрархічна модель запропонована авторами роботи [79], в якій розглядається ієрархічна система вкладених блоків. Кожен блок складається з чотирьох блоків нижчого рівня. Всі блоки можуть рухатися в двох ортогональних напрямках. Рух групи чотирьох блоків одного рівня призводить до руху блоку вищого рівня, який вміщує ці блоки. Часова еволюція ієрархічної блокової системи описується кінетичним рівнянням. Моделювання показало, що така система виявляє основні скейлінгові властивості сейсмічних процесів [79–81]. Ці ж автори розробили більш загальну ієрархічну модель, яка описує процеси розвитку дефектів у середовищі при зовнішній дії [82, 83]. Тут досліджувалась можливість передбачувати значущі події на основі синтетичної послідовності землетрусів, згенерованих за допомогою даної моделі [83]. Подібна ієрархічна модель створена для відтворення сейсмічних процесів в ієрархічному середовищі з метою прогнозування критичних сейсмічних подій [84, 85]. В цій моделі розглядаються прямі та зворотні каскади в ієрархічній нелінійній системі, яка постійно навантажується зовнішніми силами. Навантаження здійснюється на найбільший елемент, далі воно передається вниз по ієрархії до найменших елементів, таким чином формуючи прямий каскад. Під дією навантаження елементи структури руйнуються, причому найменші елементи руйнуються найпершими. Руйнування поступово охоплює всю ієрархію аж до найбільшого елемента, формуючи таким чином зворотній каскад. Прямий та зворотній каскади зіштовхуються та взаємодіють. Навантаження провокує руйнування, в той час як руйнування викликає зняття напружень та перерозподіл навантаження. Ця модель відтворює основні динамічні характеристики сейсмічних процесів: сейсмічні цикли, степеневий закон розподілу енергії, кластеризацію землетрусів у просторі та часі, далекодіючі кореляції та ряд характерних особливостей, які передують сильним землетрусам. У цій моделі елементами ієрархії є розриви між блоками, а виникнення того чи іншого розриву ідентифікується із землетрусом.

Моделі розгалудження також можна віднести до ієрархічних моделей [86–88]. В цих моделях припускається, що в середовищі існують мікротріщини, які в процесі навантаження починають рости і зливатися, утворюючи розгалуджені макротріщини. Виділена при цьому енергія пропорційна розмірам тріщин. Синтетичні каталоги, отримані в даних моделях показують, що виділені порції енергії також задовольняють основні масштабно-інваріантні закономірності, характерні для реальних каталогів землетрусів.

1.2. Концепція самоорганізованої критичності

Для моделювання процесу генерування землетрусів в результаті зсувного руху розломів Баррідж та Кнопофф запропонували дискретну модель зв'язаних ковзаючих блоків [89]. В моделі розглядається масив однакових блоків, розташованих на шорсткій поверхні та зв'язаних між собою пружинами жорсткості k_p. Блоки приводяться в рух за допомогою горизонтальної поверхні, що рухається з постійною швидкістю і до якої через пружини з жорсткістю k_s під'єднані блоки. При перевищенні одним із блоків порогового значення зсувної сили, він починає рухатись, змінюючи сили взаємодії сусідніх блоків з шорсткою поверхнею, що в свою чергу може викликати рух цих блоків, спричиняючи колективний рух багатьох блоків, що і є сейсмічною подією. Інтенсивність цієї лавиноподібної події визначається кількістю блоків. У даній моделі мається на увазі, що блоки описують області контакту між двома плитами, які рухаються з відносною швидкістю *V*, де константи k_p та k_s відповідають за лінійний пружний відгук областей контакту відповідно на стиснення та зсув. Детальні дослідження спрощеної одновимірної моделі у вигляді довгого ланцюга з’єднаних між собою ковзаючих блоків по шорсткій поверхні показали, що не зважаючи на те, що система повністю детерміністична, вона проявляє стохастичні властивості. Крім того, сейсмічний процес має властивості самоорганізованої критичності [90, 91]. Поняття самоорганізованої критичності (СОК) вперше ввели Бак та співавт. [92, 93] на прикладі поведінки гірки піску, на яку падають піщини і які час від часу спровоковують зходження піщаних лавин зі схилу. Така система увесь час перебуває у критичному стані і вона самопідстроюється таким чином, щоб знаходитись у цьому стані постійно [92–94]. Виявляється, що така поведінка характерна для нерівноважних природних процесів таких як осипання піскових куп, сходження лавин, лісових пожеж, формування вихорів у надпровідниках в зовнішньому магнітному полі, динаміки магнітних доменів, зростання поверхні розділу, біологічних еволюційних процесів та криз на фондових біржах [95, 96]. Модель СОК описує систему, яка самоорганізовується та прагне залишатись у критичному стані. У такій системі величини флуктуацій, радіус часової та просторової кореляцій та інші є масштабно-інваріантними величинами, тому вони демонструють степеневий закон затухання, що є характерним для багатьох природних систем. Такі системи знаходяться у метастабільному стані і при збуренні продукують непередбачуваний відгук, у той час як відгук некритичної системи однозначно залежить від параметрів збурення. Детально моделі СОК описані в роботах [95, 96].

Вперше гіпотезу про те, що сейсмічний процес – це процес самоорганізованої критичності, висунули автори роботи [97]. Вони зазначили, що землетруси є важливою частиною релаксаційного механізму Земної кори, яка набуває неоднорідних зростаючих напружень, що накопичуються на межах континентальних плит. Концепція СОК передбачає, що землетруси, у свою чергу, організовують Земну кору як на просторовому, так і на часовому рівнях. Не тільки властивості землетрусів є наслідком організації кори та її масиву розломів, але й великомасштабна структура Земної кори виникла з усієї історії попередніх землетрусів, які організували Земну кору і поруйнували її до теперішнього стану. Інакше кажучи, складність та ієрархічна будова кори фактично контролює землетруси, але також є наслідком довготривалої динаміки кори, яка зазнає дії зовнішніх сил чи пружного потенціального потоку енергії. Таким чином, землетруси слід розглядати як частину загальної великомасштабної організації Земної кори, що спонтанно еволюціонує до СОК. Тоді різні неоднорідності вважаються несуттєвими відносно глобальної динаміки, але, звичайно, не для локальної поведінки [97]. Авторами ж роботи [98] показано, що й процес ковзання твердого тіла по шорсткій поверхні також є процесом самоорганізованої критичності.

Автори концепції СОК запропонували модель сейсмічного процесу, побудовану на цій концепції [99]. Вони виходили з того, що сейсмоактивні області знаходяться в критичному стані, оскільки в системах, що знаходяться у критичному стані, відсутні характерний час, розмір або енергетичний масштаб, а всі просторові та часові кореляційні функції – це степеневі залежності, що, власне, і спостерігається для сейсмічних процесів. Ця область зазнає навантаження завдяки руху тектонічних плит.

Розглядається масив частинок на двовимірній квадратній ґратці, що представляє сегменти ковзаючої поверхні. Частинки піддаються силовій дії від своїх сусідів, до того ж зростаюча тектонічна сила діє на сегмент. Коли загальна сила, що діє на частинку, перевищує локальну силу защемлення, частинка просковзує до сусідньої комірки. Якщо в сусідній комірці сила перевищує критичну, частинки знову переміщуються до сусідньої комірки і т.д., поки у всіх комірках сила буде меншою за критичну. Загальна кількість сегментів, які проковзнули протягом цієї події, і є мірою загальної енергії, що виділяється в процесі землетрусу. Ця модель подібна до моделі “гірки піску” [92, 93], тому вона має всі властивості моделі СОК.

Більшість моделей СОК для землетрусів побудовано на основі пружинно-блокової моделі Барріджа-Кнопоффа. Огляд цих моделей можна знайти в роботах [100–102]. Рандл, Джексон та Браун (РДБ) [103–105] та Наканіші [106, 107] модифікували модель Барріджа-Кнопоффа в модель клітинних автоматів, а Оламі, Федер, Крістенсен (ОФК) трансформували її в модель ґратки [108–110]. Інша частина моделей з самого початку була побудована на основі клітинних автоматів [111–113]. Велика кількість робіт присвячена аналітичним та комп’ютерним дослідженням цих моделей [114–123].

Традиційні моделі СОК ускладнювались і удосконалювались з тим, щоб краще описувати як ГР скейлінг, так і кореляції землетрусів у просторі та часі, які виражаються в існуванні форшоків та афтершоків, а також у їх фрактальному розподілі. Іто та Матсузакі [114] модифікували модель клітинних автоматів за допомогою простої процедури перерозподілу сил після кожного землетрусу, що призвело до того, що будь-який землетрус може ініціювати афтершоки. Більш складний механізм розподілу тектонічних напружень на розломі, який призводить до виникнення далекодіючих кореляцій, реалізовано у моделі Байесі [124]. У ряді моделей, заснованих на РДБ та ОФМ моделях, просторово-часові кореляції у сейсмічному процесі досягаються за допомогою введення відповідних неоднорідностей. Найпростіші неоднорідності вводяться у вигляді дефектів точкових чи лінійно протяжних [125, 126]. Серіно та ін. [127] ускладнили модель, розглядаючи замість одного розлому систему розломів з різними рівнями дефектів, а Домінгез та ін. [128] додали зруйновані комірки, які не утримують напружень і в яких також має місце дисипація напружень. Каземіан та ін. [129] ввели в ґратку міцніші місця, або жосткіші комірки. Ці структуровані шорсткості добре відтворюють утворення кластерів форшоків та афтершоків. У моделях із системою розломів [91, 93] використовується далекодіючий перенос напружень від критичних клітин, де перевищено критичне значення сили. Інший вид неоднорідностей, який використовувався у вдосконалених РДБ та ОФК моделях – це випадковий розподіл порогів напружень, перевищуючи які блоки втрачають стійкість і починають рухатися [130, 131]. Для того аби відтворити процеси кластерізації землетрусів у просторі та часі, Джагла [131] включив у ОФК модель механізм структурної релаксації.

1.3. Особливості динамічного та статичного деформування гранульованих середовищ

Одним із найпростіших видів дискретних середовищ є гранульовані середовища, дослідженню яких останнім часом приділяється велика увага. Механічні властивості гранульованого середовища відрізняються від властивостей твердих тіл, рідин чи газів. Незвичайна поведінка зумовлена складним механізмом розподілу сил всередині гранульованого матеріалу при дії зовнішнього навантаження [132–134]. Ця сила розподіляється на весь зразок гранульованого масиву через міжчастинкові взаємодії. На відміну від звичайних кристалічних чи полікристалічних твердих тіл, міжчастинкові сили розподілені неоднорідно всередині масиву, часто зумовлюючи нетипово великі значення на стінках контейнера, в якому знаходиться даний масив, що може призводити до його руйнування [135]. Тому відомості про розподіл сил в гранульованому середовищі мають велике практичне значення [136, 137].

Особливості взаємодії між частинками в структурованих сипучих середовищах досліджувались, як правило, у двох аспектах: а) щодо перерозподілу зовнішніх статичних навантажень і власної ваги всередині; б) щодо відгуку хаотично упакованих гранульованих систем на динамічний зсув. Наприклад, фотопружна візуалізація поля напружень в гранульованих системах [132, 136, 138–142] та комп’ютерне моделювання [143–146] показали, що сили розподілені суттєво неоднорідно. Значну частину сил зосереджено уздовж “ланцюгів”, які утворюють мережу, що охоплює всю гранульовану систему. Важливою характеристикою гранульованої системи є розподіл сил між гранулами. Серія експериментів на статичне стиснення [133, 134, 147, 148] та повільний зсув [138, 141, 149] демонструє, що розподіл сил між частинками має бімодальний характер: функція розподілу сил більших за середню силу експоненційно спадає, а для сил менших ніж середня, вона має невеликий пік або плато. Ці особливості функцій розподілу підтверджуються численними результатами числового 2D і 3D моделювання [143, 144, 150–153]. Вони обумовлені структурою мережі сил, яка складається з двох підмереж: а) “слабкої” підмережі контактів, які переносять силу нижче середньої та б) “сильної”, що переносить сили більші за середню і яка демонструє іншу модель поведінки та чтановить невелику частиниу усіх сил [143]. Сили мають далекодіючі кореляції вздовж ланцюгів та короткі у всіх інших напрямках [144].

У більшості експериментальних робіт досліджувалась гранульована система лише в статичних умовах і вимірювались сили, використовуючи чутливий карбоновий папір [133, 134, 137], фотопружний метод [136, 140, 155] та інтерферометричний метод сканування [156]. Також використовувались датчики для вимірювання сил на дні контейнера [137, 148]. Тим не менше, через суттєво великі розміри датчиків, виміряні сили були осереднені за великою кількістю частинок. Аналогічно, в експериментах з піском були використані тактильні давачі, які вимірювали сили скоріше від кластерів ніж від індивідуальних частинок. У ряді експериментів вимірювалися сили у двовимірних зразках, які складались з фотопружних [132, 138, 139, 141, 157] та гумових дисків [158]. Останнім часом було розроблено кілька методик для вимірювання міжчастинкових сил всередині тривимірних гранульованих систем: конфокальна візуалізація [159, 160], візуалізація за допомогою рефракції показника заломлення [160, 162] та ренгенівська томографія [163, 164]. Перші дві методики є виключно оптичними і вони використовують прозорі частинки. Слід зауважити, що всі тривимірні вимірювання проводились виключно у статичних умовах.

Інші важливі особливості поведінки гранульованих середовищ стосуються процесів поширення хвиль. Ці процеси в гранульованих структурованих середовищах значно складніші, ніж у звичайних суцільних матеріалах. Складність пов'язана з дискретністю і неоднорідністю гранульованого середовища, нелінійним і дисипативним характером взаємодій частинок сипучого середовища (гранул), їх обертальним рухом та переупаковкою при деформації, наявністю ланцюгів сил, які формуються гранулами, що зазнають великих навантажень, тощо. Ці особливості призводять до появи таких цікавих явищ, як поширення слабких збурень уздовж силових ланцюгів [165–169] та якісної зміни хвильової картини при збільшенні амплітуди хвилі, пов'язаної із перепакуванням гранул 166, 169, 170], появи когерентної і спеклоподібної частин акустичної хвилі [169, 170–173], існування швидких високочастотних і повільних низькочастотних хвиль при сильних навантаженнях, акустичної емісії та характерної частоти [174, 175], зростання швидкості звуку зі збільшенням тиску [151, 176–178]. Швидкість акустичної хвилі залежить від ступеня упорядкованості гранульованої монодисперсної системи, у полідисперсній системі вона залежить від дисперсії зерен [179, 180]. У випадку періодичної гранульованої упаковки можуть мати місце відокремлені хвилі [181–185]. Якщо в регулярно упаковане гранульоване середовище ввести стохастичність, то хвиля тиску втрачає солітонні властивості і тоді має місце затухання амплітуди [186, 187]. Ще одна особливість, яка відрізняє гранульовані середовища від суцільних є те, що в гранульованих середовищах існують конвективні рухи при дії строго вертикальних вібрацій [187–191].

1.4. Математичні моделі гранульованих середовищ

Гранульоване середовище – це досить велика сукупність частинок, що дає можливість побудови математичних моделей з використанням статистичних методів, які були раніше розроблені для статистичного опису поведінки великих систем мікрочастинок – атомів та молекул. Звичайно, тут мається на увазі статистичний опис мікрочастинок без урахування квантово-механічних ефектів. Проте, гранульовані системи – це *складн*і системи, для яких відсутня ергодичність. Гіпотеза ергодичності має на увазі, що в процесі еволюції системи відбувається повне перемішування потоку в фазовому просторі [192], що приводить до розподілу Гіббса і з якого випливає властивість адитивності. При цьому в ергодичних системах виконуються такі умови [193, 194]:

- перемішування відбувається експонеційно швидко і це забезпечує добре розвинуту хаотичну структуру;
- всі сили є короткодіючими, в результаті чого всі процеси є марківськими;
- фазовий простір має звичайні властивості неперервності, гладкості, евклідовості.

Складні системи є неадитивними і для них замість експоненційного згасання має місце степеневе, в результаті чого відбувається тільки слабка хаотизація фазового простору. Таким системам властиві ефекти далекодії, немарківська поведінка, фрактальний характер фазового простору, що означає їх самоподібність [194].

Суттєвих успіхів досягнуто у розробці статистичних моделей для розріджених гранульованих систем, які отримали назву флюїдизовані гранульовані системи, або гранульований газ [195, 196]. Флюідизація досягається за допомогою вертикальної вібрації [197, 198], горизонтальної тряски [199, 200] або електромагнітної флюїдизації [201]. Теоретичний опис гранульованих газів охоплює широкий клас методів, які використовувались для молекулярних газів: від феноменології до теорії середнього пробігу і до максвеловської моделі з використанням рівняння Больцмана [202]. Використовувались також класичні методи багатьох тіл [203, 204]. Основна відмінність гранульованих газів від молекулярних полягає в тому, що взаємодія між гранулами є дисипативною, а отже, гранульований газ, навіть в стаціонарному процесі, знаходиться в неоднорідному стані. Тому рівняння Больцмана для сильно розрідженого гранульованого газу модифіковано із врахуванням непружньої взаємодії, так само як і рівняння Енског-Больцмана для гранульованого газу середньої щільності, в якому частково враховуються кореляції [205–209].

Інша частина статистичних моделей стосується деформування щільних гранульованих середовищ. Едвардс та ін. [210–212] запропонували модель, в якій кожна конфігурація розглядається як мікростан, а ентропія, відповідно, це – логарифм загального числа можливих конфігурацій. Правда, тут виникають проблеми з ергодичністю динаміки такої системи, проте в даному випадку ігнорується дослідження фазового простору і припускається однорідність міри у статистиці ансамблів, а далі перевіряються отримані результати за допомогою експериментів або числового моделювання [213].

Едвардс прийшов до висновку, що для гранульованих систем найкраща змінна, яка описує їх стан, це – щільність, або об’єм *V*, який залежить від конфігурації гранул, подібно до того, як енергія в класичній статистичній механіці залежить від конфігурації частинок. Він ввів об’ємну функцію W, яка визначає об’єм системи в термінах позицій та орієнтацій гранул, яка відповідає гамільтоніану. Крім того, замість температури він ввів величину, яку назвав “компактивність” X і яка визначається через конфігураційну ентропію S, подібно до того, як в класичній термодинаміці визначається температура $X = dV / dS$. Таким чином, Едвардс сформулював нове поняття ефективної температури, яке є справедливим для гранульованого середовища в стані спокою та повільної течії. Автори роботи [214] побудували статистичну суму для гранульованого середовища із врахуванням, крім конфігурації, ще й міжгранульних сил. Проте, Едвардс та ін. показали, що ансамблі об'ємів та сил взаємозв'язані [215].

Берг та Мегта [216, 217] використали ферромагнітну спінову модель на випадковому графі для моделювання компактування гранульованого масиву при вібродії. Мультиспінова взаємодія використовується для виявлення конкуренції між локальним та глобальним виконанням обмежень, характерних для геометричної фрустрації. В моделі використовувався 3-спіновий гамільтоніан.

Інший підхід до визначення температури запропонували автори роботи [218]. Вони визначили температуру гранульованої системи під дією вібрації через їх амплітуду. При цьому описали слабо збуджену двовимірну гранульовану систему з точки зору збурень безспінової ферміонної системи. Було показано, що конфігураційна статистика слабо збуджених гранульованих матеріалів підкоряється Фермі-статистиці.

Статистичну модель для розподілу сил у гранульованому середовищі при статичному навантаженні, так звану q-модель, розробили автори роботи [219]. В цій моделі вважається, що домінантним фізичним механізмом, який лежить в основі утворення ланцюгів сил, є неоднорідність упаковки, яка призводить до нерівномірного розподілу ваги на гранулах, які підтримують дану гранулу. Модель побудована на регулярній ґратці, у вузлах якої знаходяться гранули, проте взаємодії між ними нерегулярні. Дана модель добре відтворює експоненціальний розподіл середніх і великих сил у гранульованих середовищах, що підтверджується чисельними експериментами та комп'ютерними розрахунками. Подібна модель була запропонована для пояснення існування довгих силових ланцюгів "арок" у силососховищах [220–223]. Тут показано, що невеликі збурення, наприклад термічне розширення гранул, може привести до гігантських флуктуацій сил на дно та бокові стінки силососховища.

1.5. Комп’ютерне моделювання динамічних процесів у гранульованих середовищах

Комп’ютерне моделювання є важливою частиною теоретичного дослідження гранульованих середовищ, оскільки не існує універсальної теорії таких середовищ. Воно дає можливість дослідити важливі аспекти поведінки гранульованих масивів, які є сильно затратними для експериментального дослідження, або взагалі неможливими.

Найбільш поширеним числовим методом для моделювання гранульованих середовищ є метод дискретних елементів (МДЕ) [224–226]. МДЕ об’єднує величезну кількість числових методів, призначених для розрахунку руху великої кількості частинок, таких як молекули, піщинки, гравій, галька, блоки та інших гранульованих середовищ. МДЕ став найбільш ефективним засобом дослідження властивостей гранульованих матеріалів з мікроскопічної точки зору.

Крім методу МДЕ, для комп’ютерного моделювання гранулюваних середовищ використовуються, хоча і менш інтенсивно, такі методи: Монте Карло, метод клітинних автоматів, метод реконструкції з дна до вершини, метод ланжевенівської динаміки [225].

Метод МДЕ був запропонований Канделом для задач механіки гірських порід [227], а потім був застосований для моделювання динаміки гранульованих середовищ [228]. МДЕ базується на розв’язанні системи рівнянь руху для кожної частинки гранульованого масиву. Тут враховується як поступальний рух, так і обертальний. Важливим компонентом методу є обчислення взаємодії. Взаємодія між сусідніми частинками моделюється алгоритмами, основаними на контактній механіці [229–231]. В ранніх роботах з числового моделювання гранульованих середовищ досліджувалось зсувне деформування двовимірної системи дисків з лінійною взаємодією між ними та з урахуванням тертя [232–236]. В роботі [237] автори досліджували часову еволюцію двовимірної дисипативної системи дисків, в яких дисипація враховувалась через введення коефіцієнта реституції. Сферичні частинки використовувались у роботі [238] для двовимірного розрахунку вібрації гранульованого середовища, а в роботі [239] – для дослідження процесу поширення звуку через щільну двовимірну упаковку, яка знаходиться у гравітаційному полі. У зв'язку з доволі простим розрахунком взаємодії між частинками сферичної форми, широкого розповсюдження набули дослідження тривимірної динаміки гранульованих середовищ. Як правило, в такому моделюванні використовується взаємодія за законом Герца-Міндліна. В рамках такої моделі було здійснено комп'ютерні розрахунки найрізноманітніших процесів у гранульованих матеріалах: перемішування гранул у барабані [240], сегрегація гранульованого масиву при вібраційній дії [241], зсувне деформування [242], вісесиметричне стискання [243], укомпактовування [244], поширення хвиль [245].

Легкість обчислення взаємодії сферичних частинок дозволяє легко обчислювати взаємодію їх конгломератів. Ряд робіт присвячено алгоритмам конструювання несферичних гранул за допомогою конгломератів сферичних частинок [246–248] та дослідженню впливу форми гранул на зсувні локалізації в гранульованих матеріалах [249, 250].

Для моделювання затиснутих гранульованих систем з несферичними гранулами використовувались гранули у вигляді еліпсів та еліпсоїдів відповідно у двовимірних [251–253] та тривимірних випадках [254–256]. Досліджувались властивості таких систем залежно від параметрів еліпсоїдів.

Для несферичних частинок з гострими ребрами задача про взаємодію є суттєво складнішою. На цей час розроблена значна кількість різноманітних алгоритмів, які дозволяють розраховувати цю взаємодію. У більшості моделей гранули вважаються недеформованими, а сила взаємодії двох гранул визначається через їх перетин. У двовимірному випадку обчислити фігуру перетину при взаємодії двох многокутників доволі легко [257, 258]. Значно складнішою стає задача обчислення взаємодії несферичних ребристих частинок у тривимірному випадку.

Автори роботи [259] для визначення взаємодії гранул у вигляді шестигранників безпосередньо розраховували всі типи взаємодії: вершина-грань, ребро-грань, ребро-ребро і т.д. Такий метод є доволі затратним. За допомогою нього було розраховано протікання гранульованої маси по жолобу та насипання на площину.

Канделл запропонував ефективний спосіб обчислення сили взаємодії двох багатогранників будь-якої форми за допомогою спільної площини, яка визначається однозначно як така, відстань від якої до найближчих вершин є мінімальною для кожного з многогранників [2604, 261]. Цей метод набув значного поширення для розрахунку таких процесів як зсувне деформування масивів гранул різної форми [262], зсуви ґрунтів, снігових лавин, екскавації, перемішування у барабані та багатьох інших [263–265].

Інший підхід до визначення сили, запропонований авторами роботи [266], ґрунтується на знаходженні сили через трикутні сегменти, утворені центром мас фігури перетину і вершинами перетину. Тут величина сили залежить від об’єму фігури перетину, напрямок визначається сумою нормалей до трикутних сегментів, зважених площами відповідних сегментів, а точкою прикладення сили є центр мас фігури перетину. Нассауер та співавт. [267, 268] вдосконалили цей метод, ввівши в обчислення величини сили крім об’єму глибину проникнення. Вони також співставили розрахунки взаємодії кубів, отримані методом МДЕ та методом скінчених елементів, що дало можливість визначити коефіцієнти в законі взаємодії. Жао та співавт. [269] запропонували визначати напрямок нормальної сили при взаємодії двох многогранників як напрямок нормалі до підігнаної площини, отриманої на основі сегментів лінії перетину методом найменших квадратів. Бун та ін. [270] розробили метод визначення контактів між випуклими многокутниками та між многогранниками з використанням стандартних процедур оптимізації.

Автори роботи [271] для обчислення сил взаємодії гранул використали алгоритм Гільберта-Джонсона-Кірті [272], який дає можливість визначити напрямок нормалі в точці контакту для довільних випуклих фігур. Були проведені розрахунки обертання у барабані гранульованих масивів у формі куль, циліндрів, кубів, тетраедрів та їх сумішей.

Донг та співавт. [273] визначають об’єм фігури перетину, підраховуючи суму об’ємів, що потрапили до фігури перетину, на які були попередньо розбиті контактуючі гранули. Цей метод може бути застосованим для будь-якої форми дискретних елементів.

У роботах [274, 275] запропоновано описувати взаємодію не однією силою, а декількома, в залежності від виду взаємодії. Це робить процес розрахунку більш стійким, особливо у випадку вироджених випадків взаємодії. В роботі [276] представлено метод формування ребристих многогранників довільної форми.

Ряд авторів для дискретних елементів правильної форми застосовували заокруглені грані та вершини [277–279]. У цьому випадку взаємодія елементів розраховувалась за законом Герца, що значно спрощувало розрахунки таких гранульованих систем.

Останнім часом почали розроблятись моделі МДЕ, в яких дискретні елементи є деформованими [280, 281] та можуть руйнуватися [282–284]. В роботі [280] для розрахунку деформації елементів використовується метод матеріальних частинок, а в роботі [281] вважається, що деформування є однорідним та враховується зміна форми елементів. У моделі руйнування структурних елементів [282, 283] їх формують як агрегати жорстких комірок, зв’язаних між собою вздовж боків, а в якості критерію руйнування використовують закон Кулона-Мора. Інший підхід запропоновано у роботі [284]: тут елементи в формі многогранників руйнуються уздовж площини, на якій виконуються умови Кулона-Мора, обчислені за напруженнями на поверхні елемента.

За допомогою розроблених методів моделювання динаміки дискретних середовищ було проведено розрахунки таких процесів, як упаковування гранульованих матеріалів, в тому числі і з застосуванням вібраційної дії, перемішування у різноманітних міксерах, стратифікація гранул при вібродії, потоки через бункери, протікання по нахиленому жолобу, кочення коліс у гранульованому середовищі, різноманітні види деформування структурованих середовищ, динамічне проникання твердого тіла у гранульоване середовище, зходження лавин, тощо. Детальний огляд методів та розрахунки з їх допомогою можна знайти у оглядових роботах [225, 285–287].

МДЕ – універсальний метод для розрахунку динаміки та статики дискретних систем, проте його застосування обмежене невеликою кількістю елементів, оскільки необхідно розв'язувати велику кількість рівнянь руху, що вимагає значних комп'ютерних затрат. Значно ефективнішим методом для моделювання дискретних систем є недетерміністичний метод, запропонований Бьордом [288] для розрідженого молекулярного газу, який отримав назву методу Монте Карло (МК). Ідея методу МК полягає у визначенні залежності від часу функції розподілу $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ за допомогою моделювання з використанням квазічастинок [225]. Еволюція функції розподілу визначається рівняннями Больцмана або Больцмана-Енскога. Ці рівняння описують залежність від часу потоку імовірностей. Застосування методу МК для гранульованого газу було здійснено авторами робіт [289–291]. Метод МК також використовувався для моделювання випадкового упаковування гранульованого масиву сферичних частинок [292–294].

Ще один метод, який набув широго поширення останнім часом – метод клітинних автоматів. Він застосовується для розв'язання таких задач:

- моделювання лавинних процесів у різних областях науки від геофізики (землетруси, сходження лавин) до криз на фондових біржах;
- дослідження формування структур (дюн та брижів), зумовлені дією вітрових, водних потоків чи вібрації контейнерів;
- ґраткові моделі газу для потоків гранульованого матеріалу.

Інтенсивне дослідження лавинних процесів почалося після виходу робіт Бака, Танга, В'єзенфельда (БТВ) [92–94], в яких вони запропонували концепцію самоорганізованої критичності. Ця концепція була реалізована на основі схеми клітинних автоматів, в якій динамічний процес формування лавин на схилі пісчаної гірки визначається локальним градієнтом висот. При перевищенні певного значення цього градієнта відбувається зсув частинок, який може породжувати подальший зсув сусідніх частинок, вниз по схилу. І такий процес може набувати лавиноподібного характеру. На основі цього підходу було запропоновано ряд інших моделей. Всі ці моделі можна умовно розділити на три класи [96]: 1) детерміністичні моделі; 2) дисипативні моделі; 3) стохастичні моделі.

До детерміністичних моделей відносяться БТВ модель "купи піску", абелева модель "купи піску" Дгара [295], яка є узагальненням БТВ моделі і повністю абелева. Модель Дгара є найбільш вивченою завдяки абелевій симетрії. До цього класу також відноситься модель Жанга [296]. На відміну від БТВ моделі та абелевої моделі Дгара, дана модель має неперервні локальні ступені свободи, зв'язані з кожною клітиною. Модель Жанга у зв'язку з її неперервністю дає можливість застосовувати ряд аналітичних методів для її дослідження.

В дисипативних моделях у процесі релаксації має місце дисипація, а отже в моделях вводиться ще один параметр, який відповідає за міру неконсервативності системи. До цих моделей відносяться ґраткові моделі "горіння лісу" [297–299]. Сюди також належать модель ОФК [108] та модель Бака-Снеппена [300].

Стохастичні моделі узагальнюють детерміністичні моделі. Зокрема, у моделі Манна частинки в процесі релаксації розподіляються серед усіх найближчих сусідів випадково [301], а в моделі Осло вибираються випадково локальні критичні нахили [302].

Клітинні автомати успішно застосовуються для моделювання процесів утворення хвилястих структур у гранульованих середовищах. Ці структури утворюються завдяки дії вітрових чи водяних потоків, або вібрацією контейнерів. В роботах [303–306] за допомогою двовимірних моделей клітинних автоматів моделювалися утворення пісчаних дюн та брижів під дією вітру. Автори роботи [307] використали клітинні автомати для опису структур, які можна спостерігати в шарі піску під дією горизонтальної вібрації.

Ґраткові моделі газу вперше були введені авторами роботи [308] для дослідження потоку рідини за допомогою комп’ютерного моделювання. Ґраткові гази використовують трикутну ґратку (у двох вимірах), тобто кожен ґратковий вузол має 6 сусідів. Перехід частинки із одного вузла в інший відбувається з деякою імовірністю, яка визначається правилами автоматів. Моделювання гранульованих потоків з використанням ґраткової моделі газу у трубі були виконані у ряді робіт, наприклад у роботах [309–311].

Проведений огляд літератури свідчить про те, що моделювання динаміки літосфери та її складових: природних гірських масивів, порід, геоматеріалів, тощо в рамках підходу, в якому геосередовище розглядається як складна дискретна, відкрита в термодинамічному сенсі система з ієрархічною будовою, з нелінійною та дисипативною взаємодією між дискретними елементами (блоками) знаходиться в початковій стадії. Що стосується дискретних середовищ, зокрема гранульованих, то в цій області досягнуто значних успіхів як в експериментальних дослідженнях, так і в конструюванні теоретичних моделей. Велику кількість робіт присвячено комп’ютерному моделюванню гранульованих середовищ з гранулами різних форм. Стосовно досліджень динаміки дискретних ієрархічних середовищ, то вони практично відсутні, за вийнятком невеликої кількості робіт.

РОЗДІЛ 2

ОСОБЛИВОСТІ ПОШИРЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ У ДИСКРЕТНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Процеси поширення хвиль у дискретних середовищах істотно відрізняються від хвильових процесів в однорідному суцільному середовищі. Тут важливу роль відіграють упаковка дисретного середовища, нелінійний і дисипативний характер взаємодії структурних елементів, їх перепакування в процесі деформування, наявність ланцюжків сил, утворених найбільш навантаженими елементами, обертальний рух елементів, тощо. Особливості хвильових полів у структурно організованих твердих тілах можуть бути використані для діагностики їх внутрішньої будови.

У розділі викладено результати дослідження двовимірних та тривимірних хвильових полів, що виникають у структурованих середовищах, а саме у гранульованих середовищах, під дією імпульсного навантаження. Досліджено деякі явища самоорганізації, а саме: утворення двопікових структур у середовищі, утвореному регулярно упакованими сферичними елементами та конвективні хвильові структури у прошарку дисперсного масиву в полі сили тяжіння.

2.1. Поширення нелінійних хвиль у двовимірному шарі гранульованого середовища з регулярною, квазірегулярною та хаотичною упаковками елементів

Структуроване, у даному випадку гранульоване середовище, оскільки між структурними елементами не існує адгезії, моделюється системою гранул у вигляді куль радіуса r [26, 27]. Гранули розташовані на гладкій поверхні та обмежені жорсткими стінками. Розглянемо кілька видів упаковки гранул: регулярну, квазірегулярну і стохастичну. Спосіб регулярного заповнення показано на рис. 2.1. За такої упаковки кожна гранула контактує з шістьма сусідніми, за винятком гранул біля стінок. Ця упаковка є максимально щільною.

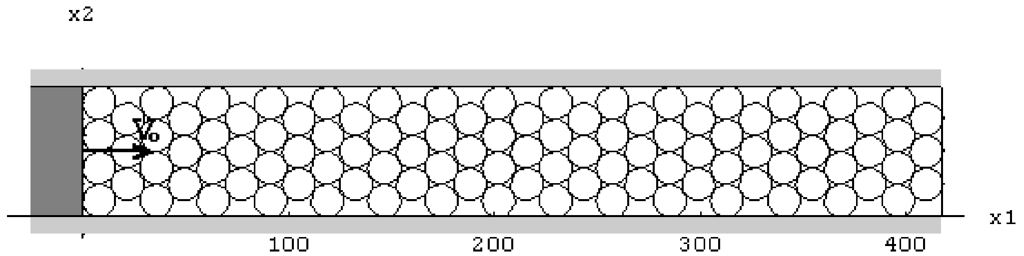


Рис. 2.1. Схема початкового розташування гранул і ударника

Квазірегулярна упаковка допускає більшу свободу для кожної гранули. Вона будується таким чином, що кожна гранула радіуса r вставляється у сферичну комірку з радіусом $r_1 = r + \Delta r$, $\Delta r << r$, причому розташування всередині такої комірки є випадковим. Комірки розташовуються в обчислювальній області регулярно. Очевидно, що в процесі деформування системи гранула може взаємодіяти не з усіма шістьма сусідами. Отже, така система є менш консолідованою. І третій, найбільш деконсолідуючий спосіб упаковки полягає в тому, що розміщення гранул в області $0 \le x_1 \le L$, $0 \le x_2 \le d$ є випадковим. Процедура заповнення здійснюється так, що кожна наступна гранула розміщується випадково, але не має перетинатись з раніше розташованими гранулами. Імпульсне збурення у такому середовищі генерується ударником, який в початковий момент рухається зі швидкістю V_0 (рис. 2.1).

Взаємодія між гранулами здійснюється через поверхні контакту і сила взаємодії двох гранул $\boldsymbol{F}_{ij}$ залежить від величини зближення їх центрів [25−27, 60]

$$\delta_{ij} = 2r - \sqrt{\sum_{k=1,2} \left(x_i^k - x_j^k\right)^2} \,, \tag{2.1}$$

де x_i^k , x_j^k − координати центрів відповідно i-ї та j-ї гранул.

Силу $\boldsymbol{F}_{ij}$ можна розкласти на силу, що діє вздовж лінії, яка з’єднує центри мас гранул $\boldsymbol{F}_{ij}^n$, та силу, спрямовану перпендикулярно до цієї лінії, $\boldsymbol{F}_{ij}^s$. Сила $\boldsymbol{F}_{ij}^n$ нелінійно залежить від величини δ_{ij}

$$\boldsymbol{F}_{ij}^n = C_n \delta_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{n}_{ij} \,. \tag{2.2}$$

Тут C_n − константа, яка згідно із законом Герца визначається як

$$C_n = \frac{E\sqrt{2r}}{3\left(1-\nu^2\right)}, \tag{2.3}$$

де E − модуль Юнга; ν − коефіцієнт Пуассона; $\alpha = 3/2$ [312], $\boldsymbol{n}_{ij}$ − одиничний вектор, спрямований вздовж лінії, що з’єднує центри гранул.

Дотична сила $\boldsymbol{F}_{ij}^s$ залежить від відносного зсуву вздовж лінії, перпендикулярної вектору $\boldsymbol{n}_{ij}$

$$\frac{d\boldsymbol{F}_{ij}^s}{dt} = -C_s \boldsymbol{w}_{ij} \,, \tag{2.4}$$

якщо $F_{ij}^s < C_s F^n$ та

$$\boldsymbol{F}_{ij}^s = C_k \frac{\boldsymbol{w}_{ij}}{w_{ij}} F_{ij}^n, \tag{2.5}$$

якщо $\boldsymbol{F}_{ij}^s$, обчислене за формулою (2.4), задовольняє умову $F_{ij}^s \geq C_k F_{ij}^n$. У рівняннях (2.4) і (2.5) $\boldsymbol{w}_{ij}$ − відносна швидкість проковзування двох гранул i та j

$$\boldsymbol{w}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{n}_{ij}((\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j), \boldsymbol{n}_{ij}) + (2r - \delta_{ij})[\boldsymbol{n}_{ij} \cdot (\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_j)], \tag{2.6}$$

де $\boldsymbol{v}_i$ і $\boldsymbol{\omega}_i$ − лінійна та кутова швидкості *i*-ї гранули, C_k − коефіцієнт тертя.

Рух *i*-ї гранули описується системою диференційних рівнянь

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} , \tag{2.7}$$

$$I_i \frac{d^2 \boldsymbol{\Phi}_i}{dt^2} = \sum_j \boldsymbol{M}_{ij} , \tag{2.8}$$

де $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\Phi}_i, m_i, I_i$ − відповідно, радіус-вектор, кутова координата, маса, момент інерції *i*-ї гранули; $\boldsymbol{M}_{ij}$ − момент сили, що діє на *i*-у гранулу з боку *j*-ї гранули. Додавання здійснюється для всіх *j*-х гранул, які мають контакт з *i*-ю гранулою.

На межах $x_2 = 0$ і $x_2 = d$, а також на поверхні поршня $x_{ps} = x_{ps}(t)$, $0 \le x_2 \le d$ задаються умови, як на жорстких стінках: $[\boldsymbol{F}_i^n] = 0$, де $\boldsymbol{F}_i^n$ − нормальна до поверхні сила, що діє з боку *i*-ї гранули. У початковий момент часу $t = 0$ гранули знаходяться у стані спокою $v_i = 0$, $i = 1$, *N*, де *N* − загальна кількість гранул.

Система рівнянь (2.2)−(2.8) розв’язувалася чисельно з використанням алгоритму Верле [313, 314]. Розрахунок проводився у дві стадії: на першій – чисельно інтегрувались рівняння (2.7) та (2.8) і на основі отриманих значень $\boldsymbol{x}_i$ і $\boldsymbol{\Phi}_i$ за допомогою співвідношень (2.2)−(2.6) знаходили сили $\boldsymbol{F}_{ij}$. У розрахунках задавались такі значення констант: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0{,}29$; $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $C_s = 2{,}7 \cdot 10^6$ Н/м, $C_k = 0{,}4$.

Для перевірки правильності отриманих результатів упродовж усіх розрахунків обраховувалась сумарна енергія системи *E*, що складається з кінетичної енергії поршня E_{ps}, сумарної кінетичної енергії гранул E_k, сумарної енергії пружної взаємодії між гранулами та між гранулами і стінками E_p, сумарної обертальної енергії всіх гранул E_r та частини енергії, яку було використано на роботу всіх сил тертя E_d.

Дискретизацію за часом вибрано з міркувань стійкості чисельного розрахунку, мінімізації втрат сумарної енергії та мінімізації сумарного часу розрахунку. Слід зауважити, що сумарна енергія E в чисельних експериментах зберігалась з точністю не вище 0,3 %. Крім того, для оцінки точності одержаних результатів розраховано тестові задачі. Спочатку розраховувалась і аналізувалась взаємодія двох кульок (центральний удар і удари під різними кутами), а також взаємодія кулі з нерухомою та рухомою стінками.

Чисельно розв’язано задачу щодо поширення нелінійної хвилі у каналі з жорсткими стінками, заповненому масивом гранул з регулярною упаковкою. Масив складався із 2900 елементів. Генерація хвилі здійснюваась ударником, товщиною 10*r*, що рухався паралельно стінкам каналу (рис. 2.1) і в момент зіткнення із гранулами мав швидкість $V_0 = 10$ м/с.

На рис. 2.2 показано залежності горизонтальної компоненти швидкості гранул $V_1(x_1, x_2)$, одержані в результаті комп’ютерних розрахунків для чотирьох різних моментів часу. Видно, що хвильове поле має досить складну конфігурацію. Слідом за головною хвилею в зафронтовій області виникає ряд відбитих хвиль, кількість яких з часом зростає. Типовою особливістю цього хвильового процесу є те, що у фронтовій області утворюється двопікова структура, яка, хоча і має коливальний характер, проте не руйнується впродовж усього терміну розрахунків, до $t_{\max} = 1{,}37 \cdot 10^{-3}$ с. Це добре видно на рис. 2.3, де показані залежності компоненти швидкості V_1 від часу для чотирьох різновіддалених від початку координат точок. У зафронтовій області мають місце численні осциляції, пов’язані з хвилями, відбитими від

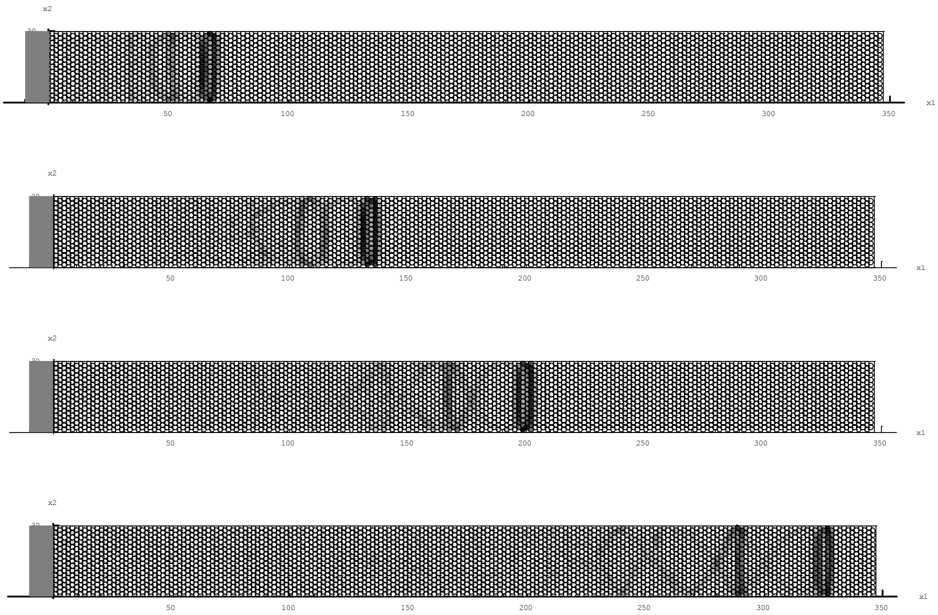


Рис. 2.2. Поля швидкостей $V_1(x_1, x_2)$ в моменти часу t =0,14 (*а*); 0,28 (*б*); 0,41 (*в*); 0,69 мс (*г*). Темному забарвленню гранул відповідає більша швидкість. Регулярна упаковка гранул.

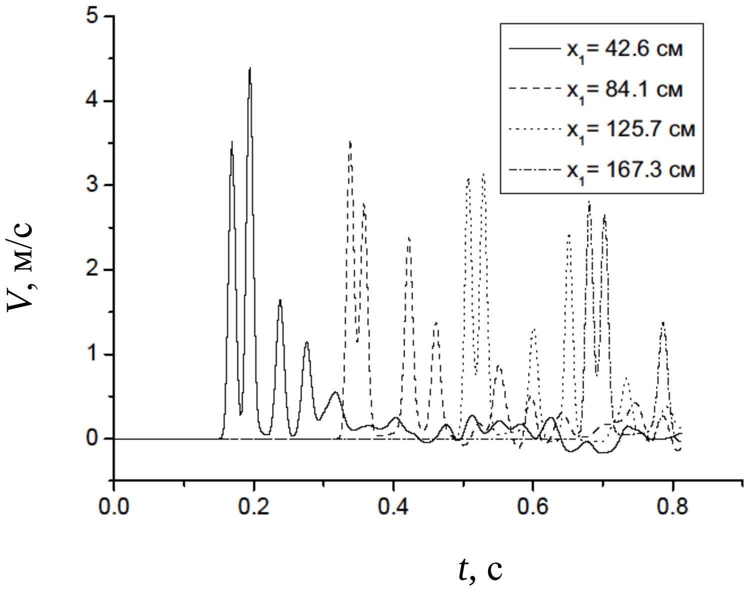
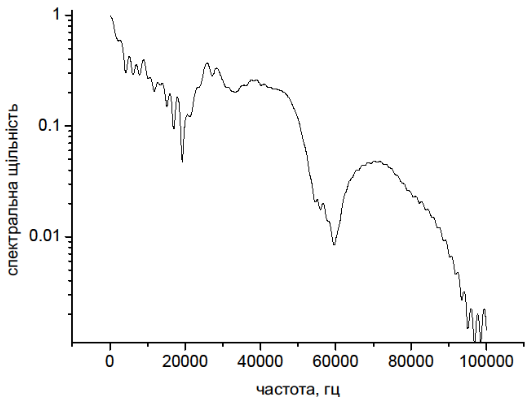


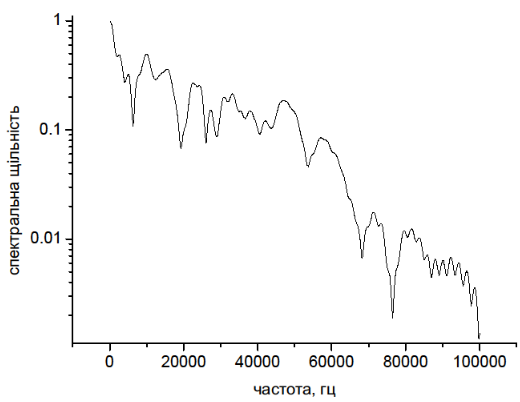
Рис. 2.3. Залежності швидкості v_1 від часу для чотирьох точок, розташованих на осі симетрії каналу (x_2 = 15 см) та на різних відстанях від початку координат.

стінок каналу. Відповідно, спектри збурень, які наведені на рис. 2.4 для чотирьох різних точок, надзвичайно складні, і тому практично неможливо виділити якісь характерні частоти. Проте, якщо відрізати від усього збурення лише двопікове утворення, про яке йшлося вище, і побудувати його спектр, то легко можна виділити дві характерні частоти ν_1 і ν_2 (рис. 2.5), причому подібний вигляд мають спектри, побудовані аналогічним способом для всіх шести реперних точок, розташованих рівномірно вздовж каналу, з координатою $x_2 = 15$ см, тобто в його центрі. Слід зауважити, що на відміну від стаціонарного процесу поширення солітоноподібної хвилі, у розглянутій системі швидкість хвилі з часом змінюється. Проте, як показують розрахунки, у п'яти реперних точках, за винятком першої, найближчої до поршня, числа Струхала $S_1 = \nu_1 r/D$ і $S_2 = \nu_2 r/D$, де D − швидкість фронту хвилі, є постійними: $S_1 = 0{,}15$, $S_2 = 0{,}30$. Отже, процес поширення двопікової структури є самоподібним. В області, де розташована перша (найближча до поршня) реперна точка, очевидно, відбувається перехідний процес формування стійкого двопікового утворення.

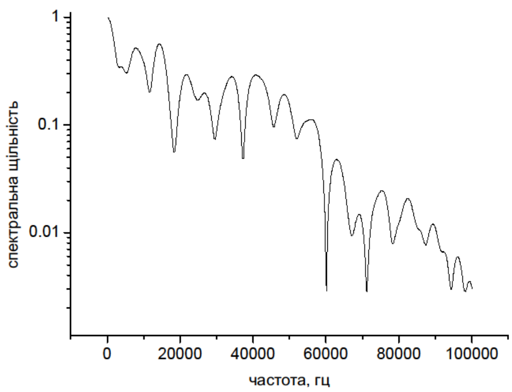
Також проведені розрахунки поширення нелінійної хвилі у каналі, заповненому кулями радіусом $2r$ і $3r$, та для системи з гранулами радіусом r, генерованої ударником, швидкість якого в початковий момент $V_0 = 1$ м/с. Числа Струхала для цих розрахунків відповідно $S_1 = 0{,}15$, $S_2 = 0{,}30$. Така подібність процесів може бути використана для діагностування розмірів структури. Для цього потрібно в кількох точках заміряти швидкість поширення попереднього фронту хвилі, побудувати спектр подвійної структури і перевірити самоподібність згаданого хвильового процесу. Потім слід змоделювати подібний процес для визначення чисел Струхала і на основі розрахованого у модельному процесі числа Струхала визначити за характерними частотами і швидкістю фронта хвилі типовий розмір елементів діагностованого структурованого середовища.



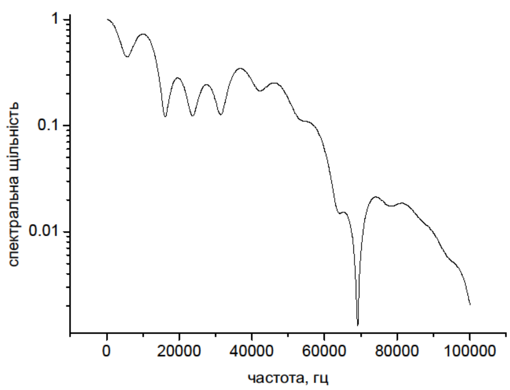
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.4. Спектри сигналів $V_1(t)$ для чотирьох точок, розташованих на осі симетрії каналу ($x_2 = 15$ см) та на різних відстанях (в см) від початку координат: $x_1 = 42{,}6$ (*а*); 84,1 (*б*); 125,7 (*в*); 167,3 (*г*).

На рис. 2.6 показані залежності всіх видів енергії від часу. Видно, що система має тенденцію до накопичування з часом енергії в обертальних ступенях свободи гранул.

Поршень після удару об систему гранул зупиняється, потім починає рухатись у протилежний бік, а згодом його енергія, а отже, і швидкість, стають постійними. У зв’язку з цим об’ємним розширенням системи з боку поршня її потенційна енергія з часом зменшується.

Наступна серія розрахунків проведена для квазірегулярної структури. Розглянуто три моделі, в яких радіуси r_1 комірок з розташованими в них

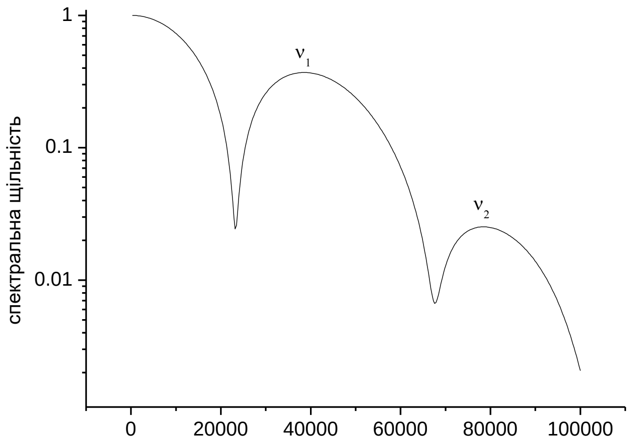


Рис. 2.5. Спектр двопікового хвильового утворення для гранули з координатами $x_1 = 167{,}3$, $x_2 = 15{,}0$ см.

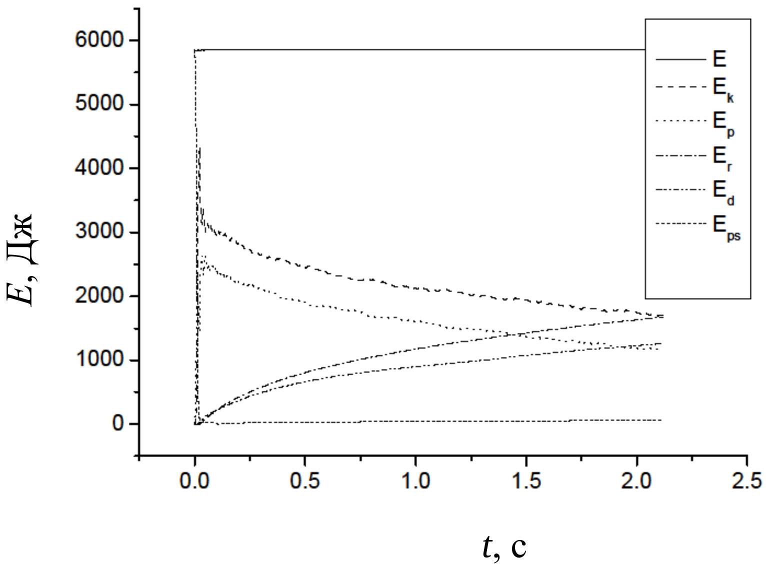


Рис. 2.6. Розподіл енергії за видами залежно від часу: E − повна енергія; E_k − кінетична енергія всіх гранул; E_p − потенційна енергія; E_r − енергія обертання; E_d − енергія дисипації; E_{ps} − енергія ударника.

гранулами, відповідно становили 1,001; 1,01 і 1,1 см. В результаті розрахунків встановлено, що хвильові процеси в цих трьох випадках принципово різні. Для упаковки з розміром комірки $r_1 = 1{,}001$ см хвильова картина повністю подібна до хвильової картини в регулярно упакованому середовищі. Обчислені числа Струхала для двопікової структури мають ті самі значення: $S_1 = 0{,}15$, $S_2 = 0{,}30$. Проте швидкість хвилі на 7 % менша за її швидкість у регулярно упакованій системі.

Принципові відмінності щодо поведінки системи починаються з розміру комірки $r_1 = 1{,}01$ см. У цьому випадку відсутня чітка лінія фронту, він має розмитий нерівномірний характер (рис. 2.7). Осциляції швидкості гранули майже хаотичні (рис. 2.8, *а*). Про це свідчать і спектри сигналів, у яких є багато піків.

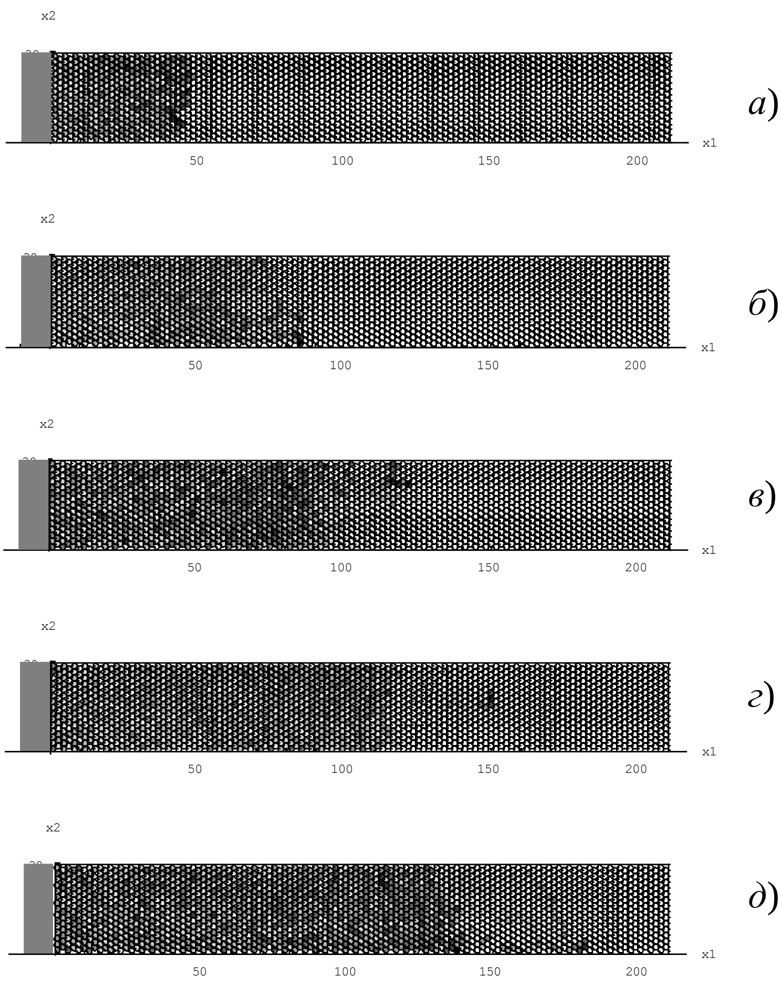
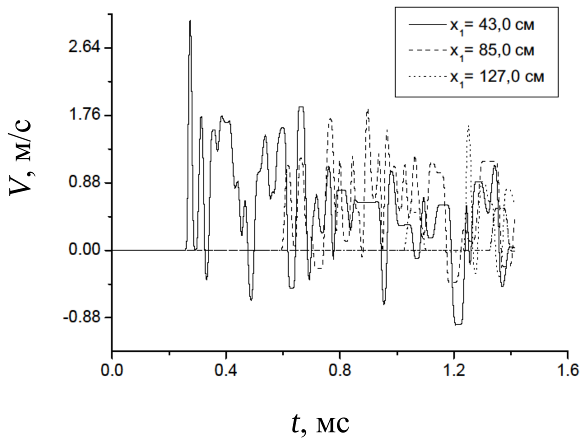
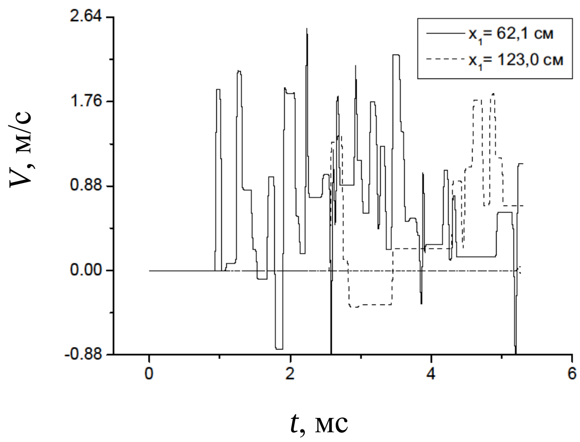


Рис. 2.7. Поля швидкості $V_1(x_1, x_2)$ в моменти часу $t = 0{,}28$ (*а*); 0,57 (*б*); 0,85 (*в*); 1,13 (*г*); 1,41 мс (*д*). Темнішому забарвленню гранул відповідає більша швидкість. Квазірегулярна упаковка гранул. Розмір комірок 1,01см.

Зовсім відмінною від регулярно упакованої системи є хвильова картина, якщо гранули знаходяться у найбільш вільному стані в регулярній сітці комірок. У цьому випадку фронт хвилі взагалі відсутній, а збурення поширюється в глибину масиву за окремими ланцюжками.



а)



б)

Рис. 2.8. Залежності швидкості v_1 від часу для трьох (*а*) і двох (*б*) точок, розташованих на осі симетрії каналу ($x_2 =$ 15,2, 16,5 см, відповідно) і на різних відстанях від початку координат. Розмір комірки: *а*) 1,01 см; *б*) 1,1 см.

На рис. 2.9 видно, що основне збурення не пройшло і половини каналу, а з останнього ряду вже вилетіла одна гранула (темнішому забарвленню гранул відповідає більша швидкість). Отримані залежності швидкості від часу для двох реперних точок показані на рис. 2.8, *б*. Осциляції швидкості мають теж хаотичний характер.

Також проведені розрахунки поширення імпульсного збурення і в масиві з випадковим розміщенням гранул. На рис. 2.10 показано еволюцію хвильових полів швидкостей гранул. Видно, що фронт хвилі хоч і розмитий, але на відміну від попереднього випадку, його можна ідентифікувати.

Залежності лінійної швидкості гранул від часу також мають вигляд хаотичних осциляцій.

Отже, в результаті проведеного моделювання процесу поширення імпульсних збурень в структурованому середовищі з нелінійною взаємодією між структурними елементами, різними способами їх упаковки та різними розмірами показано, що хвильові процеси в структурованому середовищі мають принципові відмінності від аналогічних процесів в однорідних твердих тілах.

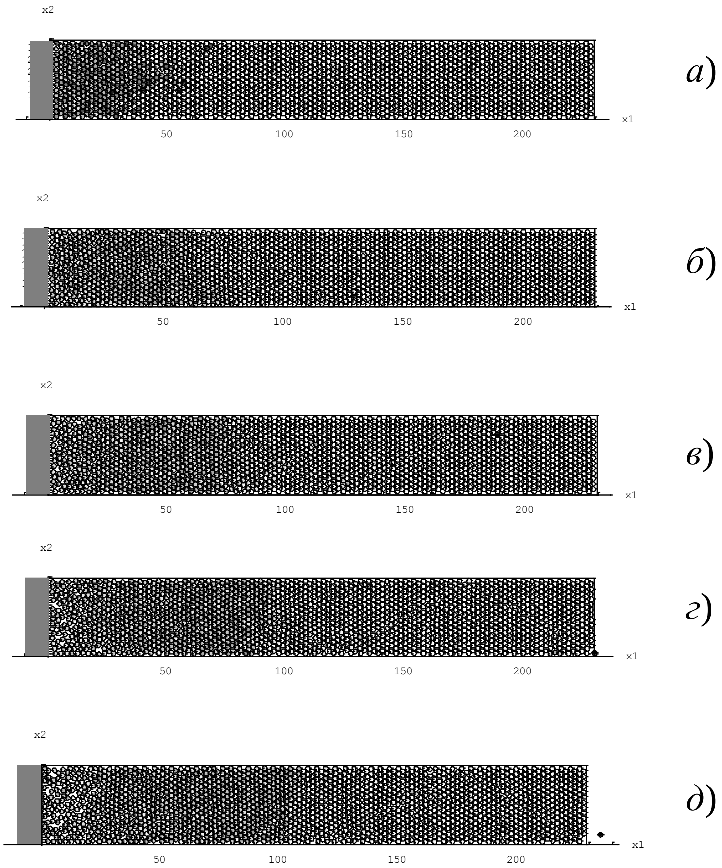


Рис. 2.9. Поля швидкості $V_1(x_1, x_2)$ в моменти часу t = 1,06 (*а*); 2,12 (*б*); 3,18 (*в*); 4,24 (*г*); 5,30 мс (*д*). Квазірегулярна упаковка гранул. Розмір комірок 1,1 см.

Встановлено, що в регулярно упакованій системі гранул, розташованих в каналі з жорсткими стінками, утворюється стійка хвильова структура, яка зберігає подібність упродовж всього процесу поширення хвилі, за винятком невеликого проміжку часу на початку процесу генерування хвилі під час її формування. Незмінність числа Струхала для хвиль, що поширюються у системах з різними розмірами гранул, а також хвиль різної інтенсивності, дає змогу побудувати метод діагностування структури за параметрами стійкого хвильового утворення на фронті: груповою швидкістю і характерними частотами в спектрі певного утворення. Розрахунки хвильових процесів у квазірегулярно упакованому середовищі з розміром комірки $r_1 = 1{,}001r$, в яке випадково вміщується гранула радіусом r

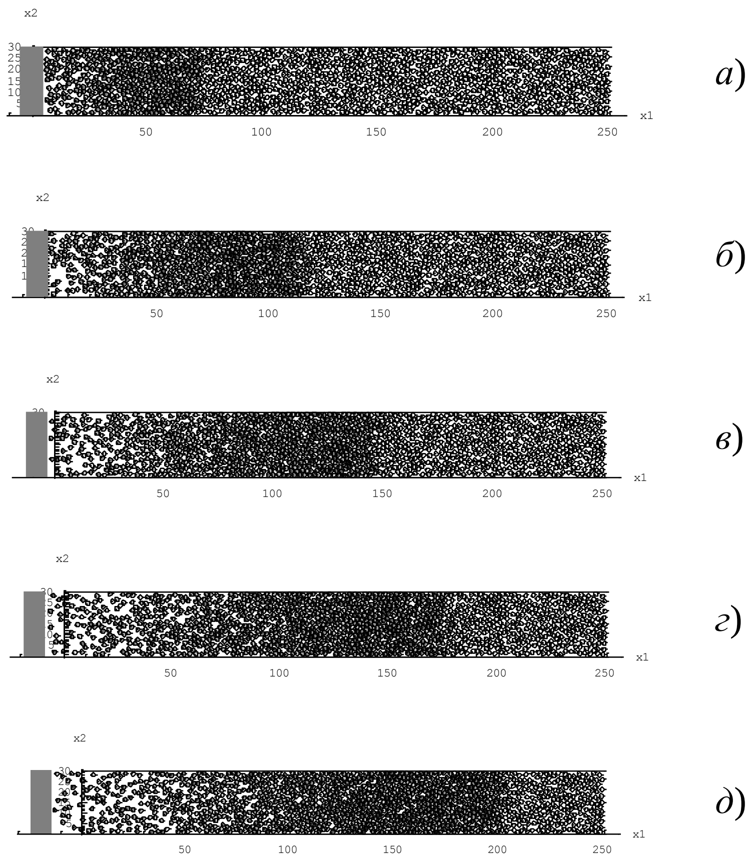


Рис. 2.10. Поля швидкості $V_1(x_1, x_2)$ в моменти часу $t = 3{,}18$ (*а*); 6,36 (*б*); 9,54 (*в*); 12,72 (*г*); 15,89 мс (*д*). Темнішому забарвленню гранул відповідає більша швидкість. Стохастична упаковка гранул.

показали, що в такому випадку також генерується хвильове утворення, для якого число Струхала є тією самою константою, що і для регулярної компактної упаковки. Подальше збільшення розміру комірки приводить до якісної зміни хвильових полів за аналогічних крайових умов. Масові швидкості гранул мають хаотично коливальний характер. Такий самий характер мають ці швидкості і для середовища, утвореного випадково розташованими в каналі гранулами.

2.2. Спектральна еволюція хвилі в дискретному середовищі з нелінійністю

Для дослідження еволюції хвилі у дискретному середовищі розглядається задача про поширення плоскої хвилі у двовимірному гранульованому масиві [48]. Масив утворений сферичними гранулами трьох розмірів: $r =$ 1, 0,5, 0,25 см. Сумарні маси гранул одного розміру однакові, всього – 6720 штук. Взаємодія між гранулами, що контактують, описується моделлю Герца (2.2) – (2.5). Оскільки взаємодіяти можуть гранули з різними розмірами, то формули (2.1), (2.3) та (2.6) відповідно матимуть вигляд:

$$\delta_{ij} = r_i + r_j - \sqrt{\sum_{k=1,2}\left(x_i^k - x_j^k\right)^2}\,, \tag{2.9}$$

де x_i^k, x_j^k – координати центрів, r_i, r_j радіуси i-ї та j-ї гранул.

$$C_n = \frac{\sqrt{2}E}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right)^{-1/2}, \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{w}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{n}_{ij}((\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j), \boldsymbol{n}_{ij}) + (r_i + r_j - \delta_{ij})[\boldsymbol{n}_{ij} \cdot (\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_j)]. \tag{2.11}$$

Система рівнянь (2.7) – (2.8) для гранул з різними розмірами також розв’язувалась за допомогою алгоритму Верле. В початковий момент часу гранули випадково розташовуються в прямокутній області $0 \le x_1 \le L_1$, $0 \le x_2 \le L_2$. Таке заповнення не дає щільної упаковки, тому спочатку проводилось ущільнення системи.

Система гранул приводиться в рух за допомогою поршня, який в початковий момент рухається зі швидкістю V_0 у напрямку x_1. Обчислення усередненої масової швидкості в масиві здійснюється наступним чином: виділяється уявна площина, перпендикулярна до осі x_1, яка рухається зі швидкістю V в напрямку x_1 таким чином, що сумарний потік імпульсу гранул зліва дорівнює потоку імпульсу гранул справа. Обчислюється усереднена швидкість на чотирьох відстанях від початку координат. Розрахунок припиняється в той момент, коли відбита від вільної поверхні хвиля розрідження досягає останньої площини.

Розподіл масових швидкостей за гранулами в момент часу $t = 0{,}03$ с показано на рис. 2.11. Тут також зображено розташування чотирьох темних смуг, в яких обчислюються усереднені швидкості. Видно, що розподіл швидкостей у середовищі суттєво неоднорідний. На рис. 2.12 зображені чотири залежності усередненої швидкості від часу. При цьому має місце

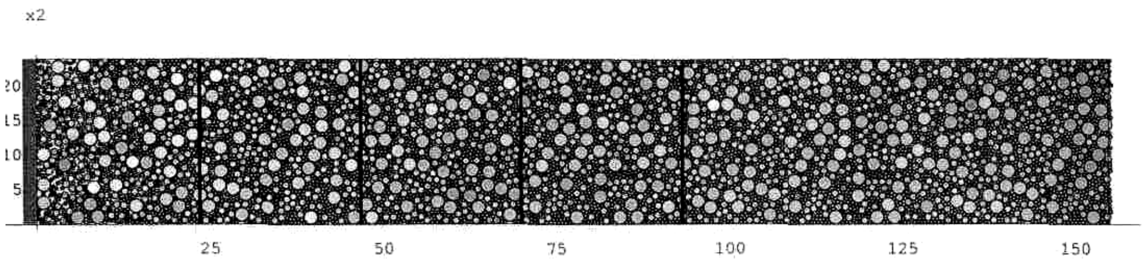


Рис. 2.11. Поле швидкостей $V(x_1, x_2)$ в момент часу $t = 0{,}03$ с. Темніший колір відповідає більшій швидкості.

затухання хвилі. Спектри цих сигналів подані на рис. 2.13. Видно, що спектри на різних відстанях від початку координат x_1 відрізняються один від одного. Тут має місце зростання з відстанню вкладу високих частот, тобто середовище веде себе як суттєво нелінійне. Подібний ефект спостерігався у експериментах з поширенням хвилі у стержні з пісковику [315].

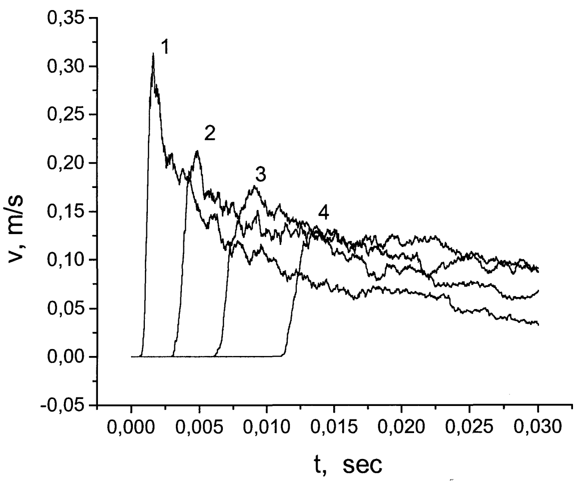
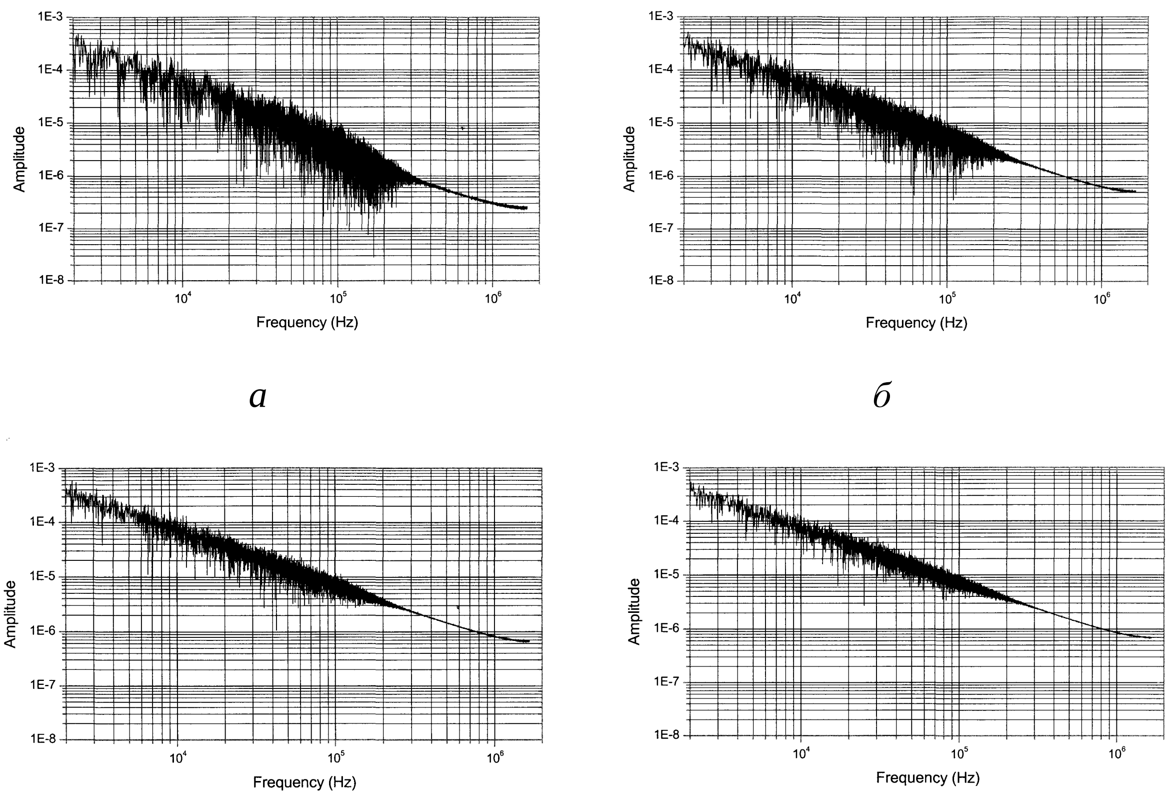


Рис. 2.12. Залежність усередненої швидкості від часу для відстаней: (*а*) $x_1 = 23{,}2$ см; (*б*) $x_1 = 46{,}4$ см; (*в*) $x_1 = 69{,}7$ см; (*г*) $x_1 = 92{,}8$ см.



а *б*

в *г*

Рис. 2.13. Спектри сигналів, зображених на рис. 2.12: (*а*) $x_1 = 23{,}2$ см; (*б*) $x_1 = 46{,}4$ см; (*в*) $x_1 = 69{,}7$ см; (*г*) $x_1 = 92{,}8$ см.

2.3. Особливості утворення та поширення солітоноподібних хвиль у дискретному середовищі з пружно-пластичною взаємодією між елементами структури

В процесі моделювання динаміки структурованого середовища взаємодію між елементами структури найчастіше описують законом Герца. Проте, як свідчать експериментальні дослідження динамічного та статичного навантаження металевих поверхонь стальними кульками, залишкові деформації в металах з високою твердістю поверхні виникають при досить невеликих швидкостях удару [316]. Тому важливим є дослідити як пластичні властивості матеріалу елементів структури впливають на загальну картину деформування дискретного середовища. Як правило, дисипативні властивості взаємодії дискретних елементів враховують, вводячи ефект реституції [237]. Але такий підхід не описує конкретний дисипативний механізм, а також не враховується залежність дисипативних втрат від характеристик взаємодії гранул.

Зупинимось на дослідженні процесу поширення нелінійної хвилі в дискретному одновимірному середовищі, тобто в ланцюгу, за умови, що взаємодія між елементами описується пружно-пластичною моделлю [316]. Згідно з цією моделлю при зближенні двох елементів до відстані δ_p взаємодія є пружною і описується законом Герца (2.2). При подальшому зближенні гранул, тобто коли $\delta \geq \delta_p$, область в околі контакту переходить в пластичний стан, нормальна сила F набуває вигляду

$$F = 2\pi r P_p \delta_p, \qquad (2.12)$$

де P_p – тиск, при якому починається пластична течія, $\delta_p = (2\pi r P_p / C)^2$. Розвантаження системи двох гранул відбувається за пружним законом, тобто після досягнення максимального зближення δ_m сила взаємодії F обчислюється за формулою

$$F = C(\delta - \delta_k)^{3/2}, \quad (2.13)$$

де δ_k – залишкова пластична деформація після закінчення взаємодії двох елементів. Величина залишкової пластичної деформації обчислюється за формулою [30]

$$\delta_k = \delta_m - \left(\frac{2\pi r P_p \delta_m}{C}\right)^{2/3}. \quad (2.14)$$

Хвиля генерується ударом першого структурного елемента зі швидкістю V_0. Система звичайних диференційних рівнянь та чисельна реалізація системи, яка використовується в розрахунках, описана в підрозділі 2.1. В розрахунках вибирались такі константи: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}29$, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $r = 0{,}01$ м, $P_p = 1{,}5 \cdot 10^9$ Па, V_0=30 м/с, кількість елементів структури $N = 120$.

Розрахунки показують, що в результаті удару в ланцюгу дискретного середовища поширюється відокремлена хвиля, амплітуда якої спочатку зменшується, а потім залишається фіксованою. На рис. 2.14 наведені отримані в розрахунку залежності сил, що діють на різні елементи ланцюга від часу, а також сила F_p, при якій взаємодія між гранулами потрапляє в пластичну область. Видно, що сила, яка діє на другу гранулу в ланцюгу, набагато перевищує поріг пластичності. Це також добре продемонстровано на діаграмі деформування, яка наведена на рис. 2.15, *а*. В наступних реперних елементах сила F спадає з відстанню від початку ланцюга і вже в 45-му елементі взаємодія із сусіднім елементом стає суто пружною (рис. 2.14). Надалі в ланцюгу розповсюджується солітон із герцівською пружною взаємодією з пороговим значенням сили взаємодії F_p. Це добре видно на рис. 2.16, де зображено розподіл швидкості за елементами структури для п'яти різних

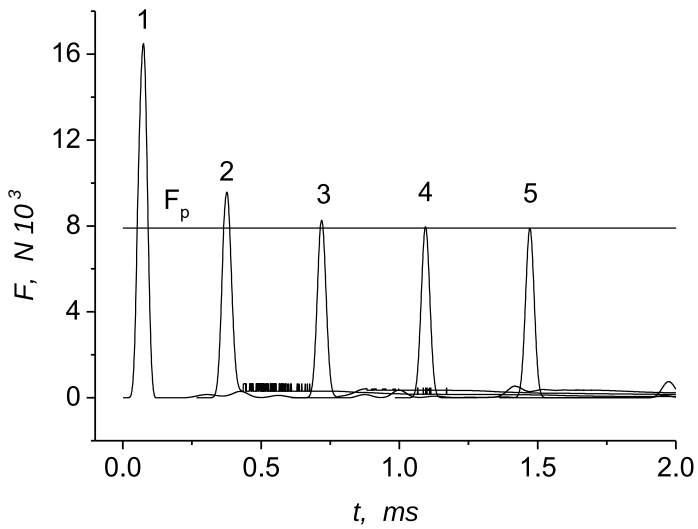
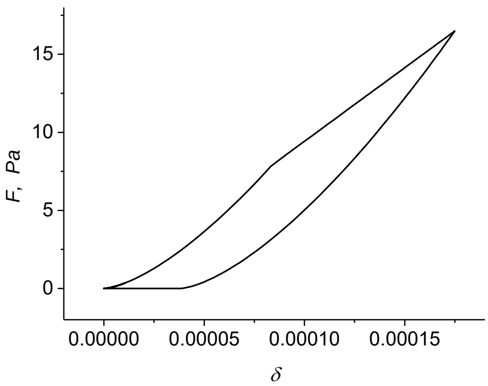


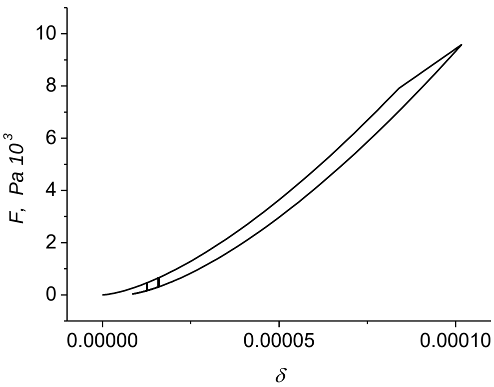
Рис. 2.14. Залежності сили F, яка діє на i-й елемент ланцюга від часу t: 1) $i = 3$, 2) $i = 15$, 3) $i = 30$, 4) $i = 45$, 5) $i = 60$, F_p – межа пластичності.

моментів часу. На рис. 2.17 показана залежність числа Струхала $S = v\tau / r$ від номера елемента i, де v – максимальна швидкість i-го елемента, τ – напівширина імпульсу, який реєструється в i-му елементі, r – розмір i-го елемента. Отже, число Струхала зменшується з відстанню від початку ланцюга в тій області, де взаємодія між елементами спричиняє пластичне деформування і залишається незмінним ($S = 0{,}029$) в області, де взаємодія є пружною.

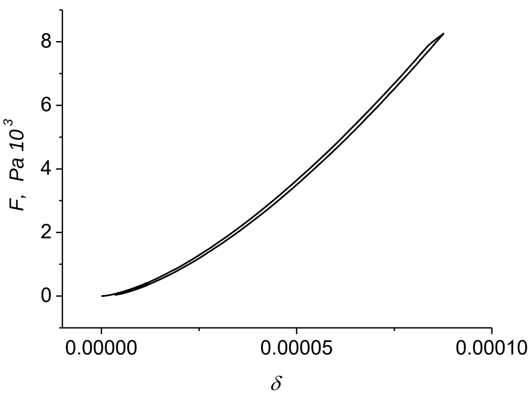
Також були проведені розрахунки поширення у ланцюгу елементів з пружною герцівською взаємодією нелінійної хвилі, згенерованої ударом першого елемента з тією ж швидкістю $V_0 = 30$ м/с. У цьому випадку число Стоухала було рівним $S = 0{,}066$ і звичайно ж залишалося незмінним вздовж всього ланцюга. Таким чином, вимірюючи зміну числа Струхала для відокремленої хвилі з відстанню, можна оцінити характер взаємодії між структурними елементами.



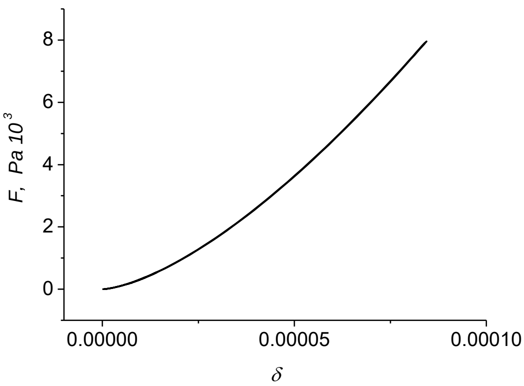
а



б



в



г

Рис. 2.15. Діаграми деформування $F(\delta)$ для елементів, які знаходяться на різних відстанях від початку ланцюга: *а*) $i=3$, *б*) $i=15$, *в*) $i=30$, *г*) $i=45$, i – порядковий номер елемента в ланцюгу.

Отже, в рамках моделі пружно-ідеальнопластичного тіла проведено комп'ютерне моделювання процесу поширення нелінійної хвилі у ланцюгу дискретних елементів. Отримано, що в такому середовищі амплітуда хвилі затухає до досягнення порогового значення, коли взаємодія між елементами структури стає пружною. Надалі в середовищі поширюється солітоноподібна хвиля з пороговою амплітудою. При цьому число Струхала у відокремленій хвилі змінюється, якщо взаємодія між елементами структури пружнопластична і залишається незмінним для хвилі, що поширюється в структурованому середовищі з пружною взаємодією.

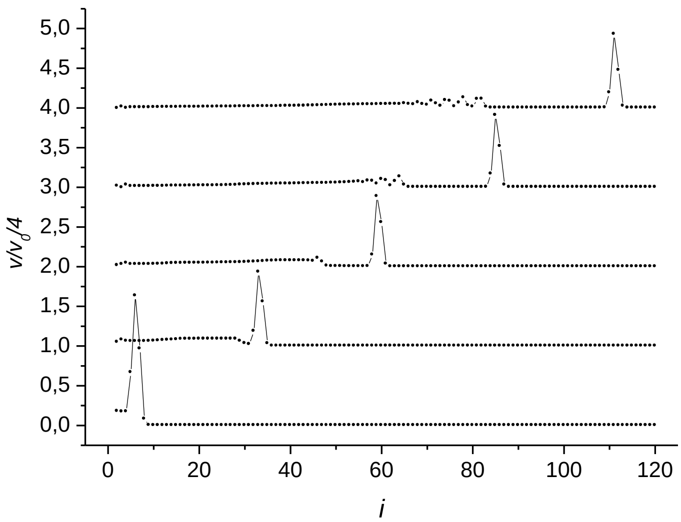


Рис. 2.16. Залежності безрозмірної швидкості V/V_0 структурних елементів від порядкового номеру i для п'яти моментів часу: $t = 0{,}13$; 0,81; 1,48; 2,15; 2,82 мс.

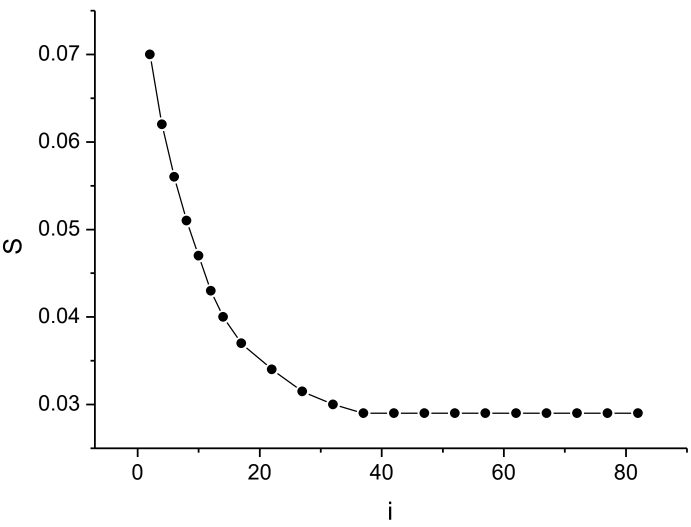


Рис.2.17. Залежність числа Струхала від порядкового номера структурного елемента i.

2.4. Особливості поширення нелінійних хвиль у двовимірному шарі гранульованого середовища в полі сили тяжіння

Особливості хвильових процесів в гранульованих середовищах при малих амплітудах досліджувалися досить детально в роботах [165-169, 173, 179]. Що стосується поширення хвиль з великими амплітудами, то ці процеси вивчені значно гірше. У даному підрозділі за допомогою числового моделювання досліджуються процеси поширення сильних нелінійних хвиль в гранульованих середовищах, згенерованих імпульсним навантаженням.

2.4.1. Нелінійні хвилі в шарі гранульованого середовища

Розглядається двовимірний процес поширення нелінійної хвилі в шарі гранульованого середовища, що знаходиться в полі сили тяжіння. Масив гранул, які утворюють гранульоване середовище, складається із 14000 елементів сферичної форми з гауссовим розподілом за розмірами з невеликою дисперсією 0,004 мм^2 (середній розмір елементів складає 0,4 мм) [37, 39]. Взаємодія між дискретними елементами описується моделлю Герца (2.2) – (2.5). Система рівнянь руху (2.7) – (2.8) також розв'язувалась методом Верле. В розрахунках вибирались такі константи: $E = 5 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0{,}25$, $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $F_0 = 40$ Н, $t_0 = 100$ мкс. Поршень генерує хвилю в результаті прикладеної до нього в напрямку осі x сили

$$F = F_0 \sin^2(\pi t / t_0) \quad \text{при} \quad t \le t_0,$$

$$F = 0 \quad \text{при} \quad t > t_0. \tag{2.15}$$

При такій ширині імпульса довжина хвилі $\lambda = 0{,}14$ м, що на порядок більше товщини і в 4 рази менше довжини шару. В процесі розрахунку на шести різних відстанях від початку координат обчислювалися усереднені швидкості $V_a = 1/n\sum_i v_x^i$, де v_x^i – горизонтальні складові швидкостей гранул, які попадають у вертикальні смуги товщиною $5r_0$. На рис. 2.18 показано фрагмент шару поблизу поршня з однією із смуг, яка знаходиться

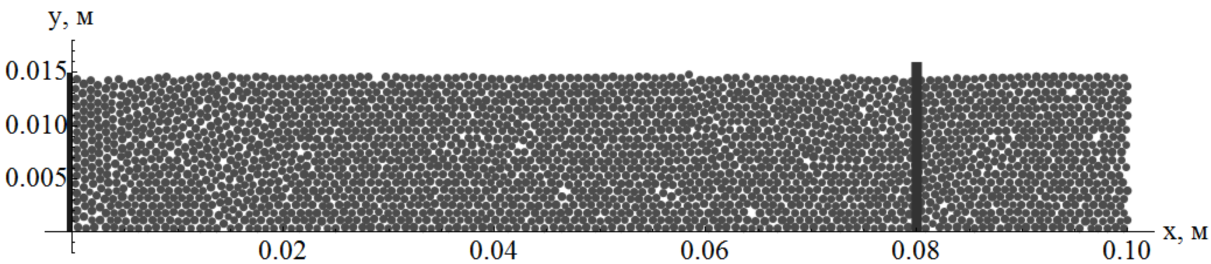
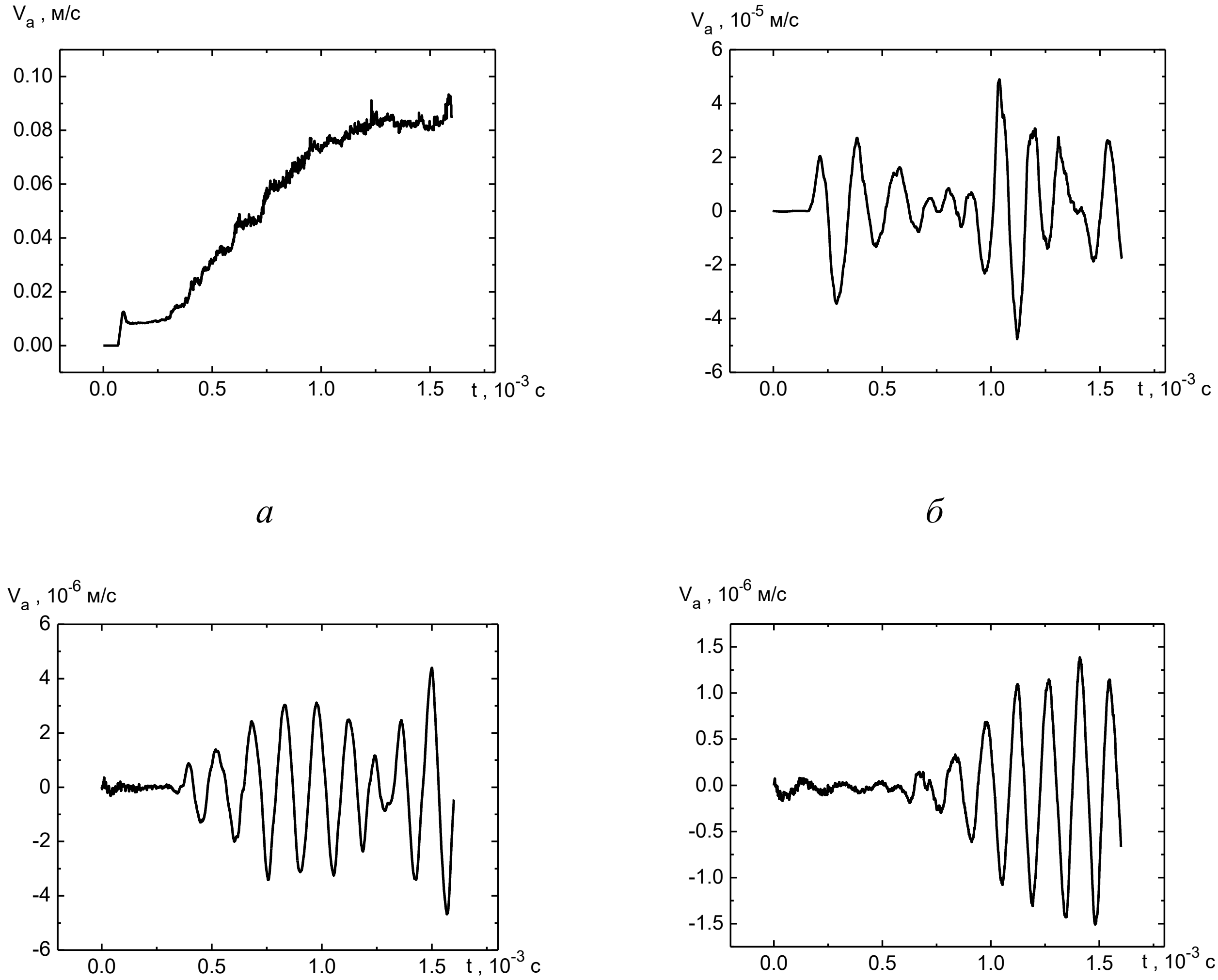


Рис. 2.18. Масив сферичних гранул. Темна смуга – область, в якій обчислюється середня швидкість.

на відстані $x = 0{,}08$ м, в якій усереднюються швидкості гранул.

Отримані в розрахунках залежності усереднених швидкостей від часу для шести значень відстаней від початку координат свідчать про те, що хвиля, згенерована імпульсним навантаженням виду (2.15), в процесі її поширення дуже швидко затухає і з часом трансформується в періодичну хвилю [37, 39, 52-54]. На рис. 2.19 наведені ці залежності для чотирьох відстаней від початку координат; на рис. 2.19, *в*, *г* видно періодичні коливання. Спектри цих залежностей (рис. 2.20) показують, що частота коливань дорівнює $\omega_0 = 6700$ Гц. Аналіз полів швидкості свідчить про те, що тут має місце когерентний рух гранул, тобто в цій області формуються характерні хвильові структури (рис. 2.20). Ці залежності отримані для коефіцієнта тертя $C_f = 0{,}2$. У випадку, якщо тертя між елементами відсутнє, періодичні структури не утворюються. Крім того, хвильова картина слабо залежить від коефіцієнта тертя: при 0,1 та 0,5 виділена частота практично не змінюється, хоча зі збільшенням коефіцієнта тертя періодичні коливання стають чіткішими. Ці факти свідчать про те, що хвильові структури пов’язані з обертальним



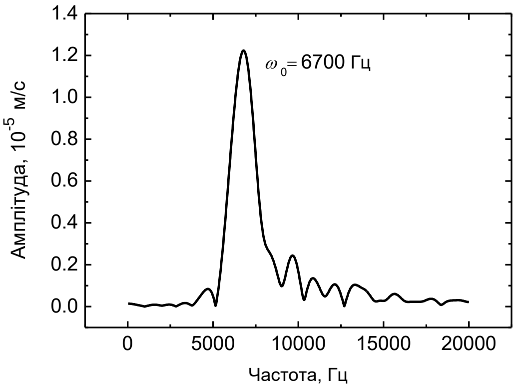
а *б*

в *г*

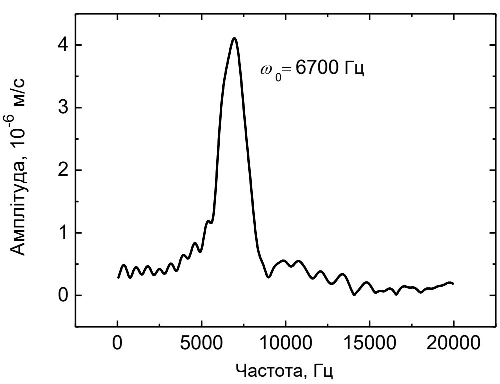
Рис. 2.19. Залежності усереднених швидкостей V_a від часу на відстанях *а*) $x = 8$ см, *б*) $x = 16$ см, *в*) $x = 24$ см, *г*) $x = 32$ см.

рухом гранул і дисипацією енергії, оскільки при відсутності сили тертя їх обертання практично відсутнє.

Для дослідження впливу розміру гранул на властивості хвильових структур були проведені розрахунки поширення хвиль в масиві із середнім розміром гранул $r_0 = 0{,}2$ мм. Для того, щоб висота залишалася тією самою, кількість гранул вибиралась рівною 64000. Розрахунки показали, що характерна частота періодичних коливань при цьому виросла до $\omega_0 = 8600$ Гц.



а



б

Рис. 2.20. Спектри залежностей усереднених швидкостей V_a від часу на відстанях $а - x = 24$ см, $б - x = 32$ см; ω_0 - виділена частота.

Ще один параметр був предметом дослідження щодо його впливу на параметри хвильових структур – товщина шару. Збільшений у товщині в два рази шар із середнім розміром гранул $r_0 = 0{,}4$ складався з 28000 дискретних елементів. У цьому випадку характерна частота періодичних коливань зменшилась майже в 1,5 рази ($\omega_0 = 4100$ Гц).

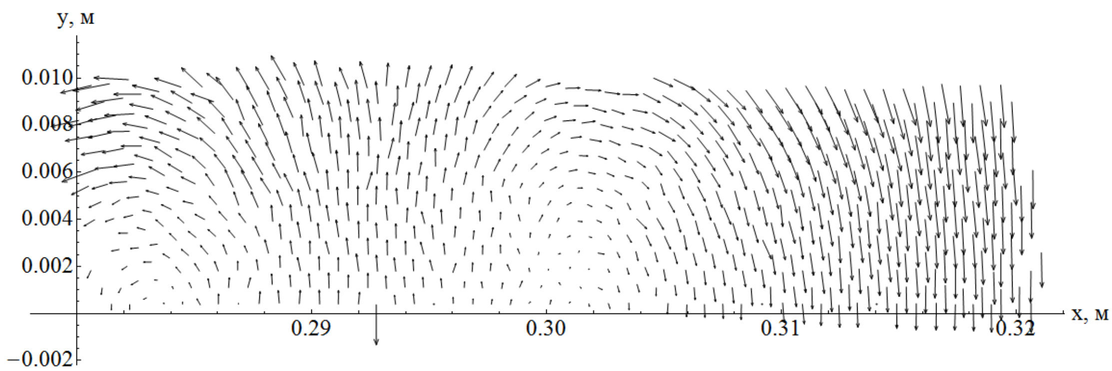


Рис. 2.21. Поле швидкостей в області 28 см $\leq x \leq$ 32 см в момент часу $t =$ 1 мс.

Таким чином, в результаті проведених розрахунків встановлено, що на параметри хвильових структур, які утворюються в шарі гранульованого середовища в полі сили тяжіння, впливає розмір гранул, висота шару, наявність сили тертя між гранулами і наявність самої сили тяжіння, оскільки в разі її відсутності, як показали розрахунки, відсутні і періодичні хвильові структури.

2.4.2. Хвилі в напруженому гранульованому середовищі

Наступна серія розрахунків проводилась для випадку, коли середовище знаходиться в напруженому стані, створюваному вантажем, розташованим на поверхні гранульованого шару (рис. 2.22). На рисунку також зображені темними смугами області, де проводилося усереднення швидкостей гранул. Спочатку система “середовище-вантаж” приводилася в стан спокою, для чого вводилася штучна в’язкість, а потім в ній генерирувалась хвиля за допомогою поршня, до якого також прикладалося навантаження (2.15). Отримані залежності усередненої швидкості від часу для шести відстаней від початку координат наведені на рис. 2.23. Видно, що у цьому випадку навіть для малого навантаження, що створюється вантажем масою $M = 0{,}01$ кг, хвильові структури не утворюються і загасання хвилі істотно менше, ніж у середовищі з вільною поверхнею. У цих розрахунках середній розмір гранул становив $r_0 = 0{,}2$ мм, а кількість гранул – 64000.

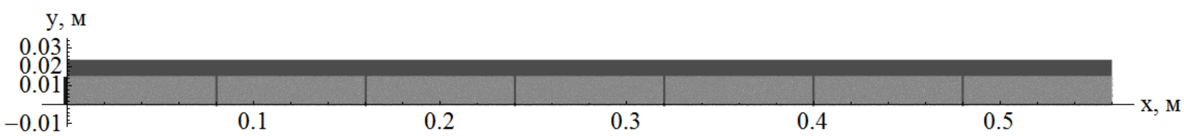


Рис. 2.22. Шар гранульованого середовища, стиснутий вантажем (темна горизонтальна смуга).

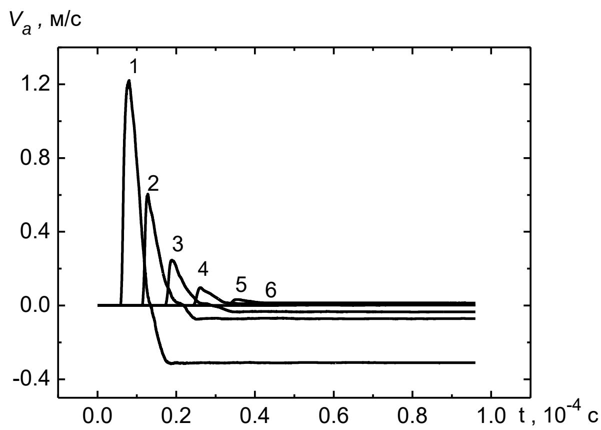


Рис. 2.23. Залежності усереднених швидкостей V_a від часу в шарі, стиснутому вантажем масою $M = 0{,}01$кг, на відстанях $x = 8$ (1), 16 (2), 24 (3), 32 (4), 40 (5), 48 см (6).

2.4.3. Хвилі у середовищі з несферичними гранулами

Розглядається випадок поширення нелінійних хвиль у середовищі, утвореному несферичними гранулами. Кожна гранула складається з двох кульових сегментів однакового радіуса, як зображено на рис. 2.24. Зручність використання такої форми гранул полягає в тому, що взаємодію їх можна описувати за допомогою моделі Герца. Об'єм і момент інерції такого дискретного елемента легко обчислити інтегруванням за двома кулями, виключаючи область перетину:

$$V_d = \frac{2}{3}\pi (r+b)^2 (2r-b), \tag{2.16}$$

$$I_d = \frac{\pi\rho}{3}\left[\frac{16}{5}r^5 + 8r^3b^2 - \frac{1}{10}(r-b)^3(16r^2 + 3rb + b^2)\right], \tag{2.17}$$

де V_d – об'єм елемента, r – радіус куль, $b = d/2$ – половина відстані між центрами куль – параметр, який задає відхилення форми елемента від сферичної; I_d – момент інерції.

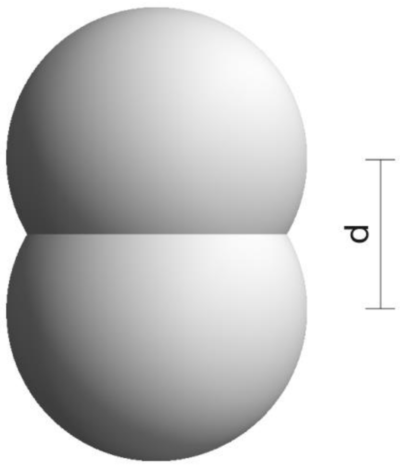
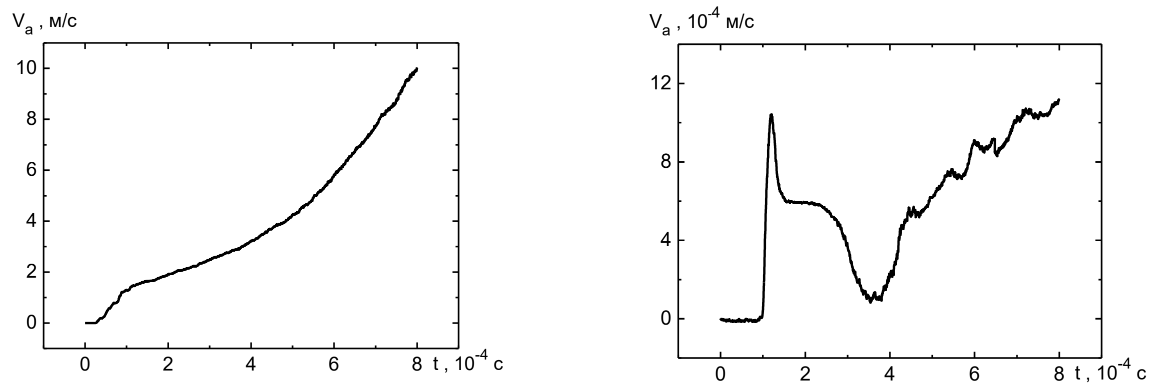


Рис. 2.24. Несферична гранула, d – відстань між центрами шарів.

Масив несферичних елементів складався з 35100 гранул з тим же гауссовим розподілом за розмірами, що і для сферичних елементів з середнім значенням $r_0 = 0{,}2$. При такій кількості гранул і параметрі несферичності $b = r/2$ масив має ті ж розміри, що і для сферичних елементів. Хвиля стиснення також генерувалась імпульсним навантаженням (2.15) з



а *б*

Рис. 2.25 Залежності усереднених швидкостей V_a від часу на відстанях *а*) $x = 2$ см, *б*) $x = 4$ см для середовища з несферичними гранулами.

аналогічними значеннями амплітуди навантаження та ширини: $F_0 = 40$ Н, $t_0 = 100$ мкс.

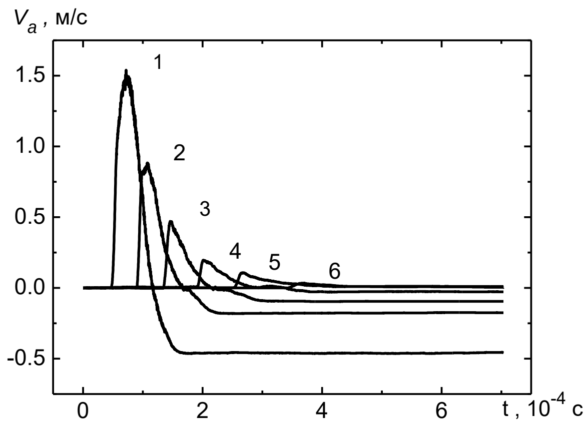


Рис. 2.26. Залежності усереднених швидкостей V_a від часу в шарі, стиснутому вантажем масою $M = 0{,}01$кг, на відстанях $x = 4$ (1), 8 (2), 12 (3), 16 (4), 20 (5), 24 см (6) для середовища з несферичними гранулами.

Розрахунки показали, що в цьому випадку має місце надзвичайно інтенсивне затухання – вже на відстані $x = 4$ см амплітуда усередненої швидкості падає до значення $V_{am} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$м/с (рис. 2.25). Якщо порівнювати зі сферичними гранулами, то таке значення амплітуди має місце тільки на відстані $x = 12$ см. При цьому, на відміну від сферичних гранул, в залежності усередненої швидкості від часу відсутні періодичні коливання, отже, хвильові структури відсутні.

Якщо таке середовище навантажити вантажем масою $M = 0{,}01$ кг, то загасання хвилі буде менш інтенсивним (рис. 2.26). На відстані $x = 4$ см в ненавантаженому середовищі амплітуда швидкості дорівнює $V_{am} = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$м/с, а в навантаженому $V_{am} = 1{,}51$м/с, тобто амплітуди відрізняються на три порядки.

Отже, в результаті проведеного числового моделювання встановлено, що в шарі гранульованого середовища зі сферичними гранулами, що знаходиться в полі сили тяжіння, можуть формуватися періодичні хвильові структури, параметри яких залежать від розміру гранул і висоти шару. Величина коефіцієнта тертя між гранулами слабо впливає на параметри періодичних хвильових структур. За відсутності тертя, коли також відсутній обертальний рух гранул, хвильові структури не виникають. Якщо шар знаходиться в напруженому стані, створюваному вантажем, розташованим на поверхні гранульованого шару, за відсутності вільної поверхні хвильові структури відсутні, а загасання хвилі істотно менше, ніж у середовищі з вільною поверхнею.

Для середовища з несферичними гранулами характерно дуже сильне згасання хвилі. В такому середовищі не спостерігається утворення хвильових структур. Воно дуже чутливе до початкового напруженого стану. Навіть при невеликому навантаженні середовища (маса вантажу 0,01 кг) згасання хвилі стає значно менш інтенсивним.

2.5. Хвильові структури у тривимірному шарі гранульованого середовища в полі сили тяжіння

У двовимірній задачі про поширення нелінійних хвиль у шарі гранульованого середовища, як було показано в попередньому підрозділі, можуть утворюватись вихрові хвильові структури. Виникає питання, а чи будуть так само утворюватися подібні структури при додатковому ступені свободи, а саме у тривимірному випадку, і якими вони будуть?

Розглядаються хвильові процеси в шарі гранульованого середовища, утвореного сферичними гранулами, з гауссовим розподілом за розмірами, який знаходиться у гравітаційному полі (рис. 2.27, а). Так само як і в попередніх задачах, взаємодія між гранулами описується моделлю Герца для пружних тіл з урахуванням тертя Кулона. Рух гранул описується системою рівнянь (2.7) – (2.8) а їх парна взаємодія – рівняннями (2.2) – (2.4).

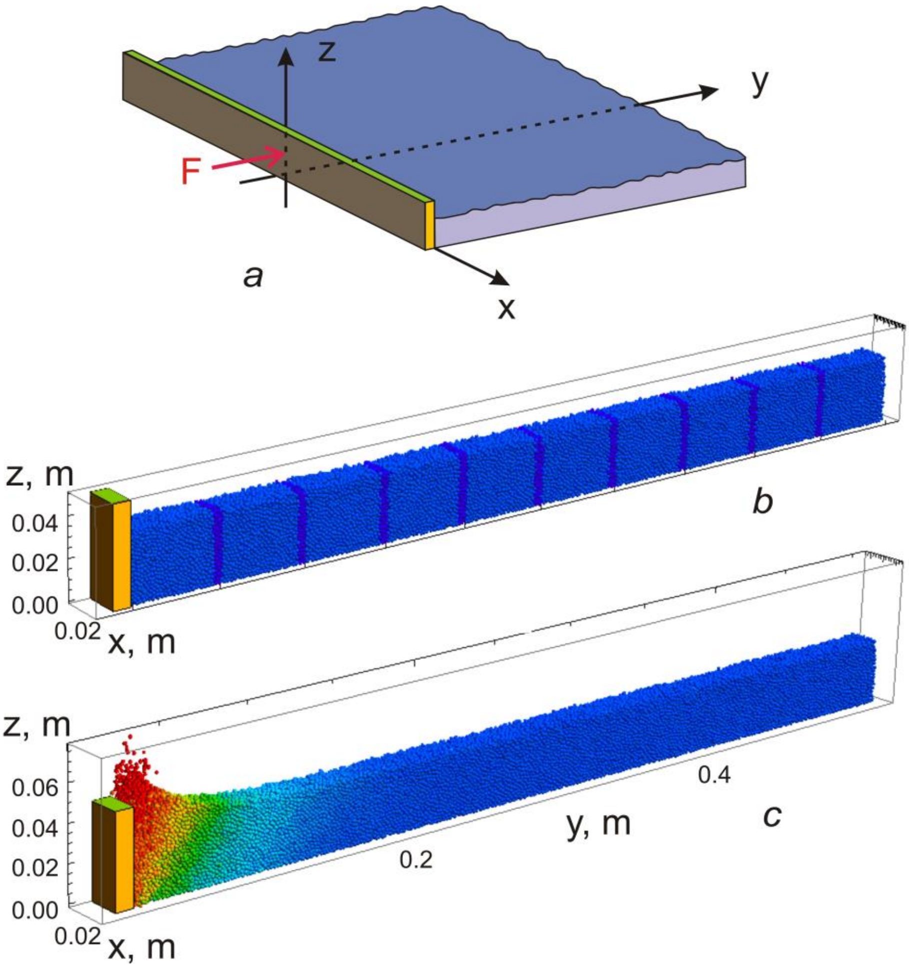
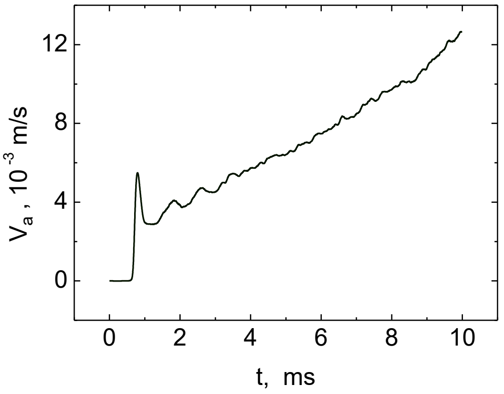


Рис. 2.27. Шар гранульованого середовища *a*) і частина шару (область моделювання) в момент часу *b*) t = 0 та *c*) t = 40 мс. Поршень рухається в напрямку y під дію зовнішньої сили F.

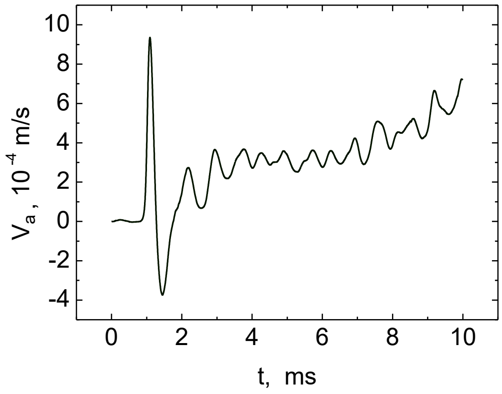
Дана система рівнянь розв’язувалась чисельно з використанням алгоритму Верле [313, 314]. У розрахунках прийняті такі ж значення констант, як і в двовимірній задачі: $E = 5 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0{,}25$, $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $C_f = 0{,}1$, середній радіус гранул $r_0 = 1$ мм, дисперсія $d = 10^{-4}$ мм^2. Комп’ютерне моделювання здійснюється в області з розмірами $L_x = 0{,}02$ м, $L_y = 0{,}5$ м, $L_z = 0{,}037$ м з періодичними умовами в напрямку x (рис. 2.27, *b*). Гранули спочатку випадково розподілені в об’ємі $L_x = 0{,}02$ м, $L_y = 0{,}5$ м, $L_z = 0{,}8$ м, а потім осідають під впливом сили тяжіння. Пружний поршень генерує хвилю завдяки дії сили (2.15) у напрямку осі y. Константи у рівнянні (2.15) вибирались наступними: $F_0 = 1000$ Н, $t_0 = 1$ мс. Дно має пружні властивості, а верхня поверхня вільна. В процесі розрахунків на дев'яти різних відстанях від початку координат обчислюються середні швидкості $V_a = {}^1\!/_n \sum_i v_y^i$, де v_y^i – горизонтальні компоненти швидкості гранул, розташованих в межах вертикальної смуги шириною $5r_0$ (на рис. 2.27, b ці області позначені темним відтінком), n – кількість гранул в смузі. Рухомі гранули після удару в момент часу $t = 40$ мс показані на рис. 2.27, с. Загальна кількість гранул – $N = 5 \cdot 10^4$.

Розраховані залежності середніх швидкостей від часу для дев'яти відстаней від початку координат показують, що хвиля, згенерована від імпульсного навантаження з формою, заданою рівнянням (2.15), загасає дуже швидко в процесі її поширення і поступово перетворюється на періодичну хвилю. Рис. 2.28 ілюструє ці залежності для чотирьох відстаней від початку координат; періодичні коливання можна побачити на рис. 2,28, *в, г*. Спектри даних залежностей показують, що частота цих коливань $\omega_s \approx 1200$ Гц (рис. 2.29).

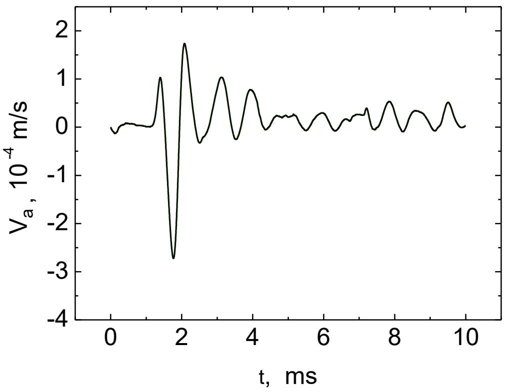
Аналіз поля швидкостей свідчить про те, що рух гранул у цьому випадку є когерентним, тобто в даній області формуються характерні хвильові структури (рис. 2.30). Залежності, наведені на рис. 2.28, побудовані для коефіцієнта тертя $C_f = 0{,}1$. У разі відсутності тертя між елементами, періодичні структури зникають. Цей факт свідчить про те, що хвильові структури зв'язані з обертальним рухом гранул та дисипацією енергії, оскільки обертання гранул не відбувається за відсутності тертя.



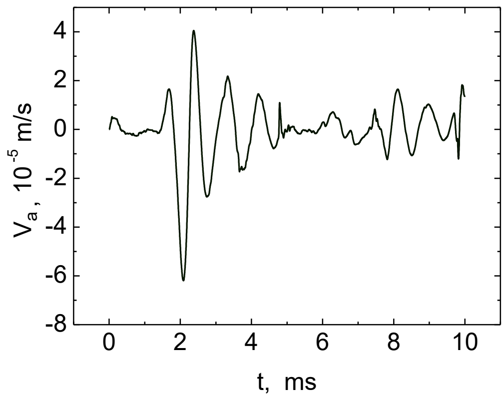
а



б



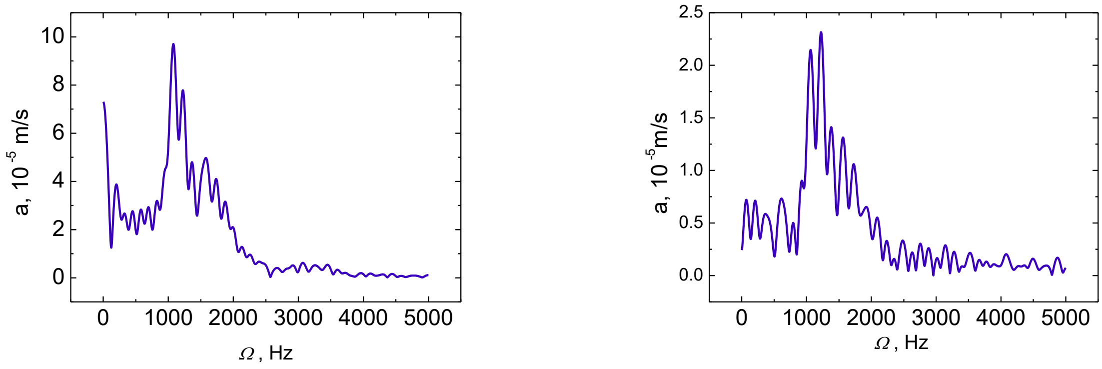
в



г

Рис. 2.28. Залежності усереднених швидкостей V_a від часу на відстанях *а*) $y = 10$ см, *б*) $y = 15$ см, *в*) $y = 20$ см, *г*) $y = 25$ см.

Періодичні хвильові структури також існують для середовищ з іншими дисперсіями в розподілі Гаусса за розмірами гранул. Рис. 2.31 ілюструє спектри часових залежностей усереднених швидкостей на відстані $y = 20$ см для трьох різних масивів з різними величинами дисперсій. Видно, що всі спектри мають одну і ту ж характерну частоту $\omega_s \approx 1200$ Гц. При цьому зрозуміло, що при збільшенні величини дисперсії, пік, що відповідає характерній частоті, стає більш розмитим.



а *б*

Рис. 2.29. Спектри часових залежностей середніх швидкостей на відстанях: *а*) $y = 20$ см, *б*) $y = 25$ см, характерна частота $\omega_s \approx 1200$ Гц.

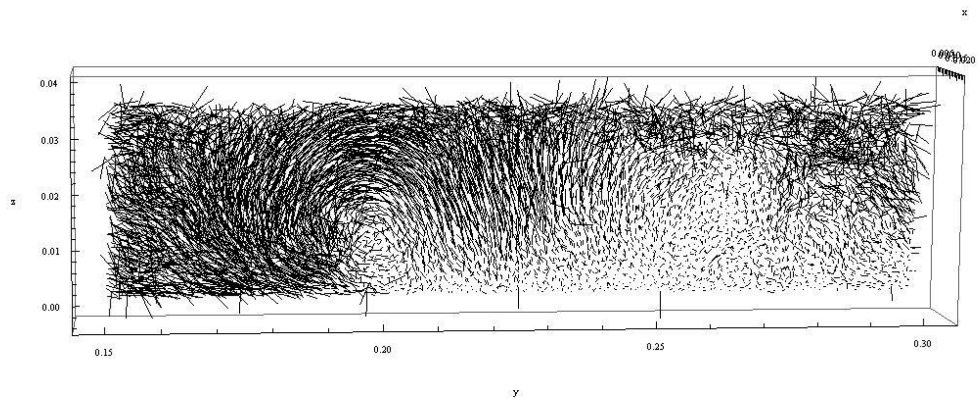


Рис. 2.30. Поле швидкостей в інтервалі 15 см $\leq y \leq$ 30 см в момент часу $t = 4{,}0$ мс.

Для дослідження впливу товщини шару на властивості хвильових структур, був проведений розрахунок поширення хвилі в гранульованому шарі з подвійною висотою $H = 72{,}9$ мм, що складається з $N = 10^5$ гранул. У цьому випадку згасання хвилі менш інтенсивне і періодичні коливання виникають на великих відстанях.

На рис. 2.32 наведено спектри часової залежності усереднених швидкостей $V_a(t)$ в смугах ближче до кінця масиву. Характеристична частота тепер зменшується до $\omega_s \approx 600$.

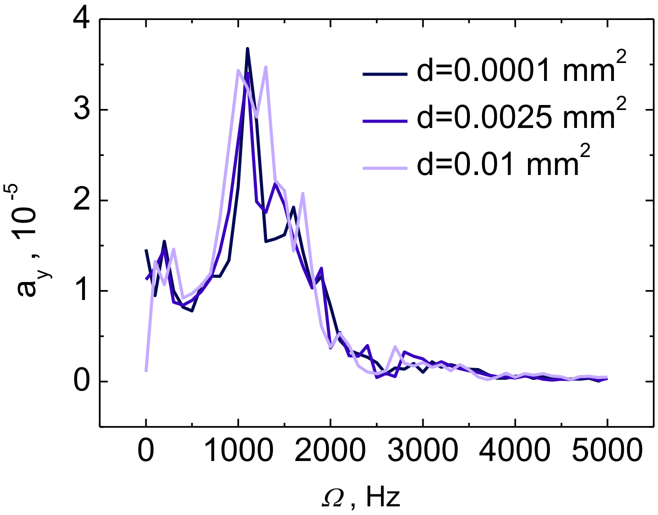


Рис. 2.31. Спектри часових залежностей усереднених швидкостей $V_a(t)$ на відстані y = 20 см для трьох різних дисперсій.

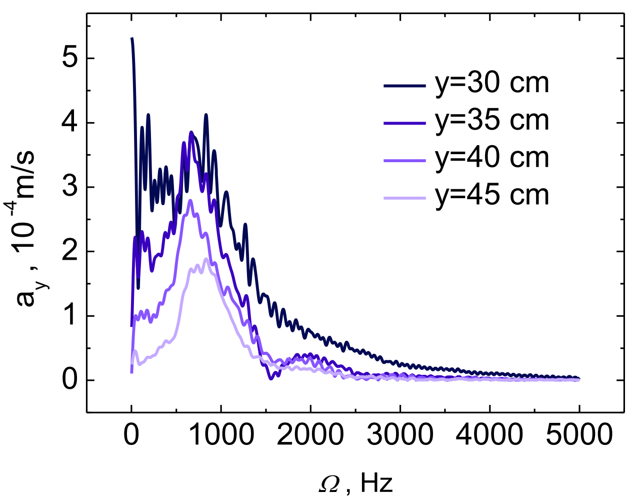
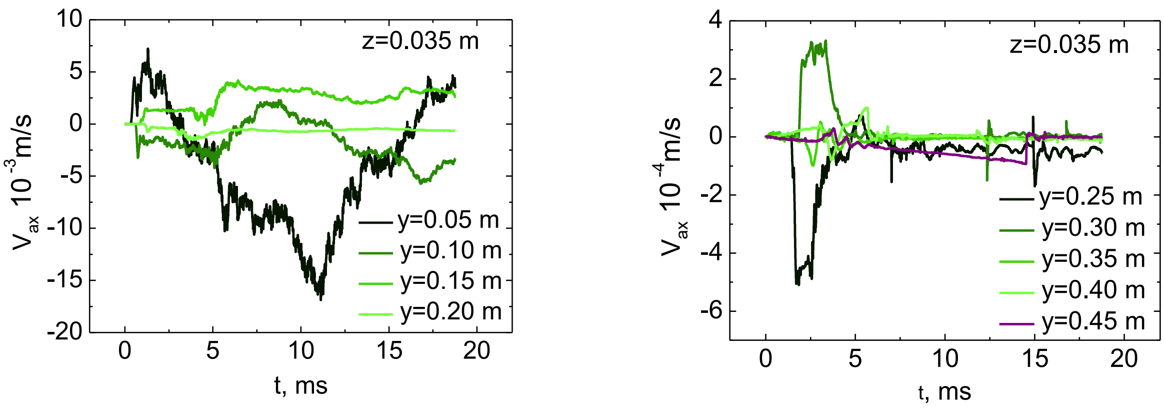


Рис. 2.32. Спектри часових залежностей середніх швидкостей $V_a(t)$ на 4-х відстанях y для шару подвійної висоти; характерна частота $\omega_s \approx$ 600 Гц.

Для більш детального дослідження хвильового векторного поля швидкостей було проведено усереднення швидкостей в об’ємах у вигляді кубів з розміром ребра $l = 5$ мм. Ці куби, як і у випадку усереднення у смугах, розташовані на дев’яти відстанях від поршня та на трьох висотах: $z = 10, 35, 60$ мм.

Усереднення швидкостей у реперних областях здійснюються для кожної з трьох компонент. На рис. 2.33 наведені часові залежності усередненої компоненти швидкості $V_{ax}(t)$ для дев’яти відстаней від поршня. Центри всіх кубів, у яких здійснювалось усереднення, знаходяться на висоті $z = 35$ мм.



а *б*

Рис. 2.33. Залежності від часу усередненої компоненти швидкості V_{ax} для різних відстаней y від поршня: *а* – перші 4 відстані, *б* – наступні 5 відстаней. Кубічні області, в яких здійснюються обчислення компоненти V_{ax} знаходяться на висоті $z = 35$ мм.

Видно, що зі збільшенням відстані y, усереднена компонента швидкості V_{ax} затухає. Так само інтенсивно затухають дві інші компоненти усереднених швидкостей. На рис. 2.34 зображені залежності від часу всіх трьох компонент для трьох різних висот на відстані $y = 0{,}1$ м від початку координат.

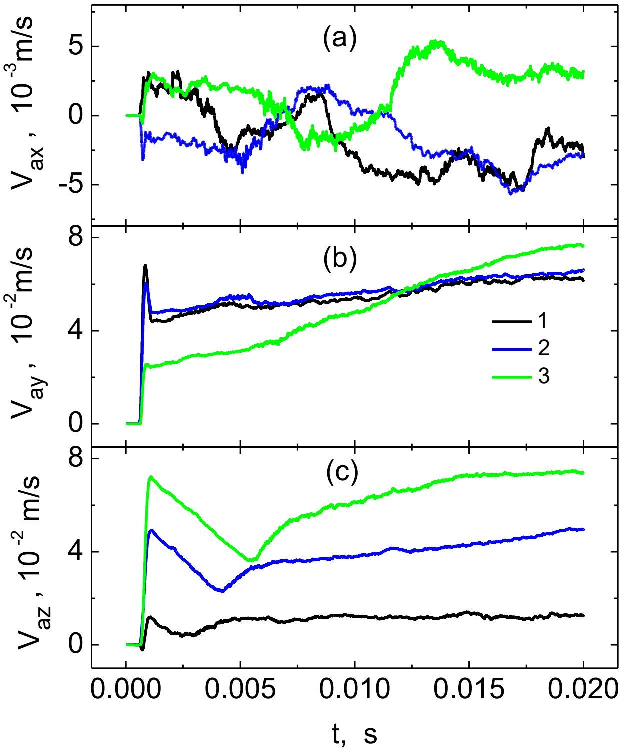


Рис. 2.34. Залежності від часу усереднених компонент швидкості V_{ax}, V_{ay} та V_{az} на відстані $y = 0{,}1$ м від поршня для трьох висот: 1 – $z = 10$ мм, 2 – $z = 35$ мм, 3 – $z = 60$ мм.

Спостерігається чіткий фронт хвилі для V_{ay} та V_{az} компонент, причому амплітуда компоненти V_{az} у верхній точці навіть перевищує амплітуду копоненти V_{ay}. В перпендикулярному до напрямку поширення хвилі виникають хаотичні збурення компоненти V_{ax}, які майже не корелюють з іншими двома, причому величина цих збурень на порядок менша за величину компонент V_{ay} та V_{az}. У процесі поширення хвиля швидко затухає і на відстані $y = 0{,}3$ з'являються періодичні коливання компонент V_{ay} та V_{az} (рис. 2.35), причому найбільш яскраво ці коливання виражені для компоненти V_{az}. Щодо компоненти V_{ax}, то вона також на порядок менше ніж дві інші, хоча тут на початку спостерігаються кореляції з цими компонентами.

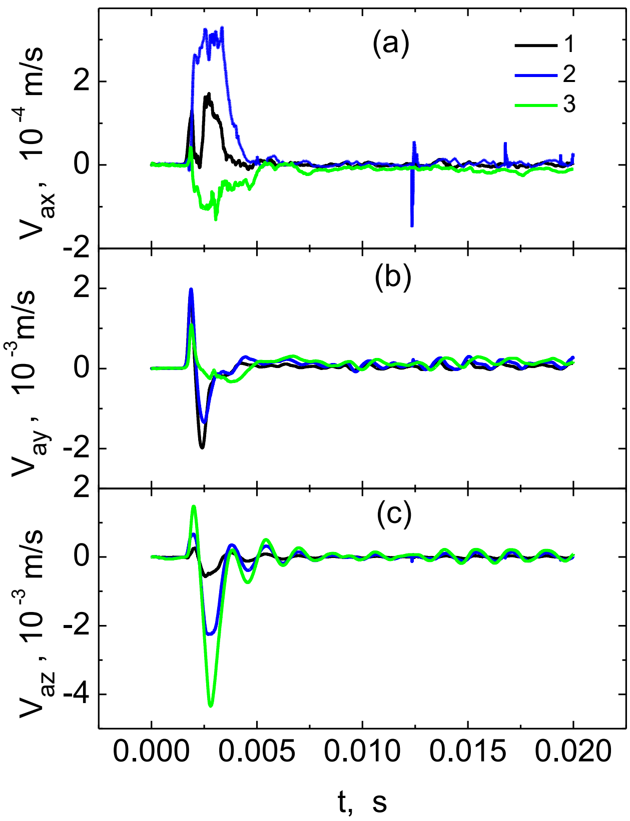


Рис. 2.35. Залежності від часу усереднених компонент швидкості V_{ax}, V_{ay} та V_{az} на відстані $y=0{,}3$ м від поршня для трьох висот: 1 – $z=10$ мм, 2 – $z=35$ мм, 3 – $z=60$ мм.

Спектри цих сигналів, нормалізовані щодо максимального значення, показані на рис.2.36. На спектрі для V_{az} компоненти найбільш чітко виділяється частота $\omega_s =$ 600 Гц. Вона виділяється також для компоненти V_{ay} і навіть для компоненти V_{az} у верхній точці.

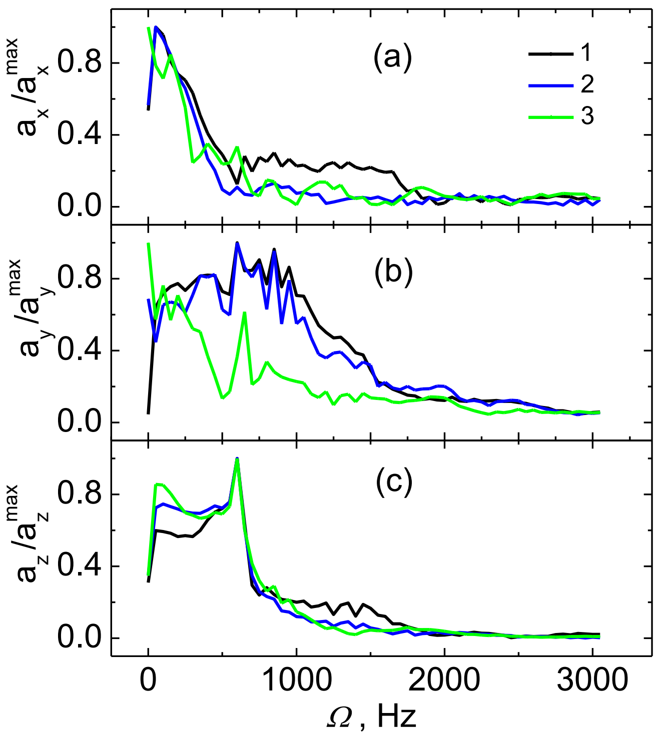


Рис. 2.36. Спектри часових залежностей усереднених компонент швидкості V_{ax}, V_{ay} та V_{az} на відстані $y = 0{,}3$ м від поршня для трьох висот: 1 – $z = 10$ мм, 2 – $z = 35$ мм, 3 – $z = 60$ мм, віднормовані до максимального значення.

Для дослідження хвильових структур також використовується кореляційний аналіз. Для цього виділяється ряд областей кубічної форми з центрами приблизно на середині висоти гранульованого шару $z = 30$ мм і розташованих на відстані 10 мм один від одного. Розмір ребер виділених кубиків складає 10 мм, а середня кількість гранул, які потрапляють у виділені області – 72. Для кожної пари кубів обчислюється кореляційна функція

$$C_{kl}(t) = \sum_{i,j} v_z^{ki}(t) v_z^{lj}(t) \tag{2.16}$$

Тут індекси k та l відповідають номерам виділених областей, а i, j – номерам гранул у відповідних областях. Досліджуються кореляції лише компоненти V_z. На вихровій структурі гранули рухаються в протилежних напрямках відносно центра вихору (рис. 2.37), тому кореляційна функція для областей, які знаходяться по різні боки від центру будуть від'ємними. На рис. 2.38 наведено залежність кореляційної функції для вертикальної компоненти швидкостей елементів, що знаходяться у виділених областях

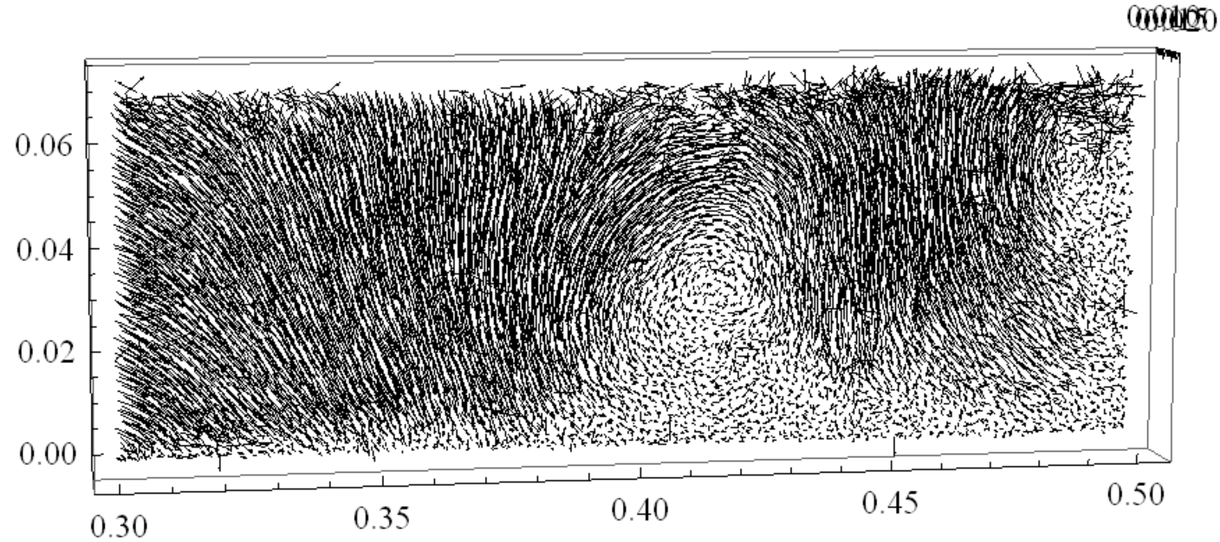


Рис. 2.37. Поле швидкостей в інтервалі 0,35м $\leq y \leq$ 0,5м в момент часу t = 6,0 мс.

ліворуч та праворуч від вихору, показаного на рис. 2.37. В момент $t = 6{,}0$ мс, що відповідає векторному полю, зображеному на рис. 2.37, кореляційна функція має від'ємне значення, близьке до мінімального. Отже, за допомогою кореляційної функції можна визначати положення, момент виникнення і тривалість існування хвильових структур. На рис. 2.39 наведені залежності для кореляційних функцій гранул, що знаходяться поблизу та на більших відстанях. Видно, що для близьких гранул кореляційні функції мають тільки позитивні значення, тобто гранули рухаються в одному напрямку. Для дальніх гранул кореляційні функції мають як додатне так і від'ємне значення. Саме від'ємні значення свідчать про те, що гранули в цей момент рухаються у протилежному напрямку, а отже саме в цей момент можливе існування вихрових структур. На рис. 2.40 представлені зображення структур, які існують у моменти, коли кореляційна функція досягає мінімальних від'ємних значень.

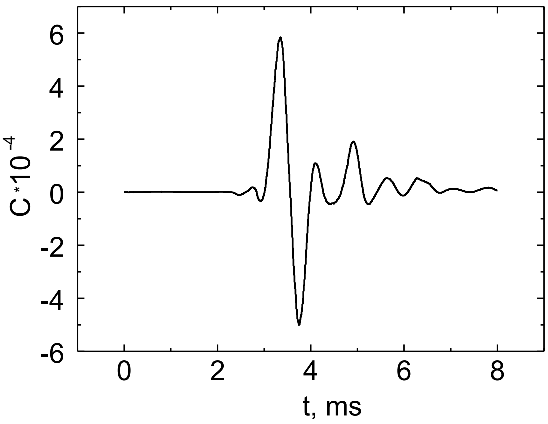
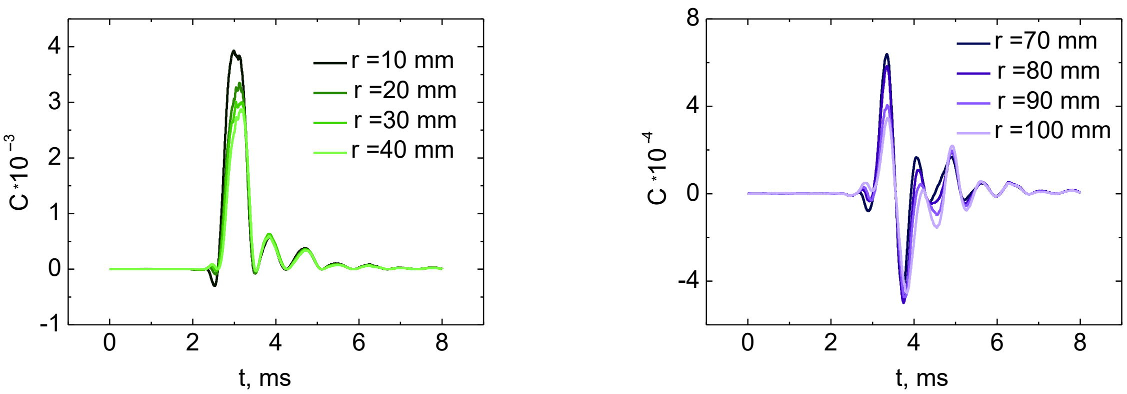
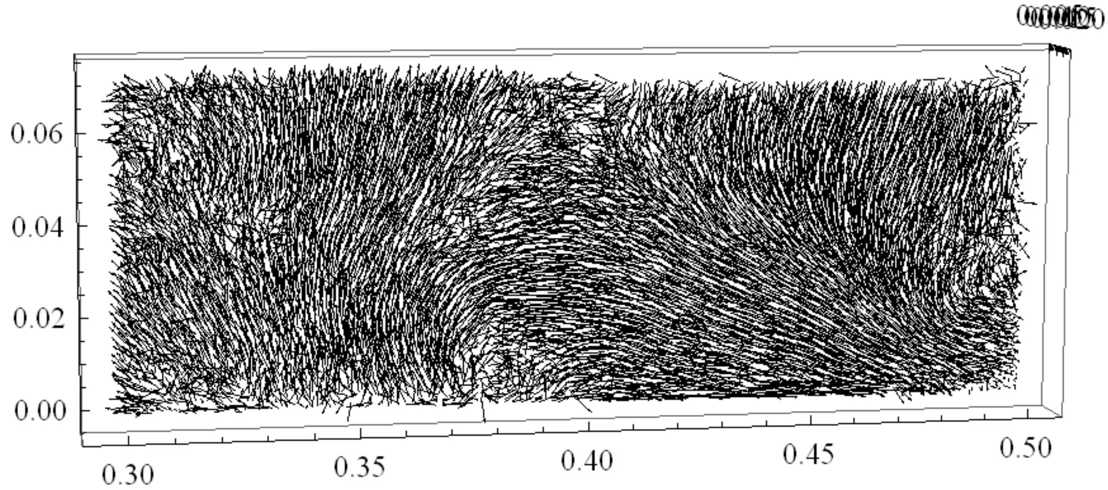


Рис. 2.38. Залежність кореляційної функції від часу для гранул, що знаходяться в кубі з центром в точці (0, 0,368, 0,035) м та в кубі з центром в точці (0, 0,448, 0,035) м.

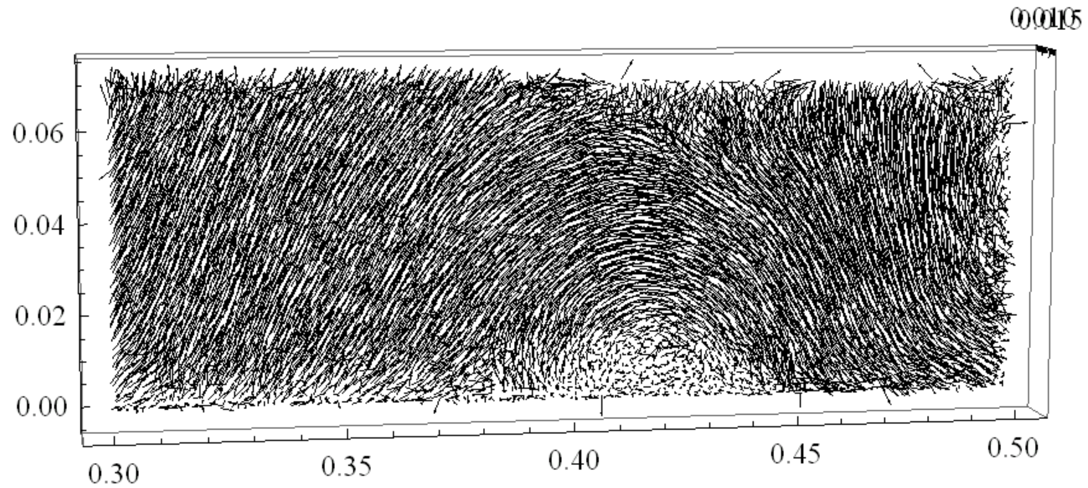


а *б*

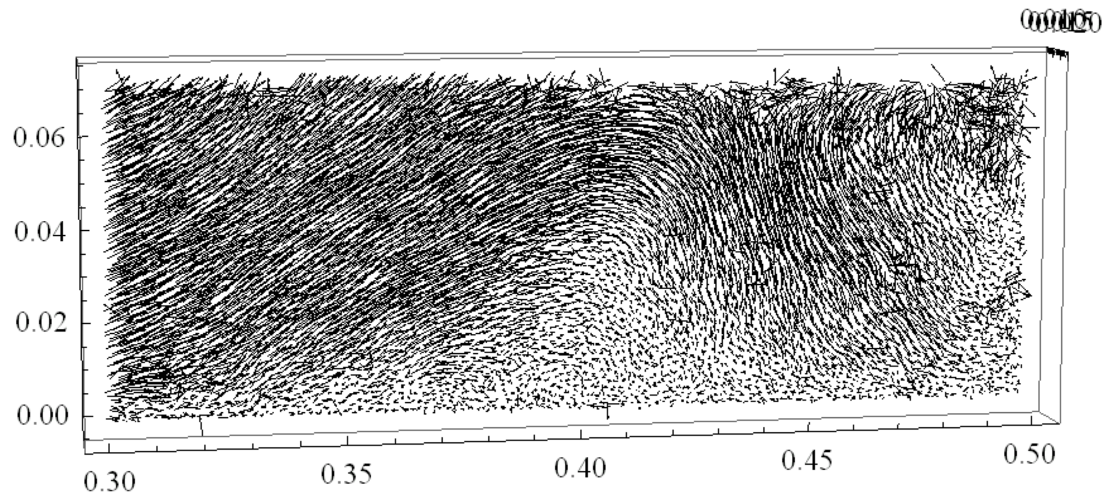
Рис. 2.39. Залежність кореляційної функції від часу для гранул, що знаходяться в кубах, центри яких розташовані на невеликих $r = 0{,}01 - 0{,}04$ м (*а*), та значних відстанях $r = 0{,}07 - 0{,}1$ м (*б*) від куба, відносно якого обчислюються кореляції і який знаходиться на відстані 0,368 м від поршня.



а



б

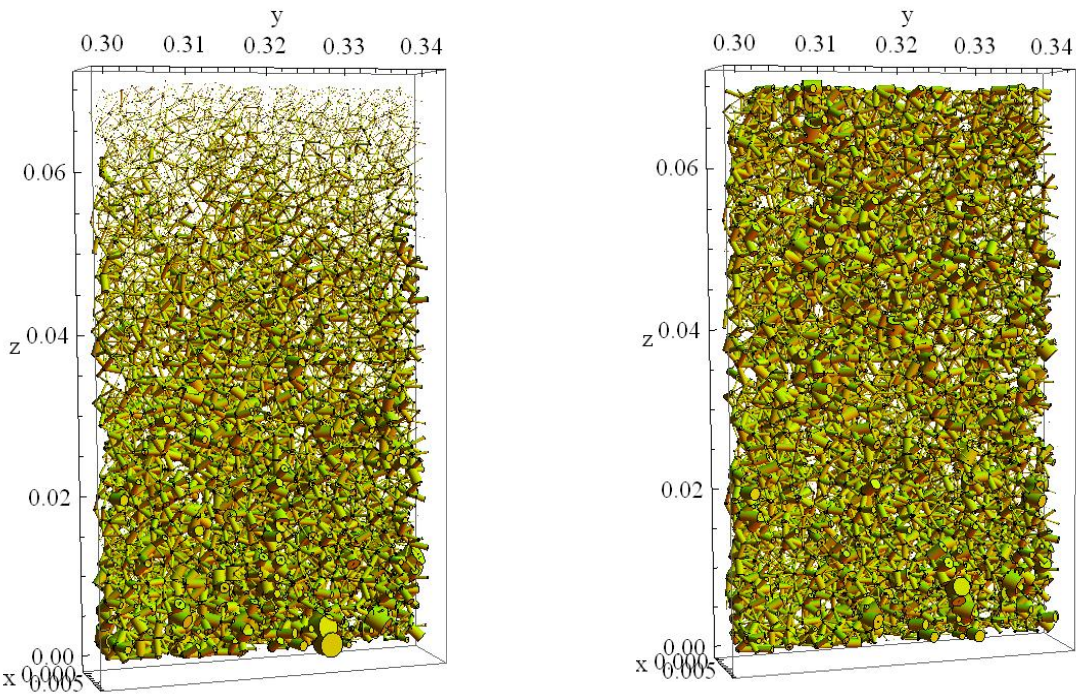


в

Рис. 2.40. Поле швидкостей в інтервалі 0,35м $\le y \le$ 0,5м в моменти часу *а*) $t = 3{,}7$ мс; *б*) $t = 4{,}5$ мс; *в*) $t = 5{,}2$ мс.

Двовимірне моделювання показало, що коли шар навантажується вантажем на вільній поверхні, то хвильові структури не утворюються і затухання хвилі є досить слабким у порівнянні з середовищем з вільною поверхнею. Виникає питання: хвильові структури зникають через навантаження на шар і, отже, через вирівнювання початкового поля сил взаємодії гранул чи через відсутність вільної поверхні? Щоб відповісти на це запитання було здійснено тривимірне комп’ютерне моделювання поширення хвиль як у напруженому гранульованому шарі, так і у ненапруженому, але обмеженому стінкою на верхній поверхні. Напружений стан створювався стисненням шару за допомогою верхньої стінки. На рис. 2.41, *а* зображено початковий стан середовища без додаткового стиснення, з верхньою стінкою, розташованою на поверхні шару на висоті $z = 72{,}9$ мм, а на рис. 2.41, *б* – стиснуте середовище, з верхньою стінкою на висоті $z = 70{,}7$ мм. Як видно з рис. 2.41, *б*, середовище стиснуте верхньою стінкою настільки, щоб можна було знехтувати градієнтом, зумовленим силою тяжіння.

Як і у випадку розрахунку з вільною поверхнею, хвиля генерувалася за допомогою імпульсного збурення, що прикладалося до поршня (2.15). Константи у цьому рівнянні вибирались аналогічними: $F_0 = 1000$ Н та $t_0 = 1$ мс. Так само обчислювалися усереднені швидкості у квадратних областях на 9-ти відстанях від початку координат і на трьох висотах. На рис. 2.42 в додатку 1 наведені часові залежності всіх трьох компонент швидкості для випадку з нестиснутим середовищем, а на рис. 2.43 – для випадку стиснутого середовища. Рис. 2.42 переконливо демонструє, що верхня стінка не перешкоджає формуванню хвильових структур. Особливо чітко фіксуються коливання, пов’язані зі структурами, для вертикальної компоненти усередненої швидкості V_{az} в області $y > 0{,}3$ м. Для стиснутого середовища такі періодичні коливання відсутні (рис. 2.43). Як свідчать рис. 2.43, *в*, *г* затухання хвилі значно повільніше, ніж для нестиснутого середовища.



а *б*

Рис. 2.41. Сили міжгранульної взаємодії у фрагментах шару для двох початкових напружених станів: а) нестислий, $z = 72{,}9$ мм; б) стислий, $z = 70{,}7$ мм, де z – координата верхньої стінки. Більшому діаметру циліндра відповідає більша сила.

Отже, отримані результати розрахунків поширення хвилі у шарі гранульованого середовища при наявності верхньої стінки, демонструють, що вихрові хвильові структури мають місце тільки у тому випадку, коли гранульоване середовище знаходиться у навантаженому стані. Обмеження стінкою вільної поверхні не впливає на їх утворення, тобто, для існування хвильових структур необхідно, щоб не було градієнта поля сил міжгранульної взаємодії.

2.6. Висновки

1. У рамках числового моделювання динаміки двовимірного структурованого масиву в формі щільної упаковки сферичних елементів виявлено формування стійкої хвильової структури. Подібність хвильових рухів різних інтенсивностей в масивах регулярної структури з різними розмірами структурних елементів дає можливість діагностувати розміри цих структур за хвильовими швидкостями та їх спектральними характеристиками. Зміна структури середовища призводить до зміни характеру збурення, що поширюється у цьому середовищі.

2. Числове моделювання поширення слабких нелінійних хвиль в двовимірному дискретному середовищі, утвореному зі сферичних гранул трьох розмірів і герцівською взаємодією виявило суттєво нелінійну поведінку модельного середовища. В розрахунках з’ясовано, що у процесі поширення хвилі відносна частка високих частот зростає.

3. Змодельовано процес поширення нелінійної хвилі у ланцюгу дискретних елементів в рамках узагальненої моделі Герца із врахуванням їх пластичного деформування. Отримано, що в процесі поширення нелінійної хвилі в такому середовищі її амплітуда затухає до досягнення порогового значення, коли взаємодія між елементами структури стає пружною і відокремлена хвиля трансформується у солітоноподібну хвилю з пороговою амплітудою.

4. Проведено комп’ютерне моделювання двовимірних процесів поширення хвилі стиснення в шарі гранульованого середовища, що знаходиться в полі сили тяжіння. Показано, що в шарі зі сферичними гранулами можуть формуватися вихрові структури, параметри яких залежать від розміру гранул і його товщини. Якщо шар стиснений

вантажем, хвильові структури не формуються і загасання хвилі істотно менше. Також досліджено хвильові процеси в шарі гранульованого середовища з несферичними гранулами. Зазначено, що для такого середовища характерно значне загасання хвилі, відсутність процесу утворення хвильових структур, та те, що таке середовище суттєво чутливе до початкового напруженого стану.

5. Виконано числове моделювання тривимірного процесу поширення хвилі у шарі гранульованого середовища. Усереднення швидкостей в кубічних об’ємах, що знаходяться на 9-ти відстанях від початку координат і на 3-х висотах дало можливість більш детально дослідити хвильові поля. Як і у випадку двовимірної задачі, збурена ударом хвиля швидко згасає, а потім формуються вихрові структури. Виявилось, що вертикальна компонента швидкості у цих структурах може перевищувати швидкість у напрямку поширення хвилі. Що стосується компоненти швидкості у напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі, то вона є хаотичною і її величина на порядок менше ніж інші дві компоненти. Застосування кореляційного аналізу дало можливість визначати положення, момент виникнення і тривалість існування хвильових структур. Розрахунки аналогічних процесів поширення хвиль у масивах з різними дисперсіями в розподілі Гаусса за розмірами гранул показали, що частота коливань усередненої швидкості, пов’язана з існуванням хвильових структур, не залежить від дисперсії. Проте ця частота залежить від висоти шару: при збільшенні висоти у два рази, частота зменшується у два рази. Розрахунки з поширення хвилі при наявності верхньої стінки показали, що вона впливає на процес формування хвильових структур тільки у тому випадку, коли навантажує середовище таким чином, щоб вирівняти поле сил міжгранульної взаємодії. При цьому згасання хвилі набагато слабкіше ніж у шарі з вільною поверхнею.

РОЗДІЛ 3

ДИНАМІЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СЕРЕДОВИЩ

Для динамічних діаграм деформування широкого класу гірських порід характерні такі особливості як нелінійність, гістерезис, дилатансія, а також залежність від швидкості деформування [317, 318]. Ці некласичні особливості динамічного деформування пов'язують зі структурною організацією даних матеріалів і процесів, що відбуваються на рівні елементів структури – кристалів, зерен, гранул, елементів, тощо [319]. Для того, щоб дослідити цей вплив, проведено якісне комп'ютерне моделювання процесів динамічного деформування моделей структурованих середовищ.

3.1. Комп'ютерне моделювання процесів динамічного деформування двовимірних дискретних масивів з різними видами взаємодії між структурними елементами

Структуровані середовища моделюються системами деформівних елементів у вигляді куль, які взаємодіють одна з одною як пружні, пружнов'язкі та пружно-пластичні тіла. Розглядаються двовимірні системи.

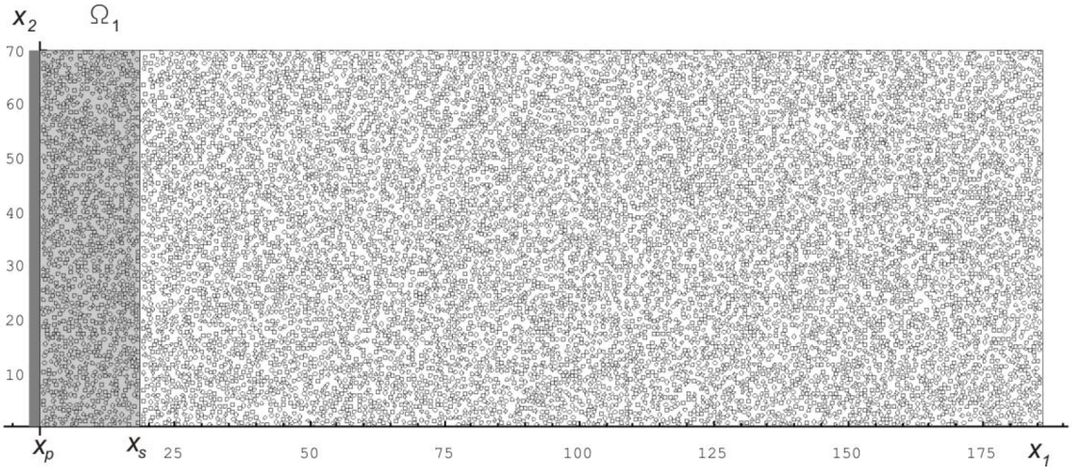
3.1.1. Пружна взаємодія

Пружна взаємодія між структурними елементами описується законом Герца (2.2). Розглядаються дві моделі: а) всі елементи мають однаковий розмір, б) система складається з елементів трьох розмірів, тобто розглядається масив елементів, утворений трьома ансамблями частинок з однаковими розмірами в кожному ансамблі та з однаковою сумарною масою частинок в кожному ансамблі [31, 32, 49-51]. Система рівнянь, що описує динаміку двомірного масиву (2.7) – (2.8), розв'язується чисельно за допомогою алгоритму Верле [313, 314]. У розрахунках вибирались такі константи: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}29$, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $C_s = 2{,}7 \cdot 10^6$ Н/м, C_k = 0,1.

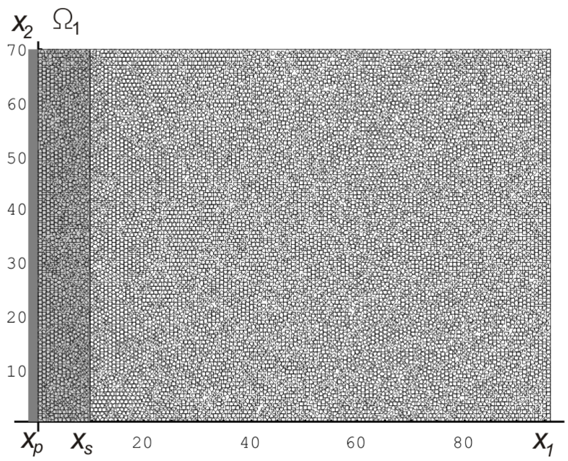
Спочатку були проведені розрахунки деформування дискретного середовища, утвореного елементами однакового розміру ($r = 0{,}378$ см), модель (а), при двох різних щільностях упаковки: $\nu = 0{,}3$ і $\nu = 0{,}2$, де $\nu = (S - S_o)/S$ – пористість масиву, S_o – сумарна площа всіх елементів в площині центрів мас, S – площа прямокутної області з пружними стінками Ω, в якій зосереджені елементи. У масиві знаходиться перегородка, що відділяє частину масиву, яка знаходиться між нею і поршнем (виділено більш темною заштриховкою), причому $S_1 = 0{,}1S$, де S_1 – а площа області Ω_1 (рис. 3.1). Товщина перегородки складає 0,01 см, а товщина поршня – 1 см, маса відповідно, $m_s = 3{,}1m$, $m_p = 309{,}4m$, де m – маса елемента. Передня стінка поршня в початковий момент часу знаходиться на початку координат. Маючи значення поточних координат поршня і перегородки в процесі деформування масиву, можна обчислити поточну деформацію ε_{11} тонкого шару дискретного середовища Ω_1 за формулою

$$\varepsilon_{11}(t) = 1 - \frac{x_s(t) - x_p(t)}{x_s(t_0) - x_p(t_0)}, \tag{3.1}$$

де x_s – координата лівої стінки перегородки, x_p – координата правої стінки поршня. Перегородка досить тонка, тому її вплив на процес деформування масиву є несуттєвим. Рух перегородки і поршня обчислюється за формулою (2.7), де $i = s, p$, а підсумовування по j проводиться по всіх елементах, які контактують відповідно зі стінкою і поршнем.



а



б

Рис. 3.1. Масиви дискретних елементів до (*а*) і після (*б*) ущільнення; пористість $\nu = 0{,}3$.

Спочатку вся область Ω випадковим чином заповнювалась масивом дискретних елементів, потім цей масив ущільнювався до стану, коли пористість становила відповідно $\nu = 0{,}3$ та $\nu = 0{,}2$. Ущільнення здійснювалося поршнем, який зі швидкістю 10 м/с в напрямку осі x_1 ударявся об масив. Коли щільність всього масиву досягала заданого значення “вмикалась” в’язкість – в правій частині рівняння (2.7) додавався лінійний в’язкий член $-C_v \mathbf{v}_i$ і розрахунок зупинявся, коли елементи приходили до стану спокою.

На рис. 3.1 зображено масив до і після ущільнення. Масив складається з 10500 елементів, а в області Ω_1 знаходиться 1050 елементів.

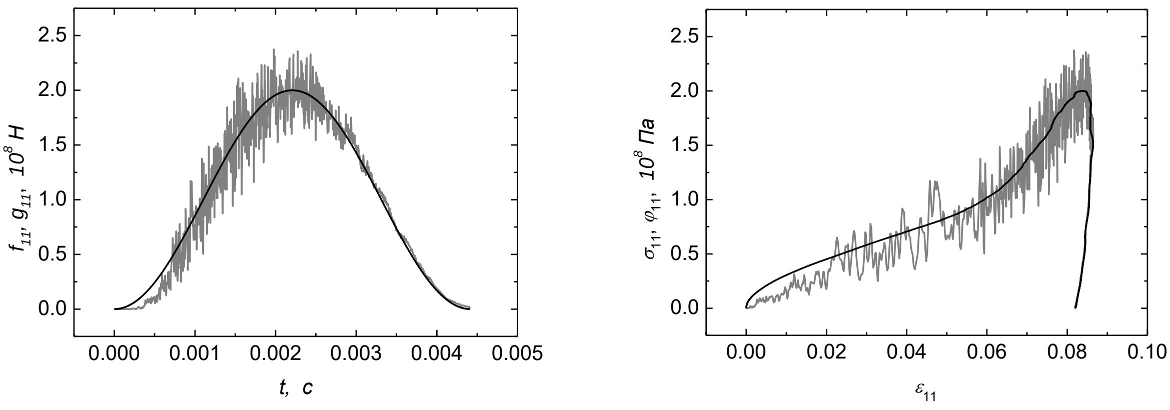
Були проведені розрахунки деформування масиву при дії на поршень імпульсного навантаження

$$f = f_0 \sin^2(\pi t / t_{\max}), \tag{3.2}$$

де f – сила, прикладена до поршня в напрямку x_1. Розрахунки проводилися для чотирьох різних тривалостей навантажень: $t_{\max} = 2{,}21$, 4,42, 8,83, 22,1 мс. Амплітуди відповідно вибиралися $f_0 = 10^5$, $5 \cdot 10^4$, $2{,}5 \cdot 10^4$, 10^4 Н з тим, щоб сумарний імпульс, який отримало середовище, був однаковим для всіх чотирьох розрахунків.

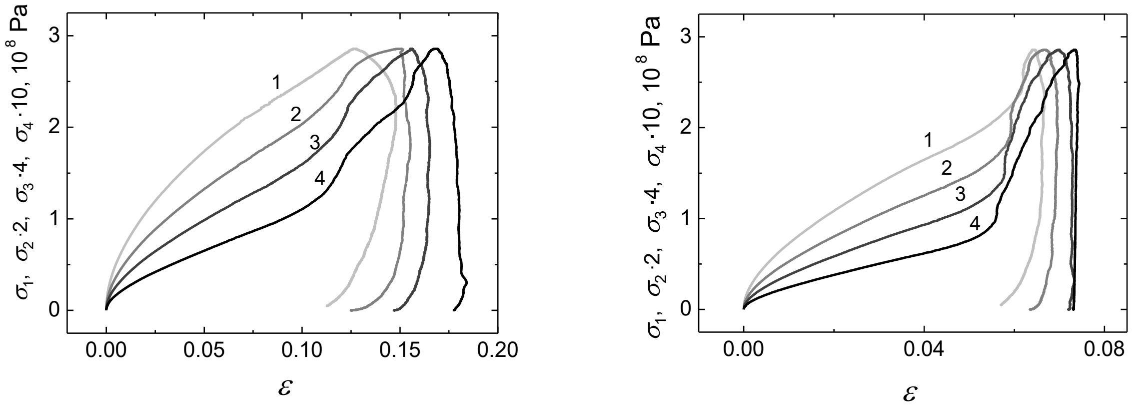
При найменшій тривалості навантаження довжина хвилі приблизно в 7 разів перевищує товщину шару між поршнем і перегородкою. На рис. 3.2 зображена часова залежність сили $f(t)$, що прикладається до поршня, і реакція середовища у вигляді сумарної сили $g(t)$, що діє на поршень. Якщо усереднити коливання на кривій реакції, то усереднена крива буде майже збігатись з кривою навантаження. Таким чином, можна вважати, що усереднене напруження в виділеному масиві відповідатиме напруженню, викликаному дією сили $f(t)$. На рис. 3.2 наведені діаграми $\sigma_{11}(\varepsilon_{11})$ та, $\varphi(\varepsilon_{11})$ розраховані для сил f та g відповідно. Видно, що стохастичні коливання на кривій відбуваються вздовж гладкої кривої, яку і приймаємо за діаграму деформування середовища (надалі індекс 11 будемо опускати, припускаючи, що всі діаграми побудовані для компоненти σ_{11} та ε_{11}). При взаємодії i-го елемента зі стінкою або перегородкою в рівнянні (2.10) член $1/r_j$ належить прирівняти до нуля, тобто взаємодія є пружною.

На рис. 3.3 наведені середні діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$ для чотирьох тривалостей навантаження у середовищі з пористістю $\nu = 0{,}3$. Видно, що при збільшенні тривалості навантаження збільшується залишкова деформація, а



а *б*

Рис. 3.2. Масиви дискретних елементів до (*а*) і після (*б*) ущільнення; пористість $\nu = 0{,}3$.



а *б*

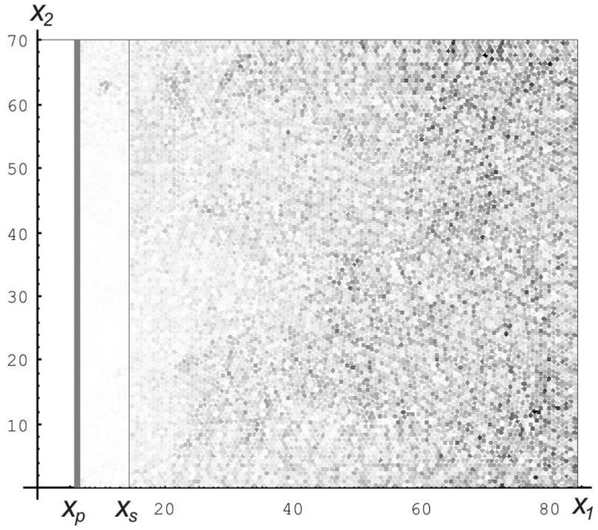
Рис. 3.3. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$. Тривалість імпульсного навантаження 1) $t_{\max} = 2{,}21$ мс, 2) $t_{\max} = 4{,}42$ мс, 3) $t_{\max} = 8{,}83$ мс, 4) $t_{\max} = 22{,}1$ мс. Розміри елементів однакові. Пористість: *а*) $\nu = 0{,}3$, *б*) $\nu = 0{,}2$.

також, що діаграма деформування у фазі навантаження має два ділянки з різними кутами нахилу. На першій ділянці (до деформації $\varepsilon = 0{,}11$) середовище проявляє себе більш податливо, що пов’язано з заповненням елементів вільного міжблокового простору, а при подальшому стисненні деформація масиву обумовлена деформацією самих елементів. Невелике збурення в фазі розвантаження на діаграмі 4 ($t_{\max} = 22{,}1$ мс) пов'язано з приходом до перегородки відбитої хвилі. На рис. 3.3, *б* зображені діаграми деформування для випадку більш жорсткої упаковки масиву ($\nu = 0{,}2$). І в цьому випадку залишкова деформація залежить від тривалості навантаження, хоча і не так істотно, як для менш щільного середовища. Необхідно зауважити, що деформація середовища з пористістю $\nu = 0{,}3$ більш ніж у два рази перевищує деформацію середовища з пористістю $\nu = 0{,}2$. Деформування у фазі збільшення навантаження відбувається в дві стадії: перша стадія – заповнення вільного простору, друга – деформування елементів, що відповідає більш крутій ділянці на деформованій діаграмі. Всі діаграми нелінійні і мають гістерезисний характер.

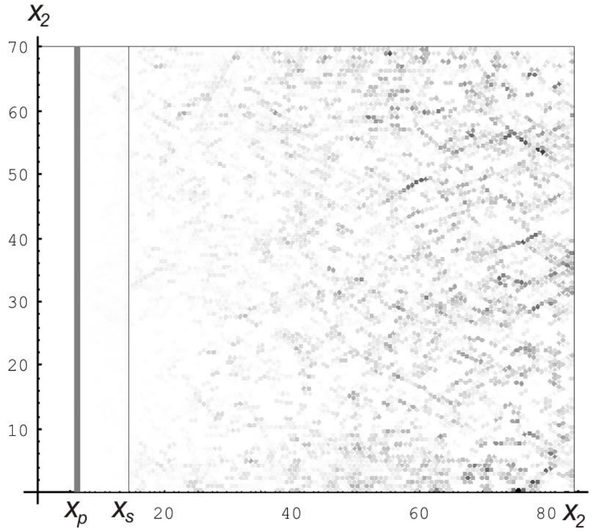
На рис. 3.4 наведені розподіли компонентів вектора швидкості та усереднених елементів напруження $\langle \sigma_{11} \rangle$ для упаковки з пористістю $\nu = 0{,}2$. Усереднене напруження $\langle \sigma_{11}(i) \rangle$ для i-го елемента розраховувалось за формулою [320]:

$$\langle \sigma_{11}(i) \rangle = 1/V[\sum_j (F_1^n(i,j) + F_1^s(i,j))x_1(i,j) - m(i)a_1(i)x_1(i)], \tag{3.3}$$

де $F_1^n(i,j)$ і $F_1^s(i,j)$ відповідно нормальна та тангенційна компоненти сил взаємодії i-го елемента з j-м, $x_1(i,j)$ – координата точки контакту цих елементів, $x_1(i)$, $a_1(i)$ – координата і компонента прискорення центру i-го елемента. Підсумовування здійснюється за всіма j елементами, що контактують з i-м елементом. Видно, що поля швидкостей та напружень мають неоднорідний характер, а напруження концентруються вздовж ланцюгів елементів.



а

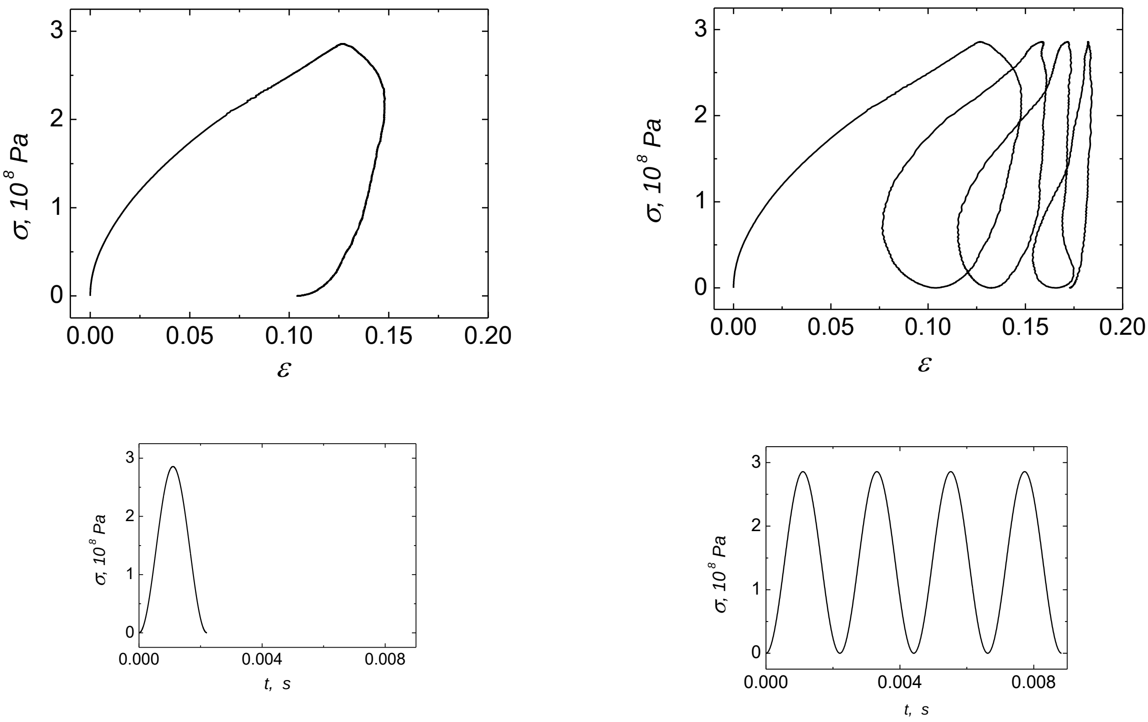


б

Рис. 3.4. Розподіли *а*) швидкостей v, *б*) напружень σ_{11} за елементами в момент часу $t = 8{,}83$ мс. Ширина імпульсу навантаження $t_{\max} = 8{,}83$ мс. Пористість $\nu = 0{,}2$. Більшій швидкості чи напруженню відповідає темніша заштриховка.

Були також проведені розрахунки деформування дискретних середовищ з різними щільностями упаковки при кратних динамічних навантаженнях. На рис. 3.5 наведені діаграми деформування та протоколи навантажень. Видно, що при кожному додатковому навантаженні залишкова деформація збільшується, тобто середовище ущільнюється. Всі діаграми повторних деформувань мають гістерезисний характер.

Наступна серія розрахунків проводилася в рамках моделі дискретного середовища, утвореного елементами трьох розмірів ($r = 1$, 0,5, 0,25 см). Як і у випадку масиву з однаковими розмірами елементів, спочатку випадково заповнювалась елементами область, розділена тонкою перегородкою, а потім аналогічно здійснювалося ущільнення масиву до стану, коли пористість досягала значень $\nu = 0{,}3$ і 0,2. Сумарна кількість елементів у масиві також складає 10500 штук (по 500, 2000 і 8000 в відповідному ансамблі), а сумарна маса елементів у кожному ансамблі однакова. І в цьому випадку до поршня прикладалася сила у вигляді (2.15).



а *б*

Рис. 3.5. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$ та протоколи навантажень. Тривалість одинарного імпульсного навантаження $t_{\max} = 2{,}21$ мс. Розміри частинок однакові. Пористість $\nu = 0{,}3$.

На рис. 3.6, *а* наведені діаграми деформування для чотирьох тривалостей імпульсних навантажень у дискретному середовищі з пористістю $\nu = 0{,}3$. Якщо порівнювати діаграми деформування з аналогічними діаграмами для монодисперсного дискретного середовища (рис. 3.3, а), то можна побачити, що ці діаграми схожі, хоча деформації в середовищі з неоднорідною структурою незначно перевищують деформації в дискретному середовищі з однаковими елементами. Цю особливість можна пояснити тим, що масив з елементами різних розмірів може краще упаковуватись, враховуючи те, що елементи з меншим розміром краще заповнюють порожнечі.

Діаграми деформування для середовища з пористістю $\nu = 0{,}2$ наведені на рис. 3.6, *б*. Порівняння цих діаграм з аналогічними діаграмами для однорозмірного дискретного середовища виявляє його парадоксальну поведінку. Виявляється, що у цьому випадку середовище з однаковими розмірами елементів деформується більше. Таку поведінку дискретного середовища можна пояснити тим, що середовище з однаковими розмірами елементів, стиснуте до такої початкової щільності, має структуровану організацію. Ці структурні елементи групуються в окремі конгломерати, які при подальшому деформуванні проявляють колективну поведінку, і в цьому випадку відбувається більш організований процес деформування як всередині конгломератів (кластерів), так і при ковзанні кластерів один відносно іншого. Це як в процесі руйнування, коли утворюються магістральні тріщини і тоді деформування пошкодженого матеріалу відбувається набагато інтенсивніше вздовж цих тріщин. Середовище, утворене елементами одного розміру, при упаковці з пористістю $\nu = 0{,}2$ (рис. 3.7, *в*) є більш структурованим, ніж при упаковці з пористістю $\nu = 0{,}3$ (рис. 3.7, *а*).

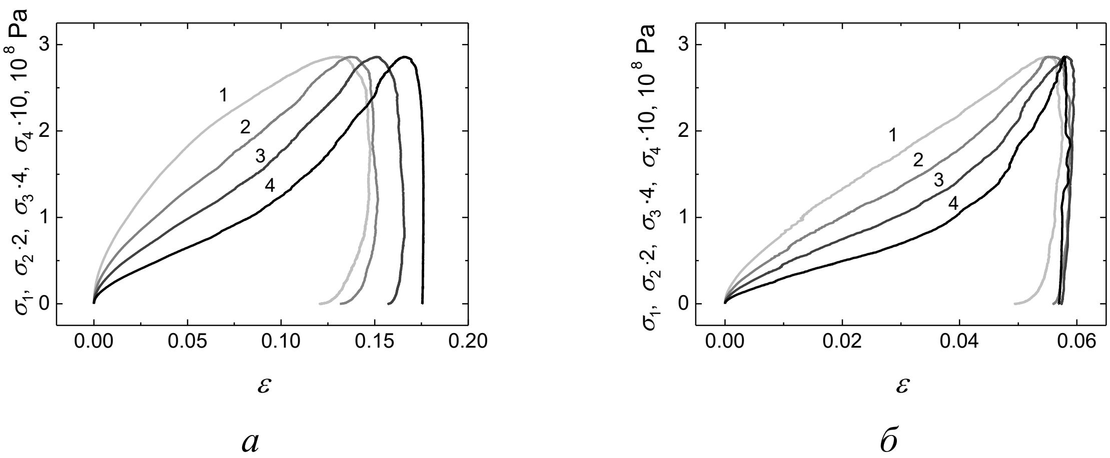


Рис. 3.6. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$. Тривалість імпульсного навантаження 1) $t_{\max} = 2{,}21$ мс, 2) $t_{\max} = 4{,}42$ мс, 3) $t_{\max} = 8{,}83$ мс, 4) $t_{\max} = 22{,}1$ мс. Пористість *а*) $\nu = 0{,}3$, *б*) $\nu = 0{,}2$. Три розміри елементів.

На рис. 3.8 наведено структуроване середовище, утворене елементами трьох розмірів. Таке середовище деформується рівномірно, незалежно від початкової щільності упаковки.

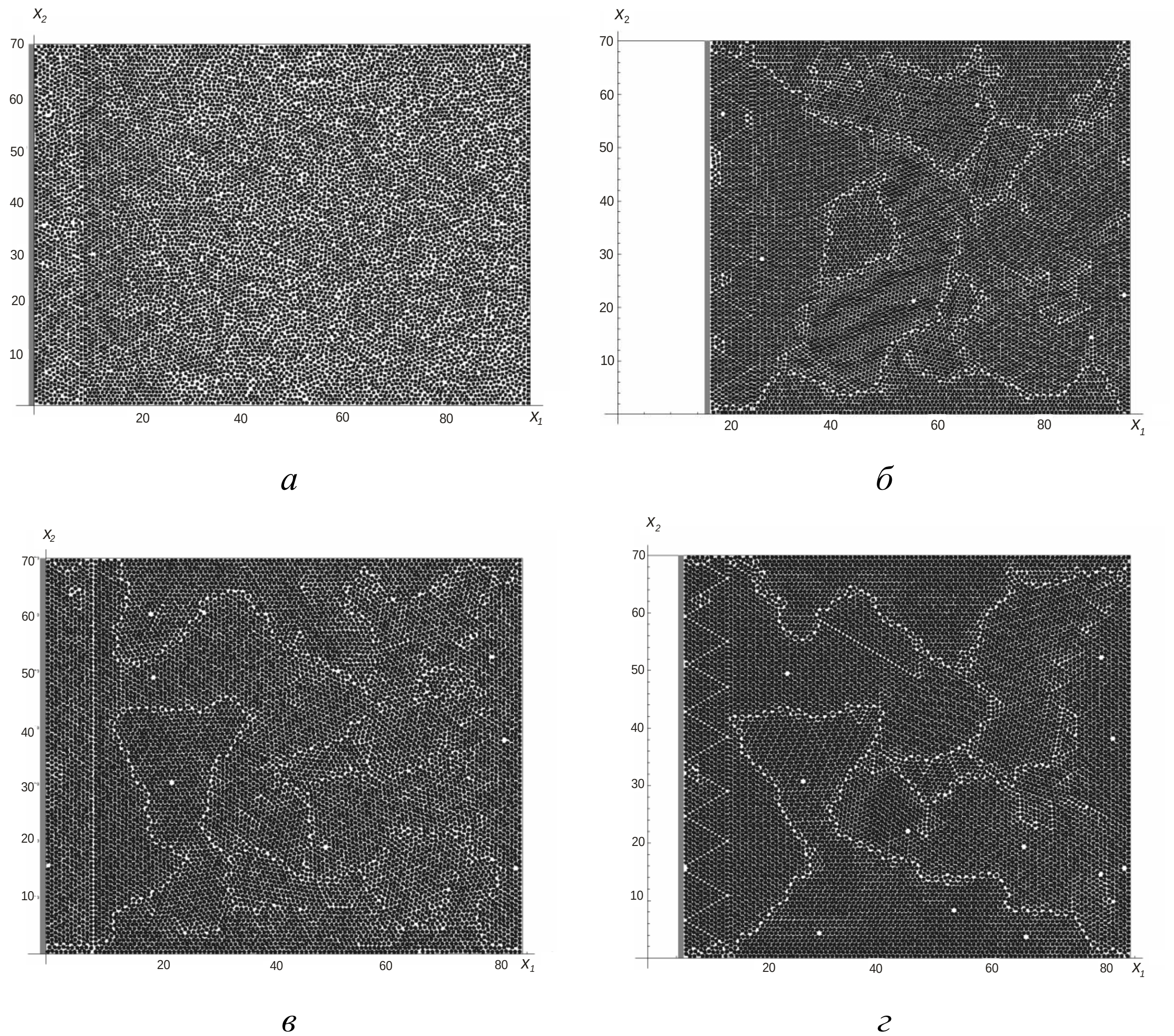


Рис. 3.7. Масиви, утворені елементами одного розміру до деформування *а*) $\nu = 0{,}3$, *в*) $\nu = 0{,}2$ і після деформування *б*) $\nu = 0{,}3$, *г*) $\nu = 0{,}2$.

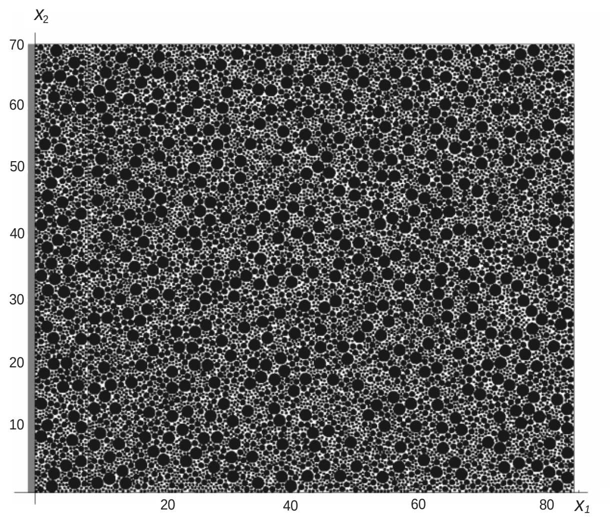
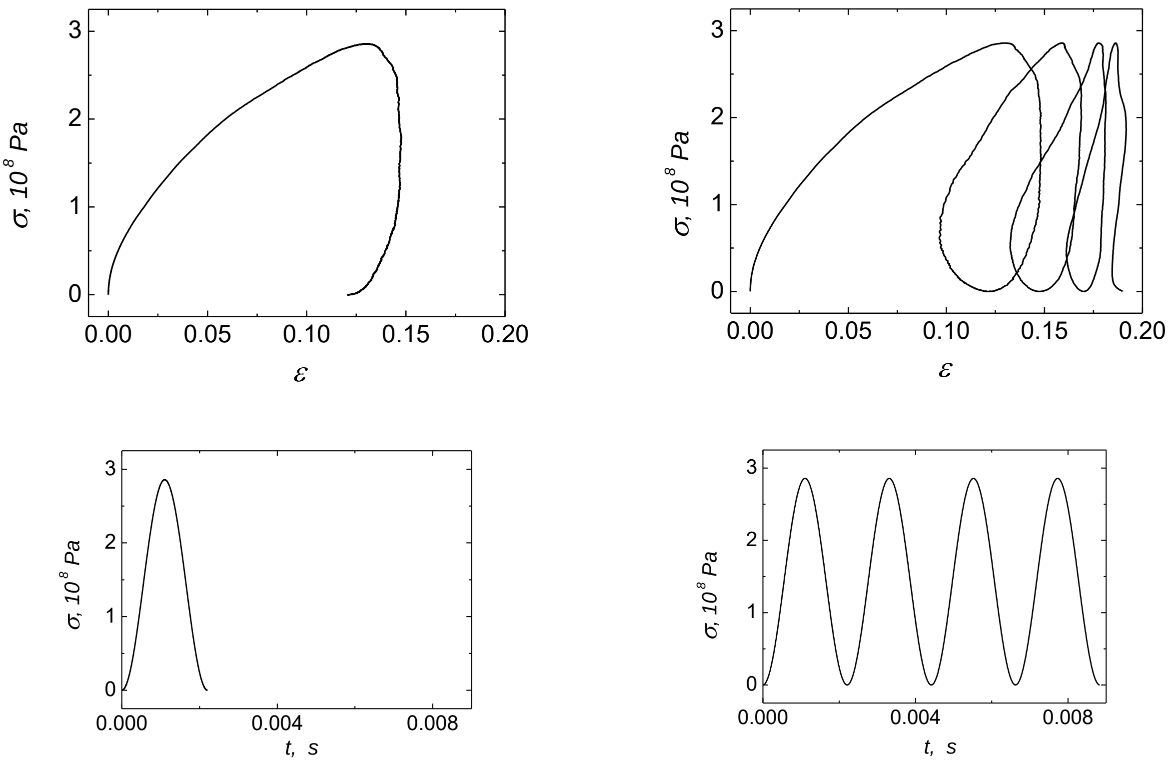


Рис. 3.8. Масив, утворений елементами трьох розмірів. Пористість $\nu = 0{,}2$.

Також було проведено комп'ютерне моделювання процесу деформування дискретного середовища, сформованого частинками трьох розмірів при кратних імпульсних навантаженнях. Діаграми деформування наведені на рис. 3.9. Порівняння цих діаграм з аналогічними діаграмами для монодисперсного середовища (рис. 3.6) показує, що деформаційні властивості цих середовищ практично однакові: деформації в трьохрозмірному середовищі незначно перевищують деформації середовища, утвореного однаковими елементами. Тобто, в такому процесі і при такій щільності упаковки, колективна поведінка елементів однакового розміру не є домінантною.



а *б*

Рис. 3.9. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$ та протоколи навантажень. Тривалість одинарного імпульсного навантаження $t_{max} = 2{,}21$ м. Частинки трьох розмірів. Пористість $\nu = 0{,}3$.

Отже, отримані діаграми деформацій в результаті проведеного комп'ютерного моделювання процесів деформування дискретного середовища, утвореного елементами одного й того самого розміру та елементами трьох різних розмірів, узгоджуються з уявленнями, що некласичність поведінки геоматеріалів обумовлена їх структурованою організацією. Характерною особливістю всіх діаграм є їх нелінійність, наявність гістерезису, залежність форм діаграм від швидкості деформування: при збільшенні тривалості дії імпульсного навантаження збільшується кривизна діаграм деформування і зменшується площа гістерезису. Встановлено, що деформаційні характеристики середовища при різних рівнях упаковки можуть істотно відрізнятися один від одного і в процесі деформування елементи можуть проявляти ефекти колективної поведінки.

3.1.2. Пружнов'язка модель взаємодії

У даному пункті роботи розглядається модель структурованого середовища, в якій для опису деформаційних процесів при взаємодії елементів структури використовується модель Больцмана для в'язко-пружного тіла. Як і у випадку пружної взаємодії, сила взаємодії $\mathbf{F}_{ij}$ між структурними елементами i та j може бути розкладеною на нормальну силу $\mathbf{F}_{ij}^{n}$, направлену вздовж лінії, що з'єднує центри двох елементів, та на тангенціальну силу $\mathbf{F}_{ij}^{s}$, направлену перпендикулярно до цієї лінії. Нормальну силу $\mathbf{F}_{ij}^{n}$ будемо обчислювати за формулою [33]

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{n} = -\frac{4\sqrt{2r}\mu}{3}[\delta_{ij}^{3/2} - \int_{0}^{t}\dot{\psi}(t-\xi)\delta_{ij}^{3/2}(\xi)d\xi]\boldsymbol{n}_{ij}, \qquad (3.4)$$

де ψ – функція релаксації, μ – модуль зсуву, $\mathbf{n}_{ij}$ – нормаль, направлена уздовж лінії, що з'єднує центри двох блоків, яку отримано в роботі [321]. Для функції релаксації $\psi(t) = 1 - e^{-t/\tau}$, де τ – час релаксації, рівняння (3.4) набуватиме вигляду

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{n} = -\frac{4\sqrt{2r}\mu}{3}[\delta_{ij}^{3/2} - \frac{1}{\tau}\int_{0}^{t} e^{-(t-\xi)/\tau}\delta_{ij}^{3/2}(\xi)d\xi]\boldsymbol{n}_{ij}\,. \tag{3.5}$$

Тангенційна сила $\mathbf{F}_{ij}^{s}$ обчислюється, як і для пружного середовища, за формулами (2.4) – (2.6). Рівняння руху дискретної системи та алгоритм числового розрахунку даної системи детально описані в розділі 2.1. Інтеграл у рівнянні (3.5) обчислювався методом трапецій для кожної пари взаємодіючих блоків. У розрахунках використані такі константи: $\mu = 7{,}8\cdot10^{10}$ Па, $\rho = 7{,}8\cdot10^{3}$ кг/м^3, $C_s = 2{,}7\cdot10^{6}$ н/м, $C_k = 0{,}1$.

Масив складався із 10500 елементів однакового розміру $r =$ 0,378 см, розташованих хаотично у прямокутній області з пружними стінками. Масив деформувався за допомогою поршня, на який діяла сила, що змінювалася за часом:

$$f = f_0 \sin^2(\pi t / t_{\max})\,. \tag{3.6}$$

Були проведені розрахунки деформування масиву для середовища із суто пружною взаємодією ($\tau = 0$) та в'язко-пружною взаємодією елементів для трьох різних значень часу релаксації $\tau =$ 0,9, 4,4, 8,8 мкс. При цьому амплітуда навантаження складала $f_0 = 10^5$ Н, а його тривалість – $t_{\max}$ =2,2 мс.

На рис. 3.10 наведено діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$ дискретного середовища з нерелаксуючою взаємодією елементів та в'язко-пружною взаємодією при трьох різних значеннях часу релаксації $\tau =$ 0,9; 4,4; 8,8 мкс. Видно, що при збільшенні τ збільшується залишкова деформація та зміщується максимум у бік збільшення деформації. При збільшенні часу релаксації також збільшується дисипація енергії. Це добре видно на рис. 3.11, де наведено розподіл енергії за видами енергії при аналогічних значеннях тривалості навантаження. На рис. 3.11 наведено дві енергії дисипації: E_f – енергія тертя, яка обчислюється як робота сили тертя F_s, та енергія E_e –

енергія релаксації, яка обчислюється як робота, виконана нормальною в'язко-пружною силою F_n. Якщо дисипація енергії E_f практично не залежить від часу релаксації, то дисипація енергії E_e, зв'язаної з в'язко-пружною взаємодією, збільшується суттєво зі збільшенням часу релаксації. На рис. 3.11 також видно, що при збільшенні часу релаксації збільшується загальна енергія системи, однак вона більше витрачає її на дисипацію, тобто система стає більш нерівноважною.

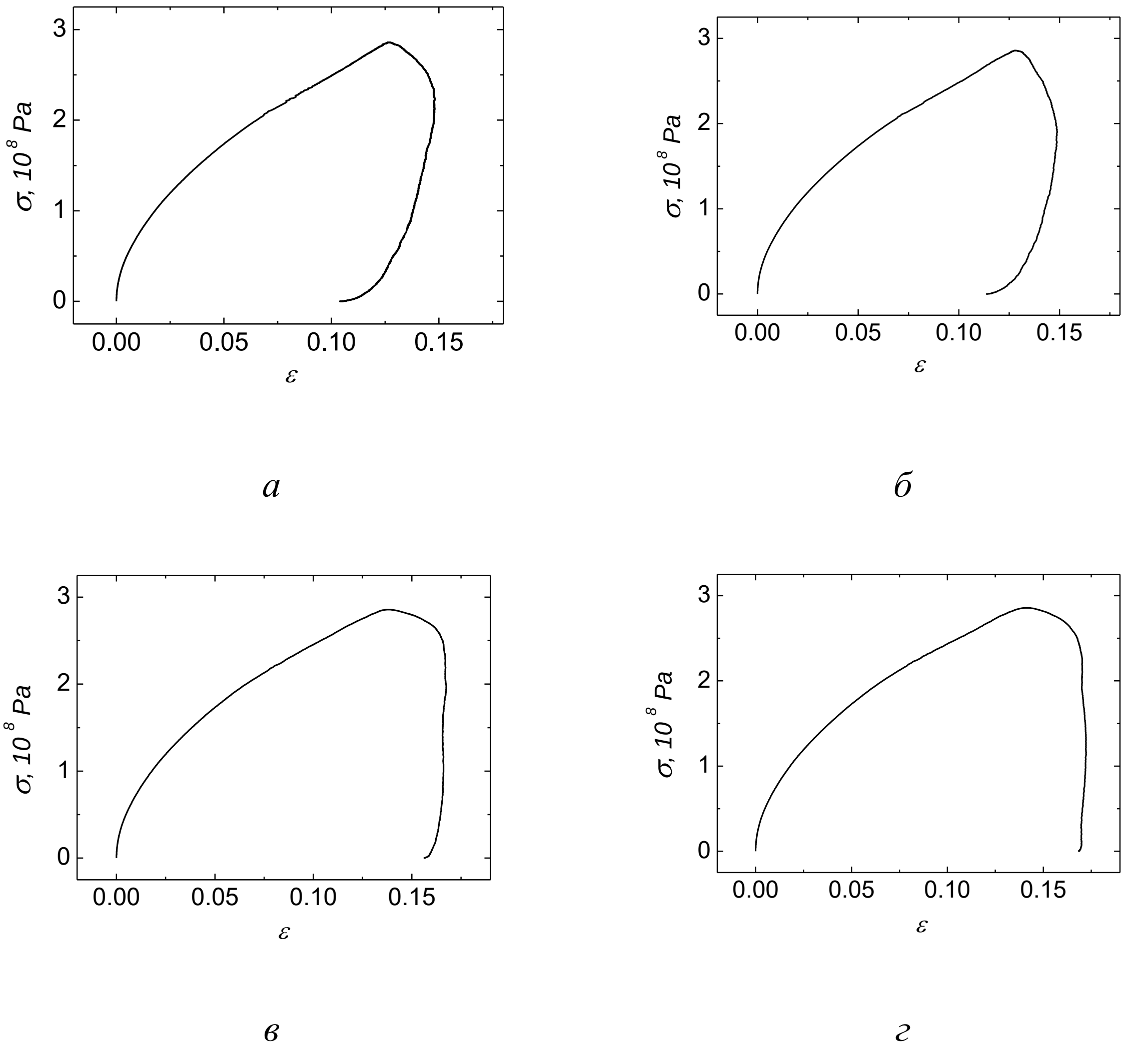


Рис. 3.10. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$: *а*) нерелаксуюче середовище, *б*) $\tau = 0{,}9$ мкс, *в*) $\tau = 4{,}4$ мкс, *г*) $\tau = 8{,}8$ мкс, τ – час релаксації.

Для того, щоб з'ясувати як впливає швидкість деформування на деформаційні характеристики системи із в'язко-пружною взаємодією між елементами, було проведено ряд розрахунків при різній тривалості навантаження, а саме для чотирьох значень $t_{\max} = 2{,}2;\ 4{,}4;\ 8{,}8;\ 22{,}1$ мс. Амплітуди відповідно вибирались $f_0 = 10^5;\ 5 \cdot 10^4;\ 2{,}5 \cdot 10^4;\ 10^4$ Н з тим, щоб сумарний імпульс, який отримало середовище, був однаковим для всіх чотирьох розрахунків. У всіх розрахунках час релаксації був однаковим $\tau = 4{,}4$ мкс.

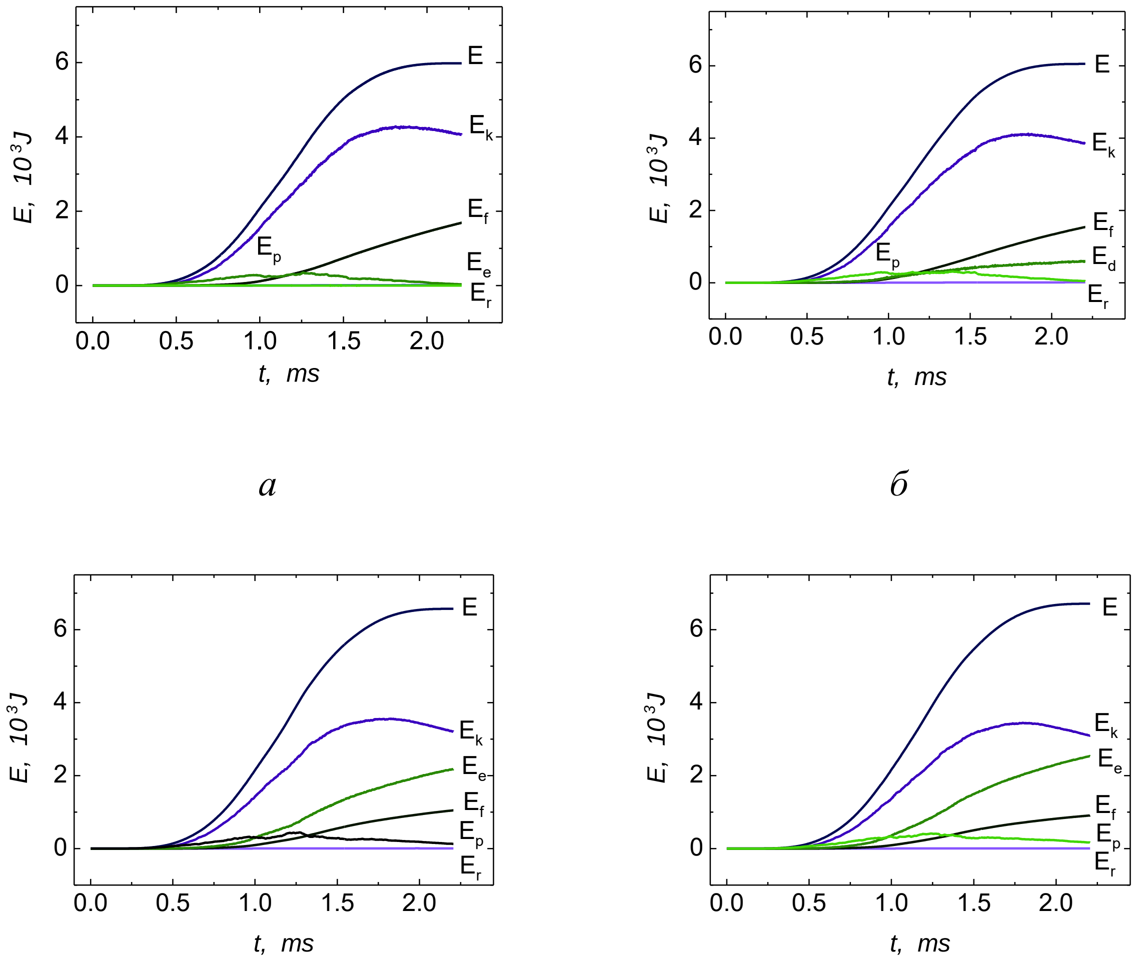


Рис. 3.11. Залежності видів енергії дискретної системи від часу: E – повна енергія, E_k – кінетична енергія, E_e – робота в'язко-пружної сили, E_f – робота сили тертя, E_r – обертальна енергія, E_p – кінетична енергія поршня;
а) нерелаксуюче середовище, *б*) $\tau = 0{,}9$ мкс, *в*) $\tau = 4{,}4$ мкс, *г*) $\tau = 8{,}8$ мкс;
τ – час релаксації.

На рис. 3.12 наведено діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$ для даних тривалостей навантаження. Видно, що діаграма деформування у фазі навантаження має дві ділянки з різними кутами нахилу. На першій ділянці, до деформації $\varepsilon = 0{,}11$, середовище проявляє себе як більш податливе, що пов'язано з заповненням блоками вільного міжблокового простору, а при подальшому деформуванні деформація масиву частково пов'язана з деформацією самих блоків.

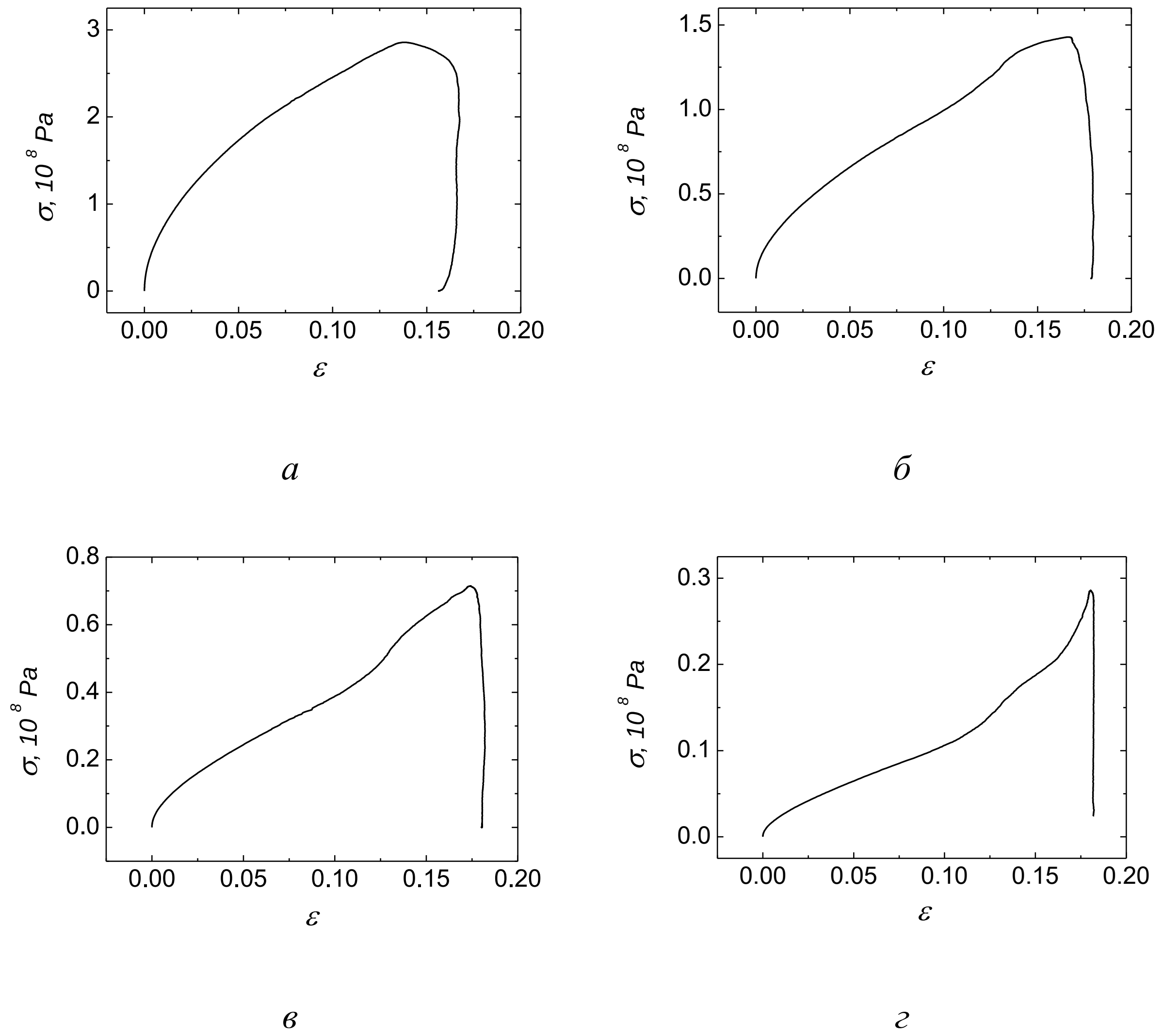


Рис. 3.12. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$. Тривалість імпульсного навантаження *а*) 2,2 мс, *б*) 4,4 мс, *в*) 8,8 мс, *г*) 22,1 мс. Час релаксації $\tau = 4{,}4$ мкс.

Характерним є також те, що при збільшенні тривалості дії імпульсного навантаження, тобто при зменшенні швидкостей деформування (амплітуда імпульсного навантаження при збільшенні тривалості навантаження зменшується, отже швидкість навантаження, а разом з нею і швидкість деформування зменшується) змінюється кривизна діаграми деформування, а залишкова деформація залишається практично незмінною. Подібні зміни кривизни при збільшенні тривалості навантаження мали місце і у випадку пружної взаємодії. Як видно з рис. 3.13, співвідношення між видами енергії

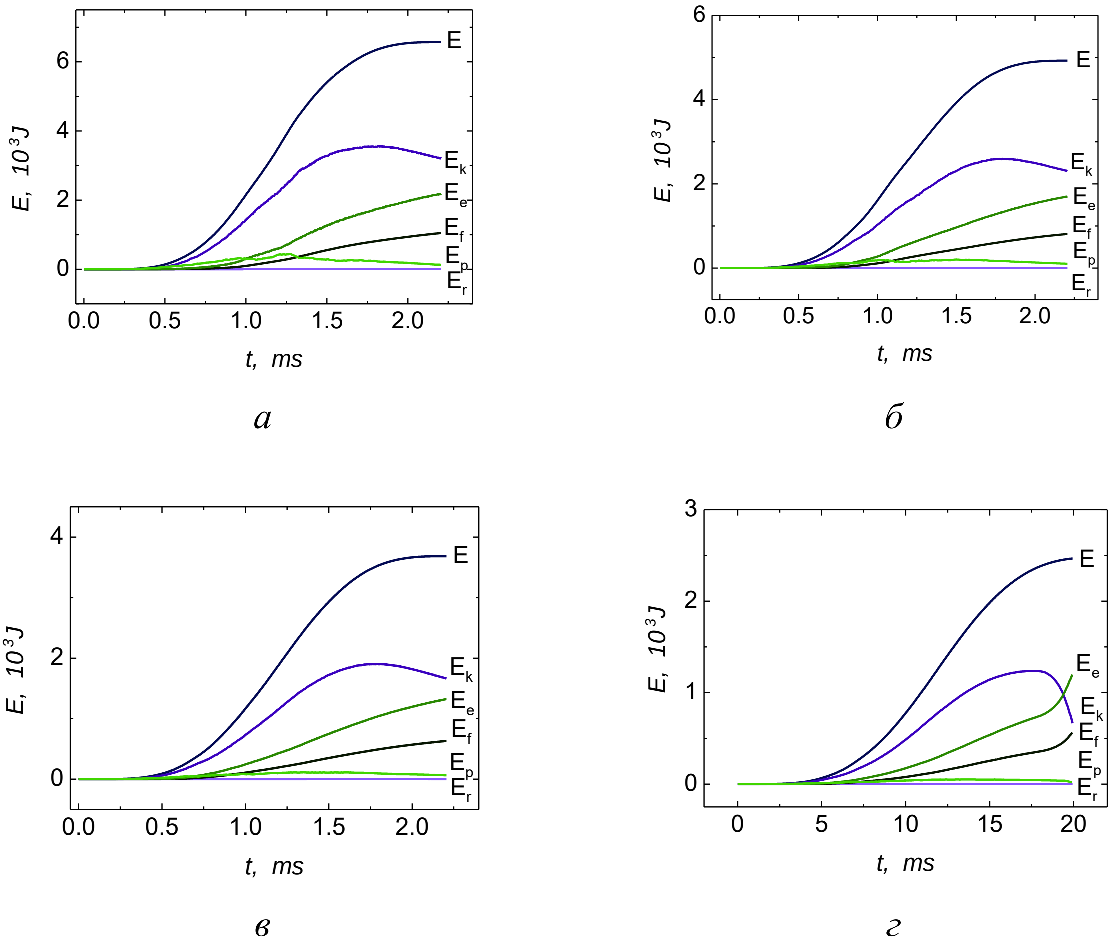


Рис. 3.13. Залежності видів енергії дискретної системи від часу: E – повна енергія, E_k – кінетична енергія, E_e – робота в’язко-пружної сили, E_f – робота сили тертя, E_r – обертальна енергія, E_p – кінетична енергія поршня. Тривалість імпульсного навантаження *а*) 2,2 мс, *б*) 4,4 мс, *в*) 8,8 мс, *г*) 22,1 мс. Час релаксації $\tau = 4{,}4$ мкс.

при зміні швидкості деформування залишається приблизно однаковим. Різке зменшення кінетичної енергії та збільшення дисипативної енергії пов’язане із процесом гальмування хвилі на задній стінці.

Отже, в результаті проведеного комп’ютерного моделювання процесу деформування структурованого середовища із в’язко-пружною взаємодією елементів структури доведено, що збільшення часу релаксації призводить до збільшення нерівноважності середовища та зростання його дисипативних властивостей. Зміна швидкості деформування масиву має наслідком зміну кривизни діаграми подібно до випадку пружної взаємодії між елементами структури, а співвідношення між видами енергії при зміні швидкості деформування залишаються однаковими.

3.1.3. Пружно-пластична взаємодія

У цьому пункті роботи досліджується вплив пластичних властивостей взаємодіючих структурних елементів на деформаційні властивості структурованого середовища. Як і у випадку пружної та пружнов’язкої взаємодій, структуроване середовище моделюється системою структурних елементів сферичної форми [34, 35]. Пластична взаємодія описується моделлю, представленою у розділі 2.3. Система рівнянь руху для масиву дискретних елементів із врахуванням описаної вище взаємодії так само розв’язувалась за допомогою алгоритму Верле [313, 314]. У розрахунках використані такі константи: $E = 2{,}0 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu = 0{,}29$; $r = 0{,}01$ м; $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $C_s = 2{,}7 \cdot 10^6$ н/м; $C_k = 0{,}1$.

Масив складався із 10500 елементів хаотично розташованих у прямокутній області з пружними стінками та деформувався за допомогою поршня, на який діяла сила, що змінювалася за часом за формулою (3.6). Були проведені розрахунки деформування масиву для середовища із суто пружною взаємодією та пружно-пластичною взаємодією елементів для чотирьох різних значень межі пластичності p_{pl}. При цьому амплітуда навантаження складала $f_0 = 2 \cdot 10^5$ Н, а тривалість навантаження $t_{\max} = 2{,}2$ мс.

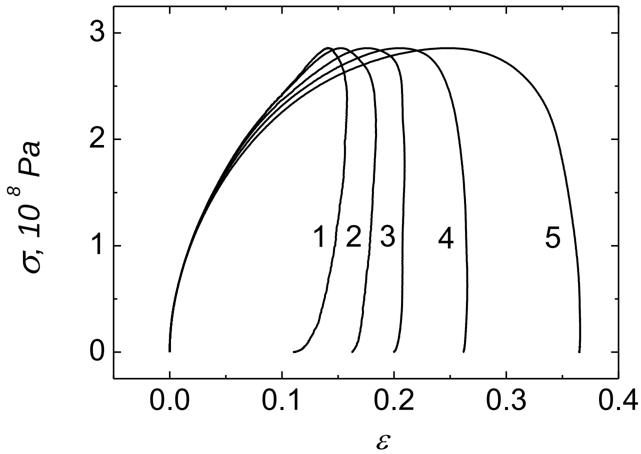


Рис. 3.14. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$ для значень межі пластичності:

1) $P_{pl} \to \infty$, пружна взаємодія; 2) $P_{pl} = 4 \cdot 10^9$ Па, 3) $P_{pl} = 3 \cdot 10^9$ Па,

4) $P_{pl} = 2 \cdot 10^9$ Па, 5) $P_{pl} = 10^9$ Па.

Діаграму деформування $\sigma(\varepsilon)$ дискретного середовища з пружною взаємодією елементів та пружно-пластичною взаємодією при чотирьох різних значеннях P_{pl} зображено на рис. 3.14: при зменшенні порогу пластичності P_{pl} збільшується залишкова деформація та зміщується максимум у бік збільшення деформації і звичайно ж збільшується дисипація енергії. Це добре видно на рис. 3.15, де наведено розподіл енергії за видами енергії при аналогічних значеннях тривалості навантаження. На рис. 3.15 наведено дві енергії дисипації: E_d – енергія тертя, яка обчислюється як робота сили тертя F_s та енергія E_{pl} – енергія пластичності, яка обчислюється як робота, виконана нормальною пружно-пластичною силою F^n. Із рисунка видно, що при зменшенні порогу пластичності зростає енергія пластичності, а енергія тертя, навпаки, зменшується. Кінетична енергія зі зменшенням P_{pl} практично не змінюється, а загальна енергія системи зростає, тобто більш пластичне середовища більше “засвоює” енергії і стає більш нерівноважним. На рис. 3.16 та рис. 3.17 зображено один із прикладів історії взаємодії двох елементів – залежності сили F_{ij}^{n} від часу та величини взаємного зближення δ_{ij}, де $\boldsymbol{i}$ =10, j=108 для випадку $P_{pl} = 3\cdot 10^{9}$ Па.

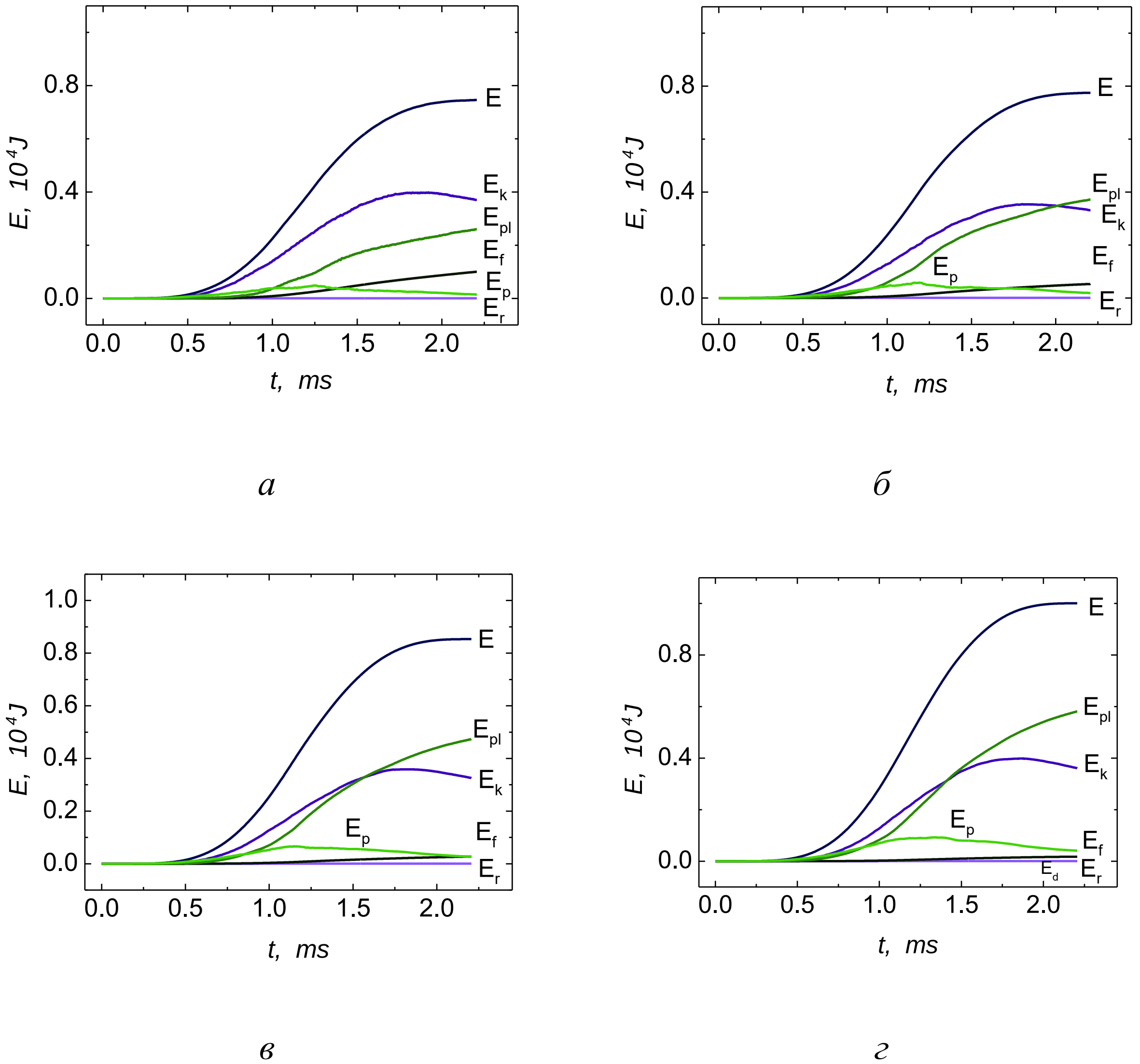
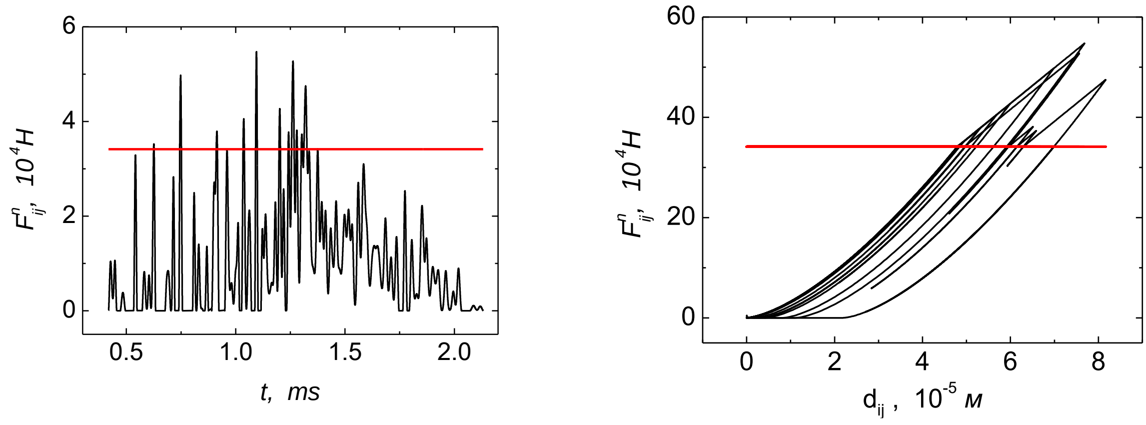


Рис. 3.15. Залежності видів енергії дискретної системи від часу: E – повна енергія, E_k – кінетична енергія, E_{pl} – енергія пластичності, E_f – робота сили тертя, E_r – обертальна енергія, E_p – кінетична енергія поршня. *а*) $P_{pl} = 4\cdot 10^{9}$ Па, *б*) $P_{pl} = 3\cdot 10^{9}$ Па, *в*) $P_{pl} = 2\cdot 10^{9}$ Па, *г*) $P_{pl} = 10^{9}$ Па.

На обох рисунках пряма горизонтальна лінія відповідає межі пластичності. Як видно, ці два елементи зіштовхувалися неодноразово, збільшуючи при цьому залишкову деформацію, оскільки їх взаємодія також відбувалася і в пластичній області.



а *б*

Рис. 3.16. Залежності сили взаємодії F_{ij}^{n} від часу t для елементів $\boldsymbol{i}=10$, $j=108$ (*а*) та від величини взаємного зближення δ_{ij}, де $\boldsymbol{i}=10$, $j=108$. Межа пластичності $P_{pl}=3\cdot10^{9}$ Па.

Таким чином, в результаті проведеного комп’ютерного моделювання процесу деформування структурованого середовища з пружно-пластичною взаємодією елементів структури отримано діаграми деформування таких масивів при різних значеннях межі плинності. Показано, що зменшення порогу пластичності призводить до збільшення нерівноважності середовища та зростання його дисипативних властивостей.

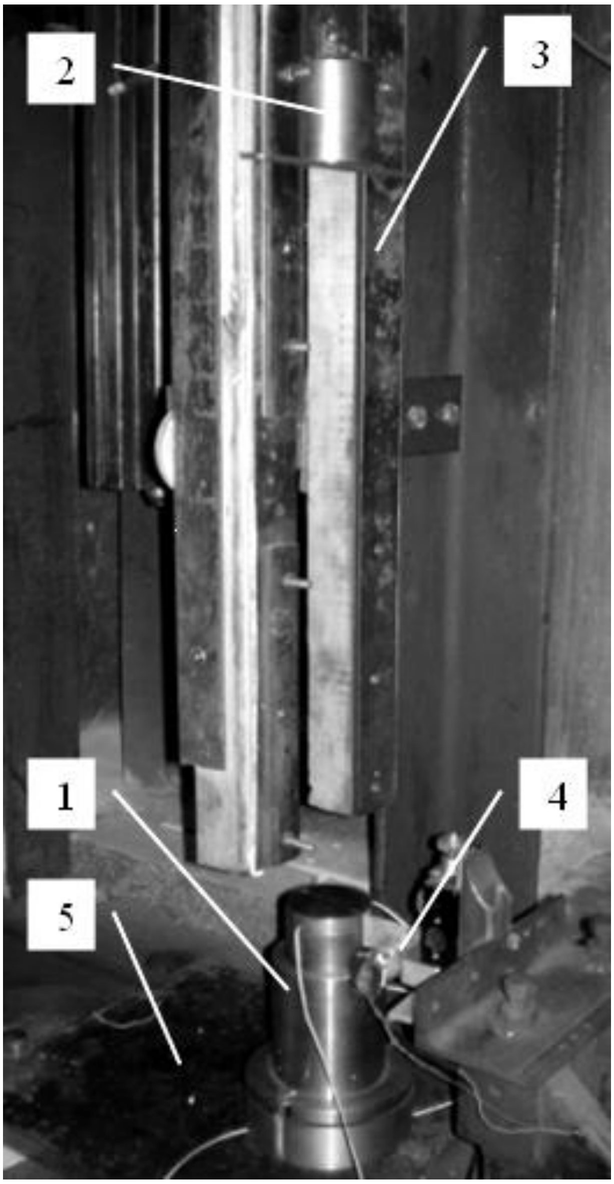
3.2. Експериментальне дослідження динамічного деформування гранульованого середовища під дією імпульсного навантаження

У процесі динамічного деформування природні структуровані середовища часто проявляють властивості, не притаманні однорідним матеріалам. Так в експериментах з імпульсним навантаженням сухого піску випуклість діаграми деформування може змінюватись залежно від швидкості його навантаження [322]. Згідно з результатами детальних експериментальних досліджень ударно-хвильового навантаження піску [323, 324] вигляд діаграми деформування залежить не тільки від швидкості навантаження, а й від гранулометричного складу та його вологості. Очевидно, що структуровані середовища такого типу (гранульовані середовища) мають значно більше внутрішніх ступенів свободи, і між цими ступенями свободи відбувається неперервний процес перерозподілу енергії. Цей перерозподіл залежить від структурної будови, форми структурних елементів, характеру взаємодії елементів, наявності флюїдів, тощо. Як показують експерименти з використанням оптичного методу [138, 149, 156, 325, 326], методу нейтронної дифракції [327], методу рентгенівської томографії [328, 329] та методів, в яких заміряються силові характеристики окремих елементів структури [133, 147, 330], механізми деформування структурованих середовищ, зокрема гранульованих, мають особливості, які суттєво відрізнять їх від процесів деформування в однорідному середовищі.

У цьому пункті роботи представлено результати експериментального дослідження впливу розмірів елементів структури та характеру взаємодії між ними на макрохарактеристики модельного структурованого середовища, зокрема на діаграму деформування при його імпульсному навантаженні. Експерименти з деформування структурованих середовищ проводились на стенді (рис. 3.17), який складається з товстостінного циліндра з поршнем (1), закріпленим на масивній металевій плиті, пристрою для вимірювання зміщень поршня (4) та металевого ударника (2), який по напрямних (3) рухається під дією сили тяжіння і ударяється об поршень, здійснюючи імпульсне навантаження поршня, який, у свою чергу, передає навантаження на структуроване середовище, що міститься у циліндрі [38, 40, 55]. Модельне структуроване середовище формується масивом металевих кульок однакового розміру. Кульки засипають у циліндр, після чого встановлюється поршень, ущільнюючи середовище таким чином, аби об'єм щоразу був однаковим. Це дає змогу отримати в кожному досліді однакову початкову щільність.

Поршень (рис. 3.17, *б*) складається із двох частин, між якими встановлено датчик сили. Обидві частини поршня з'єднані за допомогою напрямних, які забезпечують одновимірність руху. Зміщення поршня реєструється за допомогою датчика (4) – трубки з прорізом, з одного боку якої встановлений фотоелемент, з іншого – джерело світла. На поршні закріплена шторка зі спеціальним профілем, яка частково перекриває світловий потік, що випромінює джерело. Фотоелемент формує відповідну електричну напругу, яка надалі реєструється числовим осцилографом.

Для згладжування імпульсу навантаження використовується гумова прокладка, яка розташована на верхній поверхні поршня і по якій наносять ударником удар. Необхідність її використання зумовлена тим, що в реальних умовах створити ідеально плоский ударний фронт надзвичайно складно, оскільки незначна нерівність на поверхні ударника чи поршня чи незначне відхилення ударника від вертикалі призводить до того, що на осцилограмах з'являються високочастотні паразитичні осциляції. На рис. 3.18 показано початковий імпульс сили, отриманий за навантаження поршня ударником без прокладки та з прокладкою у один і два шари. Зауважимо, що використання прокладки забезпечує згладжування імпульсів, а це дає можливість отримувати подібні імпульси за однакових ударів.



б

в

а

Рис. 3.17. Експериментальний стенд для дослідження деформування гранульованого середовища під дією імпульсного навантаження: *а*) загальний вигляд; *б*), *в*) циліндр і поршень.

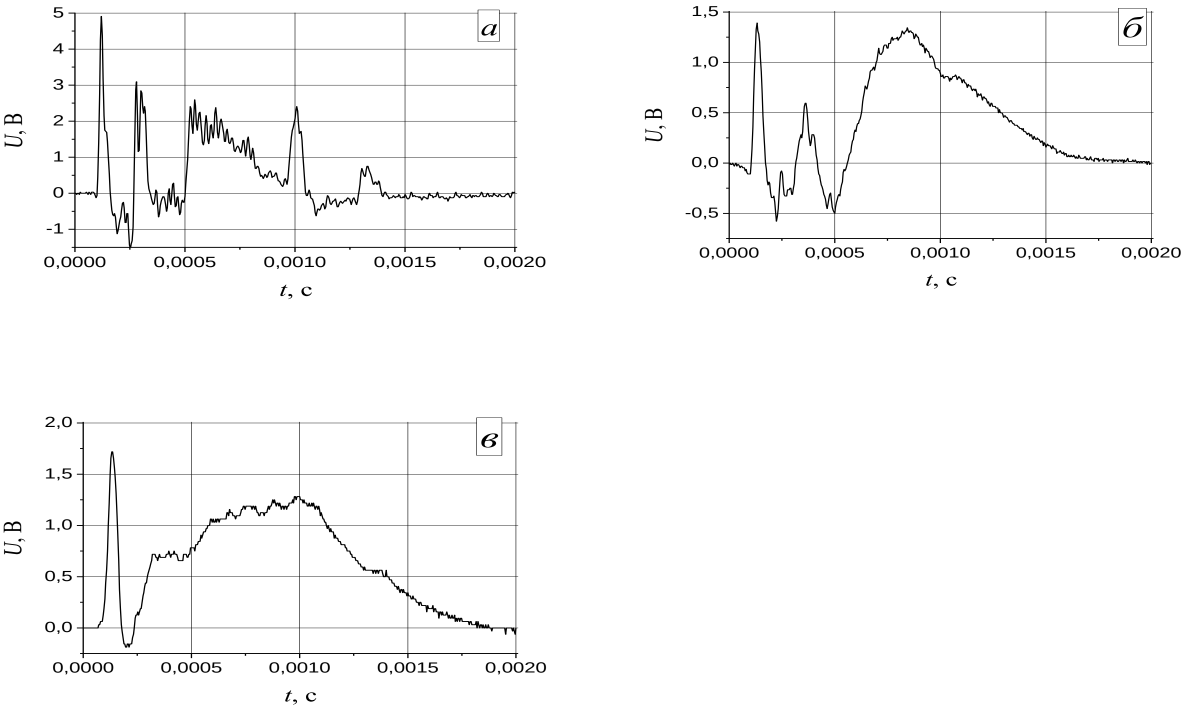
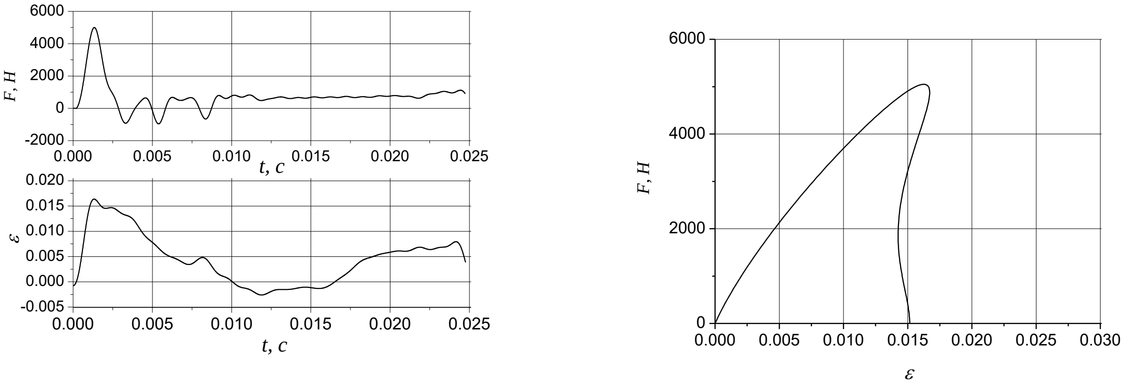
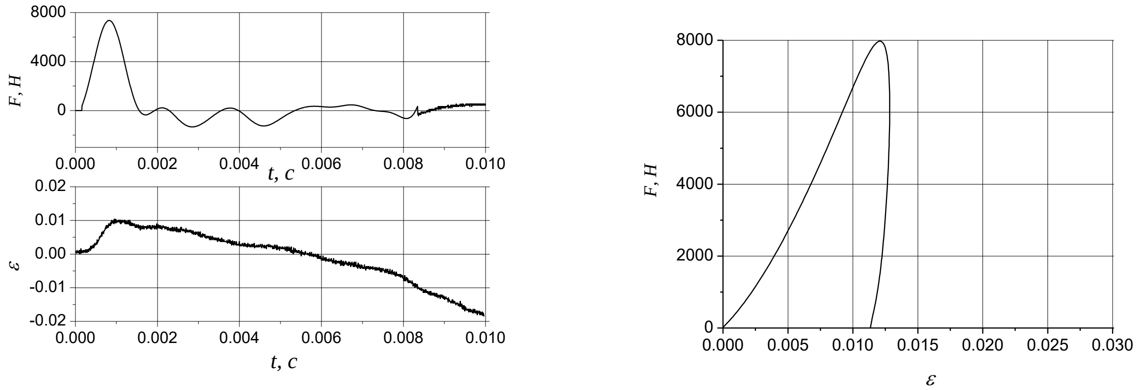


Рис. 3.18. Характерні осцилограми початкового навантаження: а) без прокладки; *б*) через гумову прокладку в один шар; *в*) через гумову прокладку із двох шарів; *U* – напруга на датчику сили.

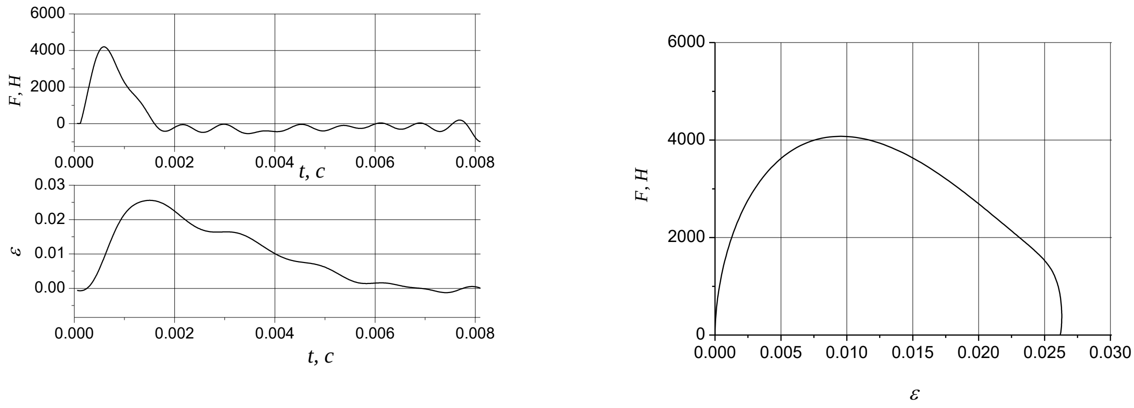
За описаною вище методикою було проведено 3 серії досліджень деформування структурованих середовищ. В першій серії середовище складалось із металевих кульок діаметром 3 мм, у другій це саме середовище було насичене флюїдом (мастилом), у третій досліджували деформування кульок діаметром 5 мм. Кількість структурних елементів вибирали із умови однакових об’ємів. Найхарактерніші часові залежності початкового навантаження, деформації середовища та відповідні діаграми деформування показано на рис. 3.19. Як видно, діаграми деформування масивів з різними структурними елементами суттєво розрізняються. Збільшення розміру структурних елементів спричинює значне підвищення залишкових деформацій (майже в 1,8 рази).



а



б



в

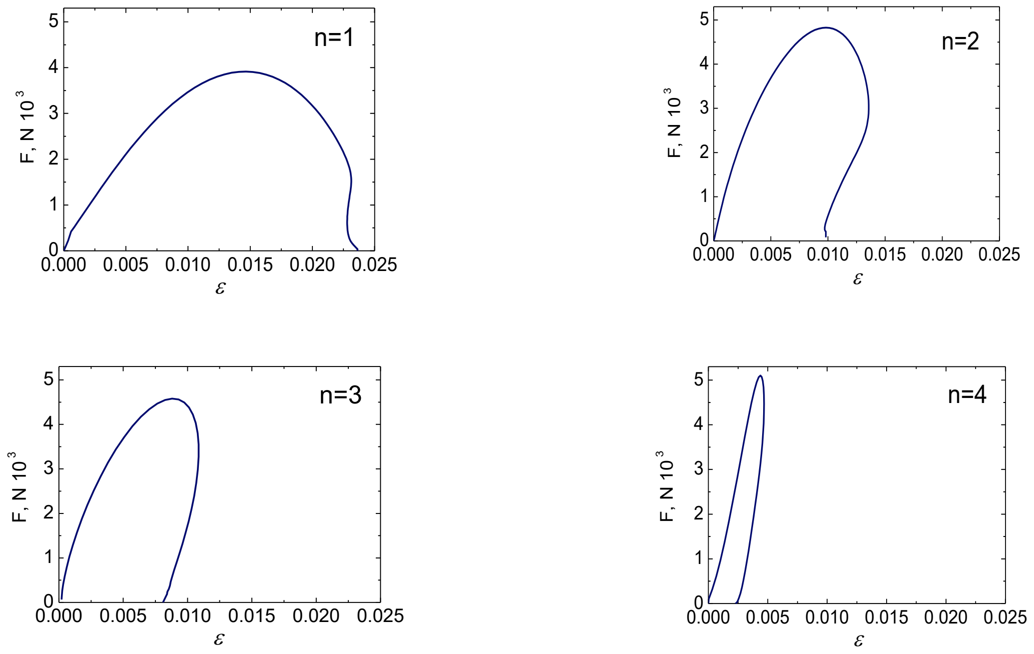
Рис. 3.19. Залежності сили F та деформації ε від часу t за імпульсного навантаження середовища та відповідні діаграми деформування масиву $F(\varepsilon)$: *а*) масив із кульок діаметром $d = 3$ мм; *б*) $d = 3$ мм з доданням флюїду; *в*) $d = 5$ мм.

Наявність флюїду змінює характер деформування середовища. Суттєво зменшується коефіцієнт тертя між структурними елементами середовища, що зумовлює збільшення швидкості його деформування, а отже, швидке переупаковування структурних елементів і, як наслідок, різке зростання жорсткості середовища. В результаті взаємодії поршня з таким середовищем, останній набуває значного прискорення у зворотному напрямку. Наявність у середовищі флюїду також впливає на форму діаграми деформування: без флюїду стиснення середовища відбувається за кривою випуклою догори (рис. 3.19, *а*), а за наявності флюїду – випуклість обернена донизу (рис. 3.19, *б*).

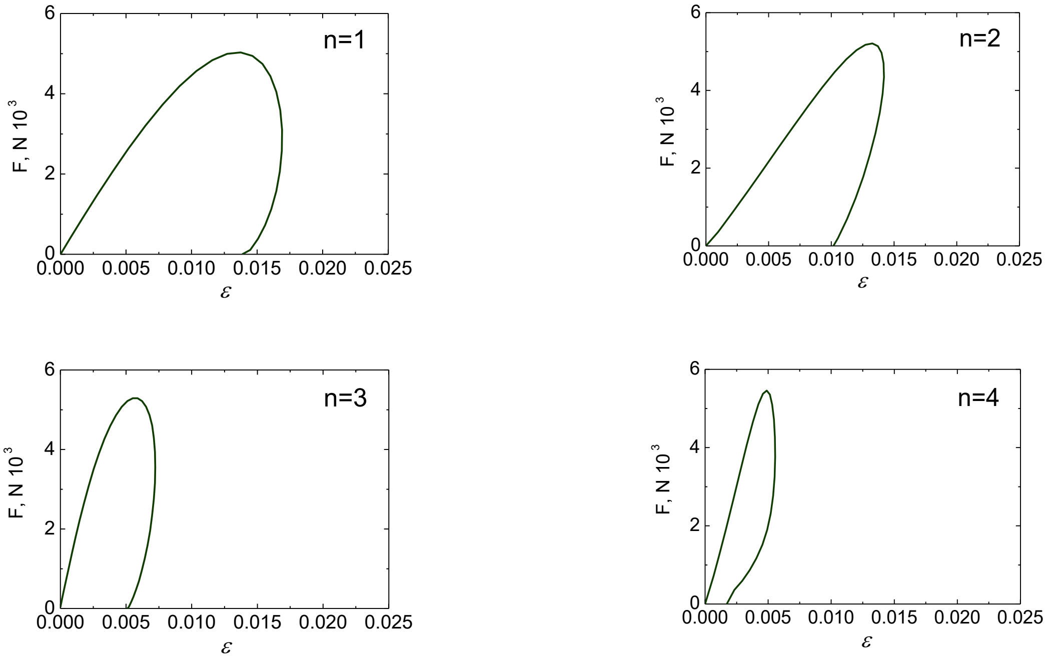
Слід зазначити, що в окремих випадках характер деформування залежить від початкового упакування масиву. Так, імовірне початкове розташування ланцюжків куль в одну лінію, перпендикулярну до площини навантаження, зумовлює збільшення жорсткості удару. В результаті поршень після взаємодії з середовищем рухається у зворотному напрямку. Деформації в разі навантаження такого середовища значно знижуються.

Розглянемо особливості деформування гранульованого середовища за багаторазового імпульсного навантаження. Згідно з експериментами, в разі збільшення кількості послідовних навантажень середовище поступово ущільнюється, що призводить до збільшення жорсткості удару. В результаті зростає амплітуда початкового імпульсу і зменшується його тривалість (рис. 3.20).

Із рис. 3.20 видно, що зі збільшенням кратності навантаження масиви кульок поступово ущільнюються, що приводить до зниження їх залишкових деформацій. Незалежно від розмірів структурних елементів повне ущільнення настає при 4-5 навантаженнях. Після повного ущільнення масиву спостерігається значний рух поршня у зворотному напрямку.



а



б

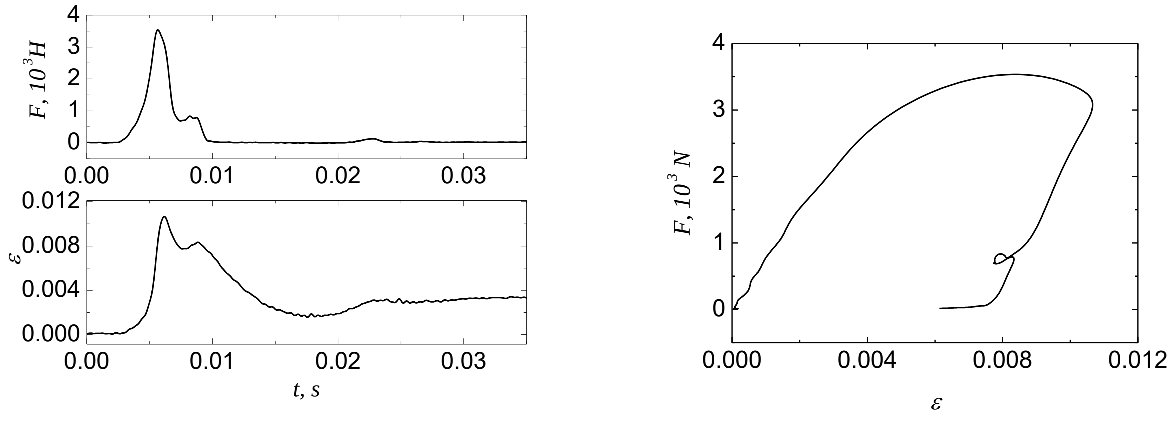
Рис. 3.20. Діаграми деформування $F(\varepsilon)$ середовища із кульок діаметром: *а*) $d = 5$ мм, *б*) $d = 3$ мм за багаторазового навантаження; F – сила; ε – деформація; n – кратність навантаження.

Таким чином, проведено серію експериментів з деформування структурованого модельного середовища, утвореного елементами у вигляді куль однакового діаметра. Розглянуто такі розміри структурних елементів: $d = 3$ мм та $d = 5$ мм. Побудовані за результатами експериментів діаграми деформування масивів з різними структурними елементами мають суттєві відмінності. Збільшення розміру структурних елементів спричинює істотне підвищення значень залишкових деформацій. За динамічного деформування структурованого середовища (діаметр елементів $d = 3$ мм) з додаванням невеликої кількості флюїду його наявність також впливає на форму діаграми деформування, змінюючи випуклість діаграми у фазі навантаження.

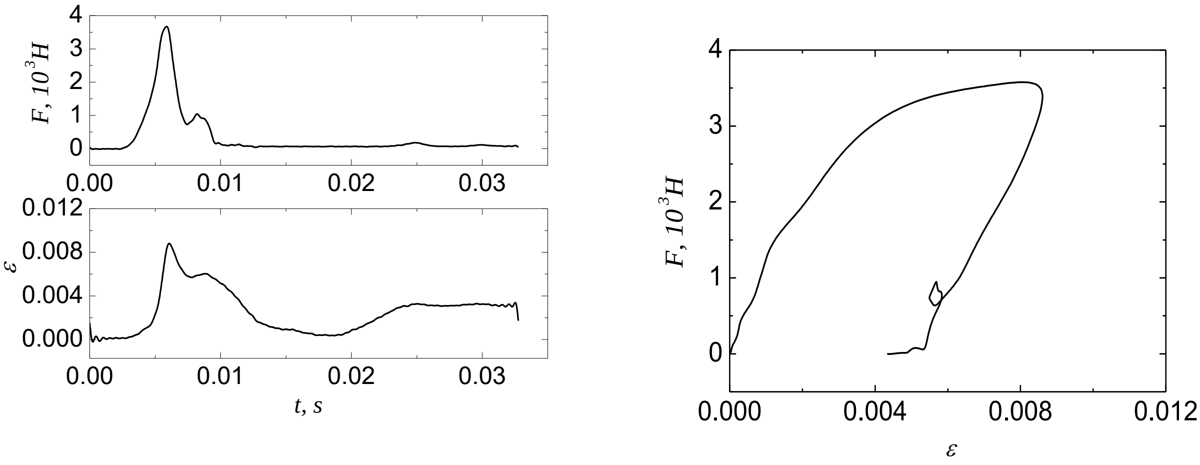
Експериментально досліджено характер деформування структурованого середовища за багаторазового навантаження. Внаслідок збільшення кратності навантаження середовище поступово ущільнюється. Незалежно від розмірів структурних елементів повне ущільнення настає при 4-5 навантаженнях, після чого діаграма деформування не змінюється.

Також було проведено експерименти з динамічного деформування дисперсного середовища, утвореного масивом із суміші кульок двох розмірів у різних пропорціях. Розглядалися три варіанти дисперсного середовища, з масиву металевих кульок діаметрами 3 мм та 2 мм у відсоткових співвідношеннях: 50×50, 25×75 та 75×25 %.

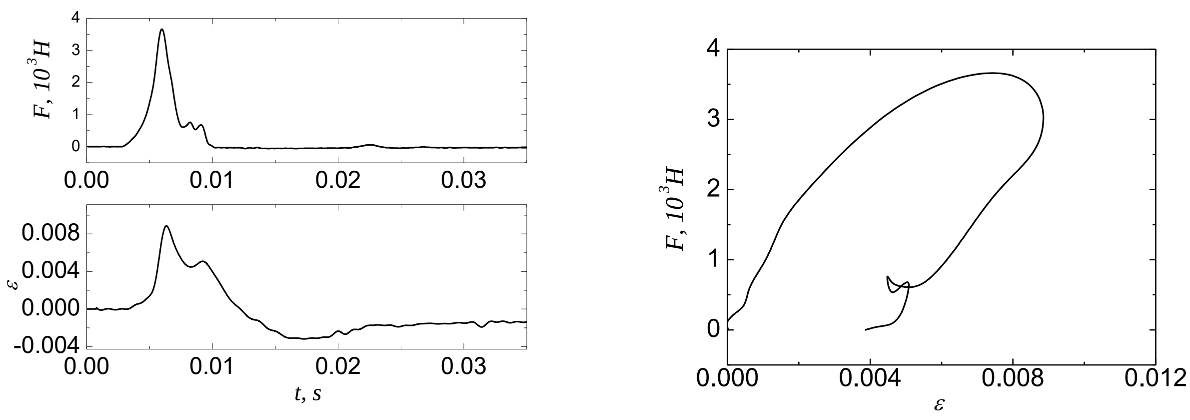
Як і у попередньому випадку, навантаження середовища здійснювалося за допомогою ударника, який падав з висоти 0,5 м. На рис. 3.21 наведені зареєстровані в експериментах типові залежності сили та деформації масивів кульок від часу. На основі цих залежностей побудовані діаграми деформування. Оскільки залежність сили від часу після піку є негладким, що зв’язано з хвилею відбиття, то і відповідно на діаграмах деформування має місце петлеподібне утворення, але після проходження другого максимуму у протоколі навантаження, крива $F(\varepsilon)$ асимтотично виходить на продовження головного розвантаження. Всі діаграми деформування мають гістерезисний характер, а залишкова деформація найбільша у випадку, коли кульки діаметром 3 мм складають 25%, а 2 мм – 75%, тобто така система



а



б



в

Рис. 3.21. Результат дослідження деформування масиву з кульок *а*) $d=2$ мм – 75% та $d=3$ мм – 25%; *б*) $d=2$ мм – 50% та $d=3$ мм – 50%; *в*) $d=2$ мм – 75% та $d=3$ мм – 25%. Панелі ліворуч – залежності сил та деформацій від часу, праворуч – діаграми деформування упаковується найщільніше. У двох інших випадках залишкові деформаціїї майже однакові.

3.3. Розподіл міжгранульних сил у полі сили тяжіння

Для структурованих середовищ, що знаходиться у гравітаційному полі, характерною є суттєва неоднорідність полів напружень та деформацій. Часом відхилення сил взаємодії між елементами структури від середнього значення може досягати критичних значень, що спричинює втрату стійкості середовища чи руйнування стінок вмістилища, в якому знаходиться даний масив. Розподіл сил в статичному масиві гранул інтенсивно досліджувався в експериментах [133, 147, 148, 331, 332] та за допомогою комп'ютерного моделювання [144, 326, 333, 334]. Як свідчать ці дослідження, у розподілі великих сил має місце експоненціальне згасання і ця універсальна закономірність не залежить від властивостей структурних елементів, коефіцієнта тертя, щільності упаковки тощо.

У даному пункті роботи за допомогою комп'ютерного моделювання досліджуються розподіли сил у дисперсному структурованому (гранульованому) середовищі, яке знаходиться у полі сили тяжіння в навантаженому та ненавантаженому станах. Розглядаються три випадки розподілу елементів структури за розмірами – розподіл Гаусса з невеликою дисперсією та випадок середовища, утвореного елементами трьох розмірів, співвідношення між сусідніми розмірами яких складає $L_i / L_{i+1} = 2$, що є характерним для природніх геосередовищ [3, 5].

В області, що має форму прямокутного паралелепіпеда, випадковим чином розташовується 20000 елементів сферичної форми з гауссовим розподілом за розмірами [36]. Під дією сили тяжіння кулі падають донизу, утворюючи ущільнений масив (рис.3.22). Для розрахунку руху елементів використовувалась комп'ютерна програма для тривимірного моделювання, побудована на основі методу дискретних елементів. Елементи мали такі параметри: $E = 2{,}1\cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0{,}32$; $\rho = 7{,}8\cdot 10^{3}$ кг/м^3; $r_0 = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ м, де r_0 – середній радіус, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, ρ – щільність.

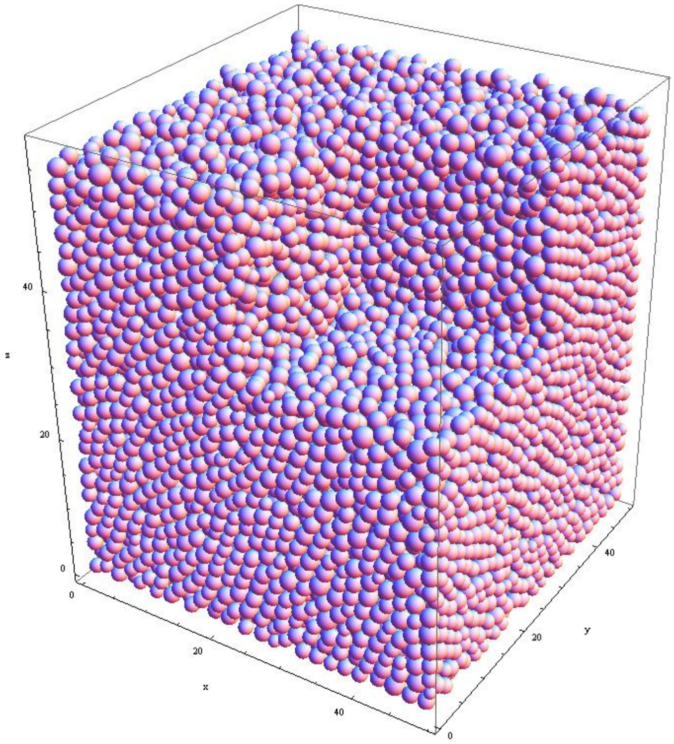
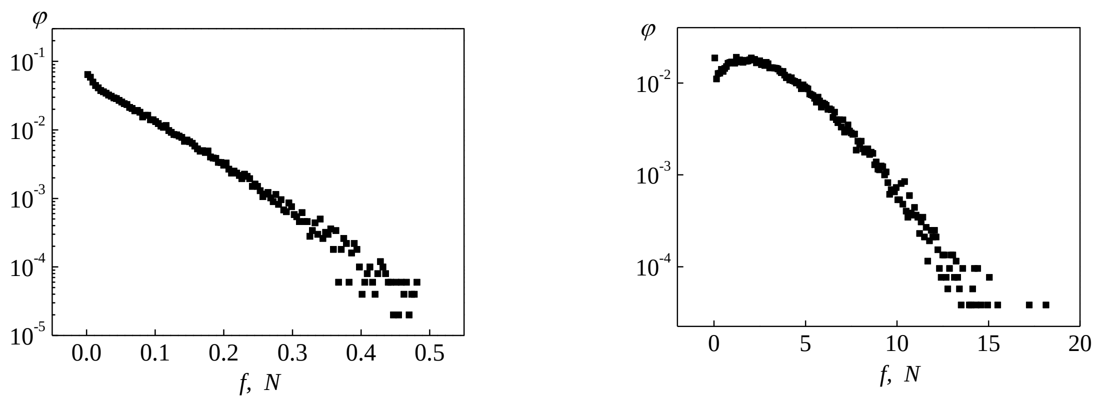


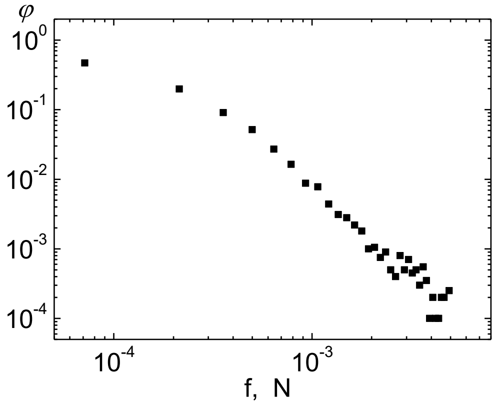
Рис. 3.22. Ущільнений у гравітаційному полі дискретний масив.



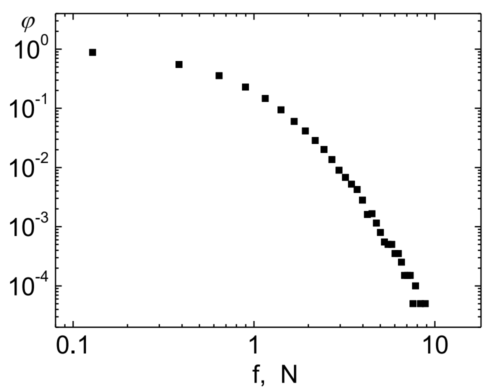
а *б*

Рис. 3.23. Розподіл сили взаємодії між гранулами: *а*) в масиві, що знаходиться у полі сили тяжіння без навантаження; *б*) для навантаженого середовища поршнем масою 50 кг.

Розподіл сил взаємодії між елементами структури у напівлогарифмічних координатах показано на рис. 3.23, з якого видно, що функція розподілу має досить чітку експоненціальну залежність. Розподіли сил для навантаженого масою 50 кг масиву демонструє рис. 3.23, *б*, звідки видно, що у навантаженому масиві є виділене значення сили f_0 = 2 Н. Що стосується розподілу для великих значень сил, то він, як і в зазначених дослідженнях [133, 144, 147, 148, 150, 326, 331, 333, 334], має експоненційно затухаючий “хвіст”. Також було проведено розрахунок стиснення масиву масою 50 кг, в якому відсутнє тертя між елементами структури. Порівняння цього розподілу з аналогічним для масиву з тертям показує, що вони подібні, тобто тертя між елементами структури не впливає на розподіл сил.



а



б

Рис. 3.24 Розподіл сили взаємодії між частинками: а) в масиві, що утворений елементами 3-х розмірів і знаходиться у полі сили тяжіння без навантаження; б) у масиві, що утворений елементами 3-х розмірів і навантажений поршнем масою 50 кг.

Важливими є дослідження розподілу сил у дискретному масиві з ієрархічним розподілом елементів за розмірами, що має місце у реальному геосередовищі. Виходячи з наявності обмежених комп’ютерних ресурсів розглядається середовище, утворене структурними елементами трьох розмірів: $r_1 = 7{,}2$, $r_2 = 3{,}6$, $r_3 = 1{,}8$ мм, тобто розмір елемента сусіднього рівня у два рази менший, а сумарна маса всіх елементів кожного рівня є величиною сталою. Отже, кількість частинок на трьох рівнях є такою: $N_1 = 274$, $N_2 = 2192$, $N_3 = 17536$, а сумарна кількість всіх частинок – $N = 20002$. Крім того, загальна маса всіх елементів дорівнює масі всіх елементів у масиві з гауссовим розподілом. Розподіл сил у середовищі, що знаходиться в полі сили тяжіння в логарифмічних координатах, ілюструє рис. 3.24, а. Видно, що при великих значеннях сил функція розподілу має степеневу залежність, що свідчить про масштабну інваріантність в розподілі сил в області $f > 10^{-4}$ Н. Подібний характер розподілу сил має місце у випадку навантаженого середовища (див. рис. 3.24, *б*). При $f > 1{,}7$ Н розподіл також має степеневий характер затухання сил. Якщо порівнювати дані розподіли сил з аналогічними розподілами для неієрархічного середовища (рис. 3.23, *б*), то можна зауважити, що ієрархічне середовище зовсім по іншому розподіляє сили міжчастинкової взаємодії.

3.4. Розподіл сил та їх кореляційні властивості у гранульованому середовищі під дією імпульсного навантаження

У цьому пункті наводяться результати дослідження розподілів сил, кореляційних властивостей, а також інших мікрохарактеристик гранульованих систем, підданих імпульсному навантаженню. Дослідження здійснювалося експериментально та за допомогою комп'ютерного моделювання.

Розглядається процес деформування гранульованого масиву, утвореного із сферичних елементів, під дією імпульсного навантаження, яке створюється при ударі падаючого ударника об поршень, і який у свою чергу передає навантаження на гранульоване середовище. Таке деформування здійснювалось в серії експериментів, в яких вимірювались сил взаємодії гранул з дном циліндричного контейнера [42]. Експериментальна установка схематично зображена на рис. 3.25. Як і установка, що описана в пункті 3.2.1, вона складається з товстостінного циліндра, встановленого на масивній металевій пластині з внутрішнім діаметром 60 мм, поршня масою 1.538 кг і ударника масою 1,394 кг – всі вони виготовлені зі сталі. В якості гранул вибиралися стальні В якості гранул вибиралися стальні кульки діаметром 3 ± 0.01 мм, масивом яких заповнювався циліндр.

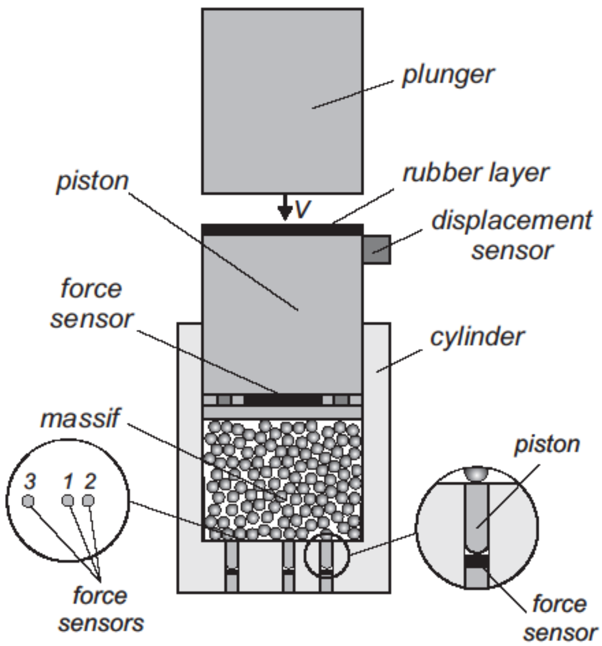


Рис. 3.25. Ескіз установки, що використовується для експерименту. Навантаження створюється за допомогою падаючого ударника.

Ударник падає вздовж напрямних і ударяє поршень, генеруючи при цьому імпульс навантаження, який у свою чергу передає навантаження на гранульоване середовище. Для згладжування імпульсного навантаження використовується гумова прокладка між ударником та поршнем. Прокладка також використовується для того, щоб прибрати високочастотні паразитні коливання зумовлені негладкістю поверхонь ударника та поршня, а також малими відхиленнями від ідеального вертикального руху. Поршень складається з двох частин (довжина меншої частини 3 мм), між якими встановлено датчик. Він вимірює інтегральну силу, що діє з боку гранульованого масиву. Обидві частини поршня з'єднані за допомогою напрямних, які забезпечують його одновимірний рух. Зміщення поршня фіксується фотодатчиком. На дні циліндричної ємності змонтовані три поршні діаметром 3 мм, які передають зусилля від частинок до датчиків. Таким чином вимірюється нормальна сила, з якою діє окрема кулька на дно. Поршні з датчиками розташовані на різних відстанях від стінки (10, 20 та 30 мм відповідно).

Було проведено ряд експериментів з кульками з діаметром 2 та 3 мм, а також з їх сумішшю в різних пропорціях. Перед кожним ударом кульки засипалися у циліндр і ущільнювались поршнем таким чином, аби об'єм щоразу був однаковим. Це дало змогу отримати в кожній пробі однакову початкову щільність. Ударник падав з висоти 0,5 м, що давало можливість виключити пластичні деформації, які мають місце при більших висотах падіння.

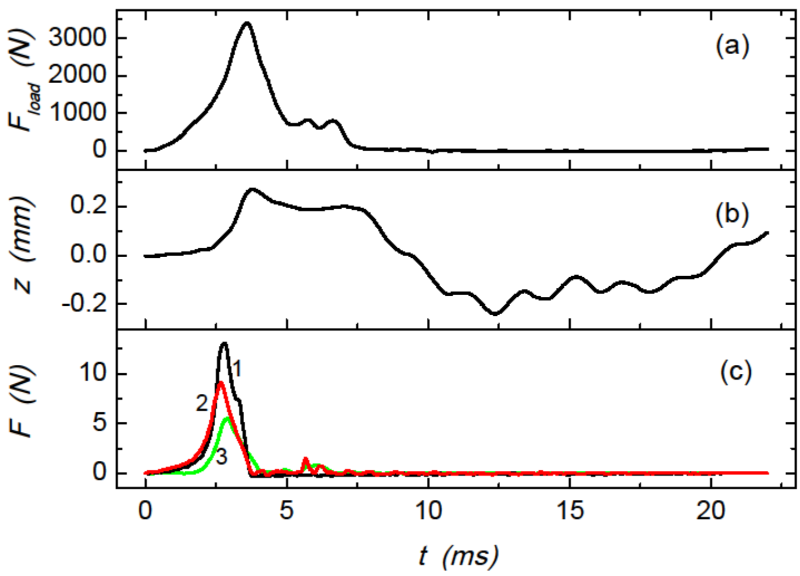


Рис. 3.26. Типові часові залежності сили, з якою поршень діє на гранульоване середовище (a), зміщення поршня (b), сил, що діють на датчики, вмонтовані у дно циліндричного контейнера (c).

Монодисперсний гранульований масив із кульок діаметром 3 мм був утворений з 7223 штук. Було здійснено 250 ударів для кожної упаковки. При цьому для кожного датчика було записано залежність сили від часу, використовуючи поршневі датчики. Всього було зроблено 750 записів. Типові залежності сили, що діє на гранульоване середовище з боку поршня, його зміщення, а також сили, що діє на датчик, вмонтований у дно, наведені на рис. 3.26.

Набір залежностей сил від часу дають можливість побудувати їх розподіли, зокрема розподіл для максимумів сил, оскільки ці залежності мають яскраво виражений імпульсний характер. Набір 750 записів $F(t)$, для всіх трьох датчиків, використовується для побудови розподілу сил, наведеного на рис. 3.26 для максимальних значень. Сили нормовані по відношенню до середньої сили $f = F / < F >$. Аналіз отриманого розподілу показує, що для великих сил (більших ніж середнє значення), функція розподілу має форму експоненти

$$P \propto e^{-\beta f}, \ f > 1, \tag{3.7}$$

де $\beta = 1 \pm 0{,}1$ (див. апроксимацію суцільною лінією на рис. 3.27). Коефіцієнт β менший, ніж у статичних експериментах зі скляними кульками [133, 134, 147, 148], де β змінюється від 1,1 до 1,8. Розподіл малих сил зображено на вкладці, який дещо відрізняється від розподілу великих сил. Тут ми використали більш детальне розбиття для отримання більш точного розподілу у цій області.

Було проведено комп’ютерне моделювання динамічного навантаження гранульованого середовища в циліндричному контейнері з метою дослідження поведінки гранульованого середовища не тільки на дні контейнера, але й у всьому масиві. Для цього використовувався метод дискретних елементів [228]. Числове моделювання здійснювалось для умов, аналогічних експериментальним. Гранули мають однаковий розмір і сферичну форму, як і в експерименті. Взаємодія між гранулами описується законом Герца, а тертя визначається кулонівською моделлю. Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}1$ було отримано експериментально, за допомогою методу, запропонованого Блером та співавт. [133]. Пружні властивості матеріалу куль описуються модулем Юнга $E = 211{,}0$ ГПа та коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0{,}32$.

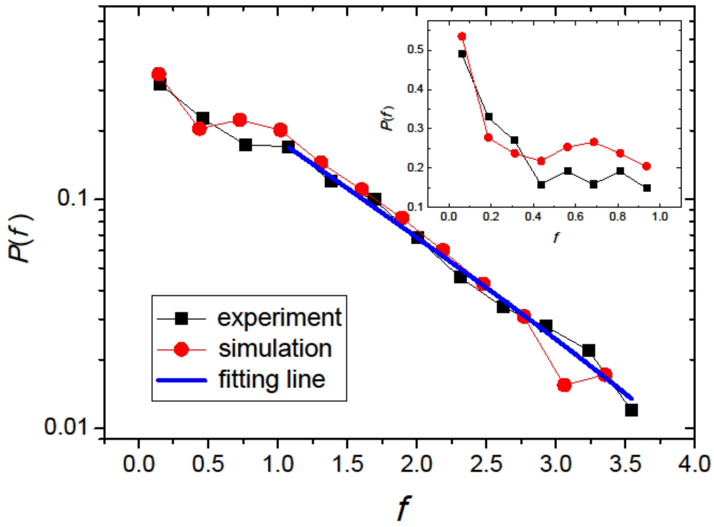


Рис. 3.27. Щільність ймовірності P максимальних сил, що діють на дно, отримані в експерименті та в комп'ютерному моделюванні. У вставці зображено розподіл малих сил. Суцільна лінія – апроксимація даних експоненціальною залежністю (3.7).

Ми не моделювали повний процес удару ударником по поршню, оскільки наявність гумової прокладки різко ускладнює обчислювальний процес: рівняння стану для гуми є надзвичайно складним і, крім того, товщина прокладки є малою у порівнянні з висотою ударника та поршня, а отже суттєво уповільнює розрахунки. Тому ми використовували отриману в експерименті часову залежність сили $F_{load}(t)$, з якою поршень діє на гранульований масив. Згідно експерименту, розподіл максимальних сил у цих часових залежностях (750 ударів) має гауссів вигляд з середнім значенням $< F_{load\,m} > = 3450$ Н та шириною сигналу, яка також розподіляється за функцією Гаусса з середнім значенням $< \tau > =$ 1,65 мс.

Ми вибрали залежність сили, що діє на масив з амплітудою та шириною імпульсу, які дорівнюють середнім експериментальним значеннями, як межову умову для моделювання динамічного процесу, аналогічного тому, як це має місце в масиві стальних куль в експерименті. Ця “середня” залежність від часу наведена на рис. 3.26, *а*. Було проведено десять розрахунків для різних початкових упаковок гранульованого масиву з однаковою висотою $H = 61{,}7$ мм, яка відповідає висоті масиву в експерименті.

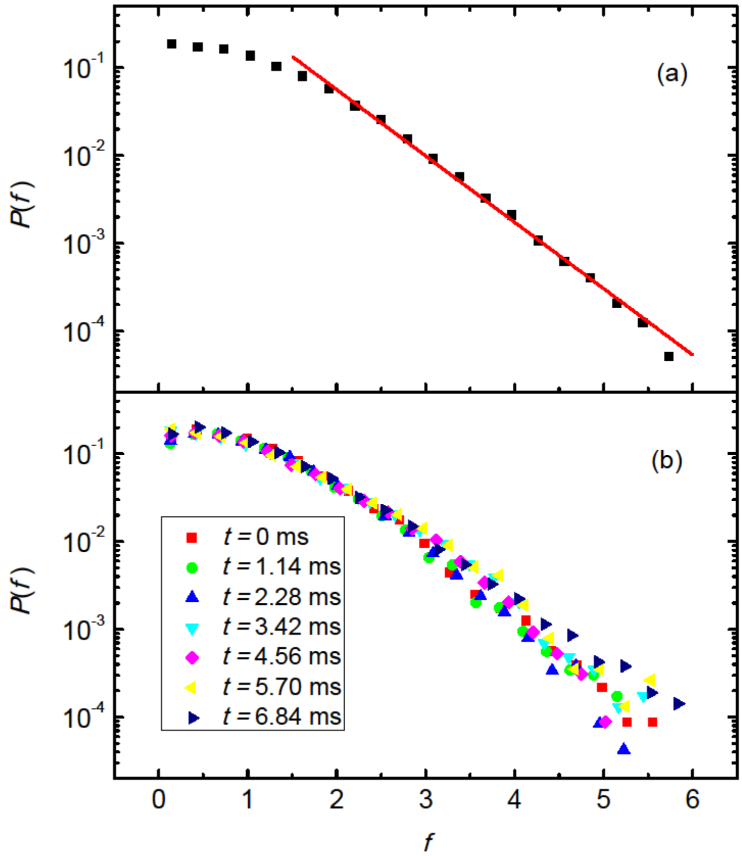


Рис. 3.28. (a) Функції розподілу $P(f)$ максимальних сил взаємодії гранул всередині масиву. Експоненційна апроксимація для великих сил зображена суцільною лінією; (b) розподіли міжгранульних сил в різні моменти часу.

Серія розрахунків дала можливість побудувати розподіл максимальних сил, що діють на дно циліндричного контейнера. Цей розподіл показано на рис. 3.27 в порівнянні з експериментальним розподілом. Видно гарний збіг цих розподілів і показник β в даному випадку дорівнює $1{,}04 \pm 0{,}15$. Середнє число гранул, що взаємодіють з дном становить 248 шт. Було також розраховано розподіл максимальних сил між гранулами всередині масиву. Цей розподіл показано на рис. 3.28, *а*. Згасання функції розподілу для великих сил сильніше ніж для сил взаємодії частинок з дном, показник $\beta = 1{,}70 \pm 0{,}02$.

Комп'ютерне моделювання також дає можливість спостерігати еволюцію розподілів міжгранулярної взаємодії (рис. 3.28, *б*). Видно, що з часом ці розподіли дещо змінюються, особливо для великих сил. Важливо, що всі розподіли при великих силах мають експоненційне згасання. Це свідчить про те, що в масиві мають місце дальнодіючі кореляції. Для некорельованих систем властивим є гауссове затухання.

Залежність показника β від часу наведено на рис. 3.29, *а*. Для того щоб оцінити відхилення розподілів сил від експоненційної залежності, їх було апроксимовано за допомогою функції

$$P'(f) = \exp(a - \beta f + \gamma f^2), \; f > 1, \qquad (3.8)$$

де квадратичний член відповідальний за відхилення. Апроксимація показує, що коефіцієнт γ є малою величиною протягом всього процесу деформування (рис.3.29, б).

Для дослідження еволюції кореляційних властивостей гранульованої системи в різні моменти часу обчислювалась одномоментна кореляційна функція

$$C(r) = \frac{< F_{ik} F_{jl} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}) > - < F_{ik} >< F_{jl} >}{< F_{ik} >< F_{jl} >}, \qquad (3.9)$$

де F_{ik} – абсолютна величина сили, що діє на i-ту частинку з боку k-ї, $\mathbf{r}_i$ – радіус-вектор i-ї гранули.

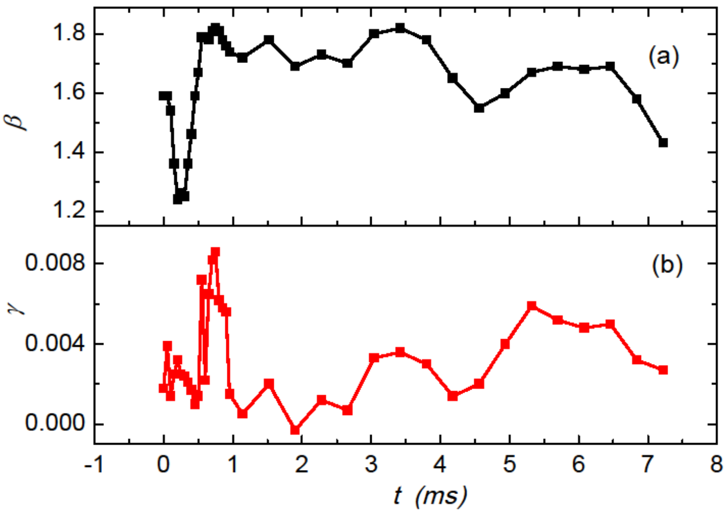


Рис. 3.29. Показник β в розподілі великих сил (a); коефіцієнт γ при квадратичному члені в апроксимаційній функції (3.8) (b) в різні моменти часу.

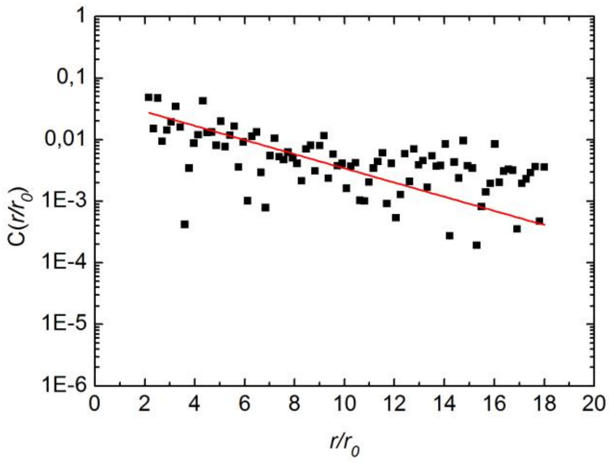


Рис. 3.30. Залежність кореляційної функції C від приведеної відстані r/r_0 між гранулами в початковий момент часу $t=0$, де r_0 – радіус сферичної гранули. Пряма лінія апроксимує дану залежність методом найменших квадратів.

Для того, щоб враховувати обмеженість гранульованого масиву і уникнути впливу стінок, усереднення проводилось тільки для гранул, що знаходилися на відстані $l < 4r_0$ від стінок (r_0 − радіус гранул).

На рис. 3.30, як приклад, показана залежність кореляційної функції від відстані між гранулами для початкового масиву, тобто в момент $t = 0$. Такі залежності дають можливість обчислити радіус кореляції ξ, оскільки, за означенням,

$$C(r) \propto e^{-r/\xi}. \tag{3.10}$$

Отже, обернена величина до тангенса кута нахилу кривої на рис. 3.30 дорівнює радіусу кореляції. Побудовані таким чином радіуси кореляції для різних моментів часу наведені на рис. 3.31 у вигляді залежності радіусу кореляції від часу. Видно, що він несинхронно змінюється зі зміною в часі навантаження F_{load}. Тут також наведені часові залежності середнього координаційного числа Z_c, та орієнтаційний параметр порядку S, який визначає середню орієнтацію міжчастинкових сил. S обчислюється як і в роботі [155]

$$S = \frac{2}{L}\sum_i l_i^2 \cos^2\theta_i - 1, \tag{3.11}$$

де l_i – відстань між центрами двох контактуючих частинок, θ_i – кут між силою взаємодії двох гранул та вертикаллю, $L = \sum_i l_i^2$ – сумарна відстань між центрами всіх контактуючих гранул. В граничних випадках маємо: $S = 1$, якщо всі сили направлені вертикально, $S = 0$, якщо сили орієнтовані випадково, або всі направлені під кутом 45^0 і, нарешті, $S = -1$, якщо сили орієнтовані горизонтально.

Зміни координаційного числа з часом дуже схожі зі зміною навантаження, окрім інтервалу $t < 0{,}5$мс на початку процесу навантаження,

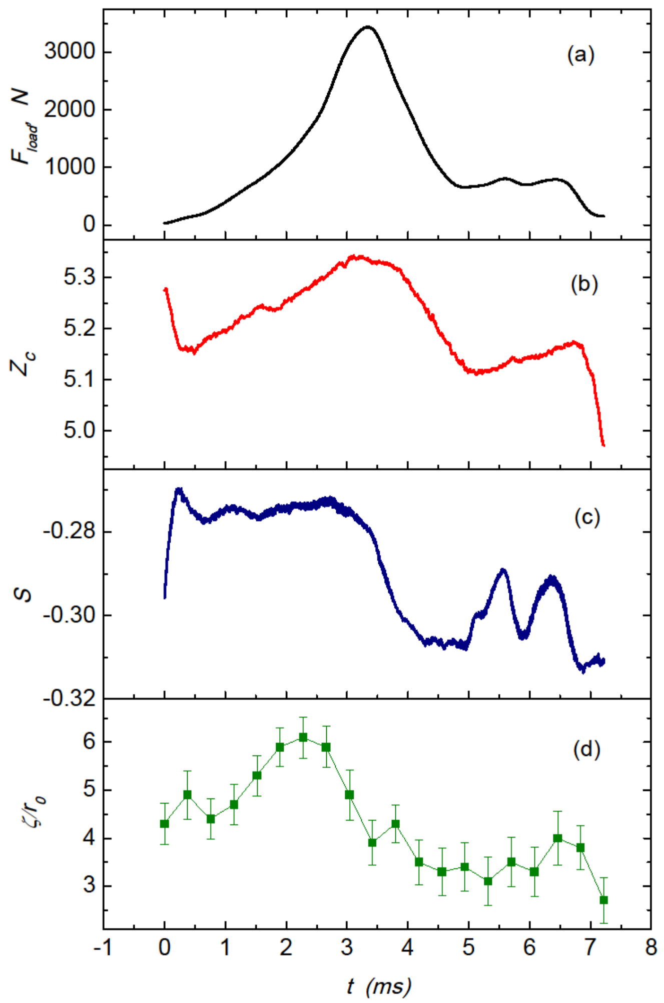


Рис. 3.31. Часові залежності (a) сили навантаження F_{load}: (b) координаційного числа Z_c, (c) орієнтаційного параметра порядку S, (d) приведеного радіуса кореляції ς / r_0.

коли Z_c різко зростає, незважаючи на плавне зростання навантаження, орієнтаційний параметр S також різко зростає. Швидка зміна показника β та кореляційного радіуса також має місце в цьому часовому проміжку (рис.3.31).

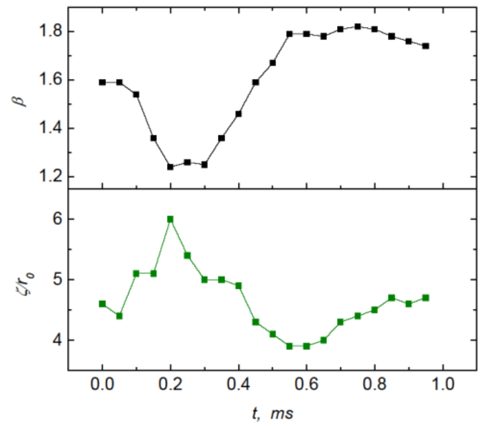


Рис. 3.31. Детальний вигляд залежностей (*a*) коефіцієнта β, (*b*) приведеного радіуса кореляції ς / r_0 від часу.

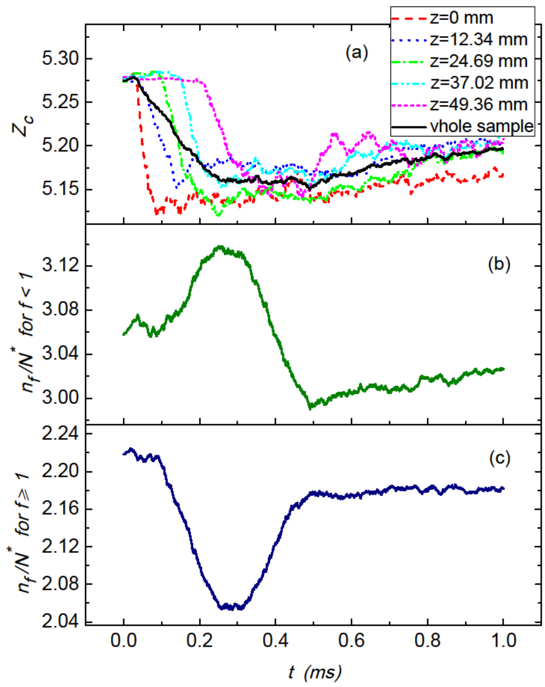


Рис. 3.32. Залежність координаційного числа Z_c для п'яти локацій вздовж напрямку поширення хвилі (z – відстань від поршня) та усереднена для всього зразка (*a*). Відносна кількість малих (*b*) та великих сил (*c*), віднормована на загальну кількість частинок, які не контактують зі стінками N^*.

В процесі поширення хвилі стиснення від рухомого поршня всередину зразка відбувається руйнування рівноваги при зміні кількость сусідніх гранул і, як результат, зміна середнього координаційного числа. Часова залежність локального координаційного числа, обчисленого для декількох шарів вздовж зразка демонструє різке зменшення Z_c з часом (рис. 3.32, *а*), в той час як усереднене координаційне число по всьому зразку змінюється більш плавно. Порівнюючи $Z_c(t)$ для різних локацій ми можемо зробити висновок, що при $r > 0{,}4$ мс координаційне число розподілено онорідно впродовж всього зразка. На рис. 3.32, *б* та 3.32, *с* наведено часові залежності відносної кількості великих та малих сил. Видно, що кількість великих міжчастинкових сил зменшується, а малих – збільшується, що викликано руйнуванням "сильної" підмережі сил. Це свідчить про те, що гранульоване середовище змінює внутрішню упаковку на початку процесу деформування. Той факт, що часова залежність головних параметрів, які характеризують мікроструктуру середовища, не прямують за часовою еволюцією сили навантаження, говорить про те, що гранульована система демонструє нерівноважне деформування.

Наступна серія розрахунків стосується динамічного деформування дисперсного гранульованого середовища під дією імпульсного навантаження. Як і в експериментах з дисперсними середовищами, розглядаються три варіанти:

1) 75% куль діаметром 3 мм та 25% куль діаметром 2 мм;
2) 50% куль діаметром 3 мм та 50% куль діаметром 2 мм;
3) 25% куль діаметром 3 мм та 75% куль діаметром 2 мм.

На рис. 3.33 наведені, отримані в результаті розрахунків, часові залежності координаційного числа Z_c, орієнтаційного параметра порядку S та показника β для вищезгаданих дисперсних, а також для монодисперсного середовища з діаметром куль 3 мм. Тут також представлена залежність навантажуючої сили від часу, яка була однаковою для всіх чотирьох розрахунків. Слід зауважити, що для кожного середовища проводився тільки один розрахунок.

Було проведено додатково розрахунки динамічного деформування дисперсного гранульованого середовища, яке складалось із гранул двох розмірів: 50% гранул $d = 3$ мм та 50% гранул $d = 2$ мм для п'яти різних упаковок. У всіх п'яти розрахунках навантаження було однаковим. Отримані в розрахунках часові залежності мікропараметрів Z_c та S дуже близькі для всіх п'яти упаковок (рис. 3.34), тому можна стверджувати, що залежності наведені на рис. 3.33 є коректними.

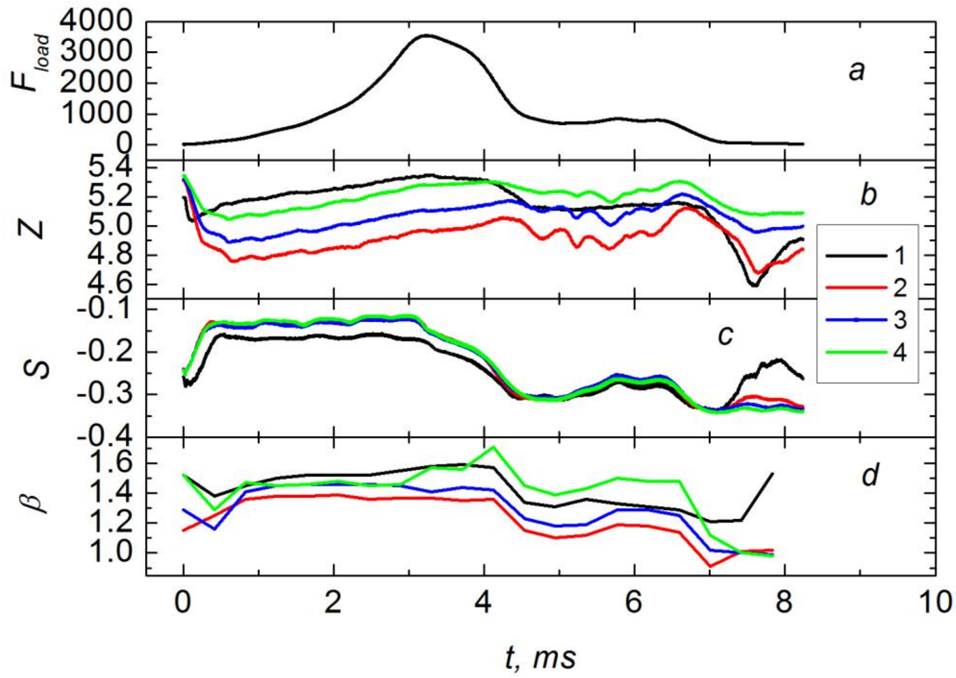
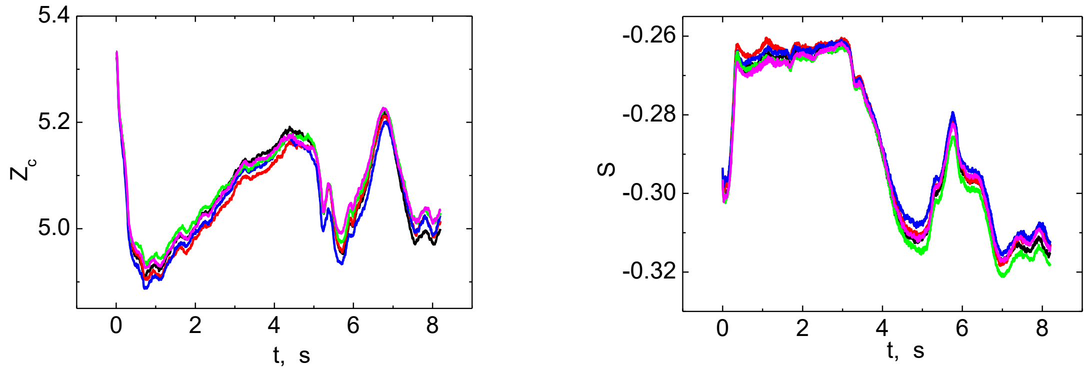


Рис. 3.33. Часові залежності сили навантаження F_{load} (a); координаційного числа Z (b) ; орієнтаційного параметра порядку S (c); коефіцієнта β (d). Для графіків (b) – (d): (1) монодисперсне середовище, діаметр куль $d = 3$ мм; (2) 75% куль $d = 3$ мм та 25% куль $d = 2$ мм; (3) 50% куль $d = 3$ мм та 50% куль $d = 2$ мм; (4) 25% куль $d = 3$ мм та 75% куль $d = 2$ мм.



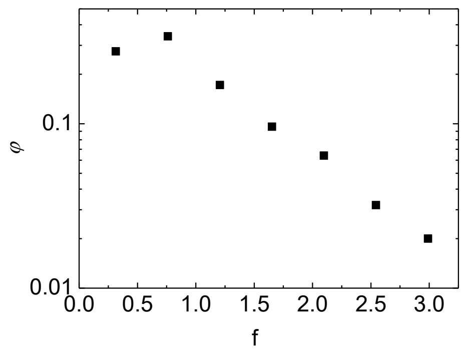
а *б*

Рис. 3.34 Залежності координаційного числа Z_c (*а*); орієнтаційного параметра порядку S (*б*) від часу для п'яти різних упаковок.

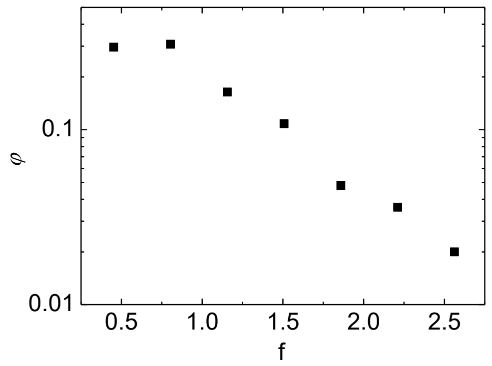
Отже, поведінка дисперсного гранульованого середовища з двома розмірами гранул подібна до поведінки монодисперсного гранульованого середовища і мало залежить від пропорції гранул різних розмірів.

На рис. 3.35 наведено розподіли сил, з якими гранули діють на дно циліндра, для чотирьох моментів часу, для яких в експериментах було отримано розподіли сил, що діють на вмонтовані у дно датчики. Ці розподіли побудовані для даних, отриманих в моделюванні з усіма п'ятьма упаковками. В середньому мало місце 2340 взаємодій кульок з дном. Як і у випадку з монодисперсним середовищем, згасання великих сил відбувається за експоненційним законом.

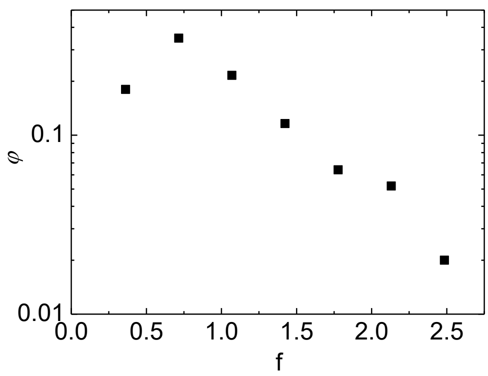
Експериментальні розподіли сил, що реєструвалися центральним датчиком у 250 випробовуваннях, зображені на рис. 3.36. Тут також має місце експоненційне згасання великих сил. Для порівняння експериментальних та розрахункових значень коефіцієнта β в рівнянні (3.7) розподіли були нормовані середньою силою $f = F / < F >$.



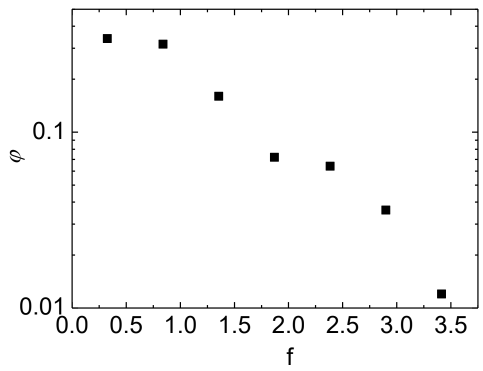
а



б



в



г

Рис. 3.35. Розподіли сил (*f*=*F*/<*F*>), що діють на дно для чотирьох моментів часу: *а*) $t = 2{,}2$ мс, *б*) $t = 2{,}6$ мс, *в*) $t = 3{,}0$ мс, *г*) $t = 3{,}4$ мс.

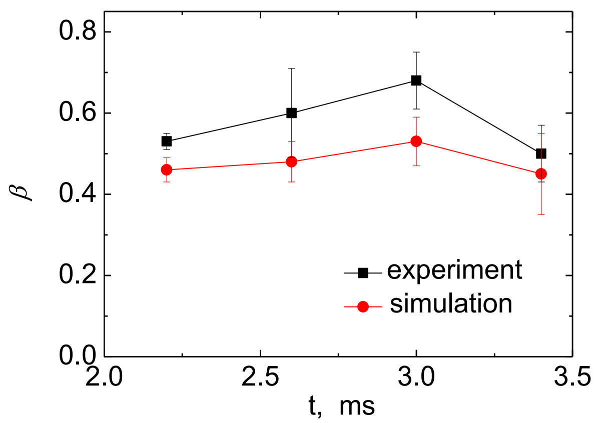


Рис. 3.36. Залежності коефіцієнта β від часу, отримані в екмперименті та в комп’ютерному моделюванні.

Наведені на рис. 3.36 значення коефіцієнтів β для експериментальних та розрахункових функцій розподілу свідчать про те, що має місце незначне відхилення розрахункових значень від екпериментальних.

Отже, проведені експерименти з ударом ударника по масиву гранул та комп'ютерні розрахунки подібного процесу динамічного деформування гранульованого середовища дали можливість побудувати розподіли максимальних сил взаємодії гранул з дном. Порівняння цих розподілів свідчить про значну їх подібність. Крім того, в розрахунках отримано розподіли міжгранульних сил всередині масиву для різних моментів: всі розподіли мають бімодальний характер. Великі сили затухають за експоненційним законом, і це говорить про наявність далекодіючих кореляцій. Особливості еволюції мікрохарактеристик (координаційного числа Z, орієнтаційного параметра порядку S, кореляційного радіуса ς та показника в функції розподілу великих сил β) у процесі імпульсного навантаження демонструють те, що деформаційний процес в таких умовах є нерівноважним.

Побудовані розподіли сил, які діють на дно циліндра з боку масиву гранул двох розмірів у різні моменти часу. Порівняння розрахункових та експериментальнх розподілів цих сил вказують на невелику розбіжність у коефіцієнті згасання β.

3.5. Висновки

1. Проведено комп'ютерне моделювання двовимірних процесів динамічного деформування структурованого середовища в рамках двох дискретних моделей: а) всі елементи середовища мають однаковий розмір, б) середовище утворене елементами трьох розмірів. Структурні елементи в обох моделях мають сферичну форму і їх взаємодія

описується пружною моделлю Герца. Отримано діаграми деформування таких масивів при різних швидкостях і амплітудах навантажень. Характерною особливістю всіх діаграм є нелінійність, наявність гістерезису, залежність форм діаграм від швидкості деформування і від щільності упаковки. Знайдено, що деформаційні характеристики середовища при різних щільностях упаковки можуть істотно відрізнятися одна від одної і в процесі деформування елементи можуть проявляти ефекти колективної поведінки. Дані характерні властивості діаграм деформування є типовими для таких структурованих гірських порід як пісковик, вапняк та ін.

2. Виконано комп’ютерне моделювання двовимірного процесу динамічного деформування дискретного середовища при в’язко-пружній взаємодії між елементами структури. Отримано діаграми деформування таких масивів при різних часах релаксації, а також при різних швидкостях і амплітудах навантаження. Доведено, що нерівноважність взаємодії між структурними елементами середовища призводить до збільшення нерівноважності та зростання його дисипативних властивостей. При збільшенні тривалості дії імпульсного навантаження, тобто при зменшенні швидкостей деформування, збільшується кривизна діаграми деформування, а залишкова деформація практично незмінна, як і співвідношення між видами енергії.

3. Змодельовано двовимірний процес динамічного деформування дискретного середовища з пружно-пластичною взаємодією між елементами структури. Отримано діаграми деформування таких масивів за різних значень межі пластичності. Показано, що зменшення порогу пластичності призводить до збільшення нерівноважності середовища та зростання його дисипативних властивостей.

4. Проведено експериментальне дослідження процесів динамічного деформування структурованого модельного середовища, утвореного елементами у вигляді куль однакового діаметру в умовах імпульсного навантаження. Отримано, що діаграми деформування такого середовища залежать від розмірів елементів структури та від характеру їх взаємодії. Збільшення розміру структурних елементів призводить до значного підвищення значень залишкових деформацій, а зміна характеру взаємодії шляхом додавання в середовище флюїду змінює випуклість діаграми в фазі навантаження. Також досліджено особливості деформування структурованого середовища при багатократному навантаженні. Отримано, що збільшення кратності навантаження призводить до поступового ущільнення середовища і після 4-5 навантажень діаграма деформування залишається незмінною. Деформування дисперсного гранульованого середовища, утвореного кулями двох радіусів ($r = 2$ мм та $r = 3$ мм) при різних співвідношеннях кількості куль одного радіуса свідчать про те, що діаграми деформування мають гістерезисний характер, а залишкова деформація найбільша у випадку, коли кулі діаметром 3 мм складають 25%, а 2 мм – 75%, тобто така система упаковується найщільніше. У двох інших випадках залишкові деформаціїї майже однакові.

5. Розрахунки тривимірного деформування з монодисперсним та дисперсним дискретними масивами та навантажені масивним поршнем дали можливість побудувати розподіли сил між елементами структури. В результаті отримано, що монодисперсне та дисперсне середовища по-різному розподіляють навантаження.

6. Виконано експериментальні та комп’ютерні дослідження розподілу сил в гранульованому середовищі, підданому імпульсному навантаженню. Розроблено експериментальну методику вимірювання сили, що діє на окремі гранули на дні гранульованого зразка, що складається зі

сталевих кульок. Числове моделювання методом дискретних елементів виконувалось в умовах, що імітують експериментальні. Як теорія так і експеримент демонструють експоненціально згасаючі розподіли максимального значення сил, з якими гранули діють на дно циліндра, в діапазоні великих сил. Крім того, комп’ютерне моделювання демонструє те, що експоненціальний розподіл сил має місце по всьому зразку і таким чином підтверджує наявність кореляцій міжгранульних сил в процесі динамічного завантаження гранульованих зразків. Отримані в розрахунках часові залежності координаційного числа, параметра орієнтаційного порядку, радіуса кореляції та розподілу сил чітко демонструє нерівноважний характер процесу деформування в гранульованому середовищі при імпульсному навантаженні.

Проведене моделювання деформування дисперсного гранульованого середовища, утвореного кулями двох різних діаметрів, для трьох співвідношень кількості куль однакового розміру, вказує на те, що якісних змін у поведінці дисперсного та монодисперсного середовищ немає, що випливає з подібності залежностей мікропараметрів від часу.

РОЗДІЛ 4

ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ІЄРАРХІЧНИХ СТРУКТУРОВАНИХ ГЕОСЕРЕДОВИЩАХ

Основними особливостями динамічної поведінки структурованих геосередовищ є високий ступінь нелінійності, складна взаємодія між структурними елементами та перерозподіл енергії між ієрархічними рівнями [7]. Очевидно, що реакція такої складної системи на збурення повинна істотно відрізнятися від реакції простого суцільного середовища. Коли ієрархічна система збурюється з частотою ω_0, структурні елементи нижніх рівнів генерують коливання частотою $\omega > \omega_0$. Це явище виникає, коли довга хвиля приходить від віддаленого землетрусу і генерує високочастотні коливання будівель і меблів в приміщеннях, підвішених до стелі світильників, посуду в шафі і так далі. В ході цього процесу, енергія передається високочастотними коливаннями.

Крім геосередовищ, багато інших природних та штучних матеріалів мають ієрархічну структуру: деякі композити, ряд біологічних матеріалів та полімерів [335, 336]. Моделі таких мульти-масштабних середовищ розроблені для оцінки статичних силових характеристик: твердості та міцності [337–339]. Використання ієрархічності є наріжним каменем для розробки багатомасштабних числових методів. Ці методи в основному служать для квазіконтинуального наближення гетерогенних середовищ, коли макрорівень розглядається як гомогенний континуум, тоді як репрезентативні об’ємні елементи на мікрорівні містять мікроструктурні складові [340–345]. У той же час, завдяки процедурі гомогенізації, ефективний тензор напруження, як відображення макрорівня, лінійно залежить від мікрохарактеристик. В результаті, перетворення потоків енергії між рівнями, коли міжрівневі зв'язки складніші, не приділялось належної уваги.

4.1. Одновимірна дискретна модель ієрархічно структурованого середовища

Виходячи з концепції реального геосередовища як складної структурованої блокової ієрархічної системи, кожен блок n-го рівня можна розглядати як систему зв'язаних блоків нижчого $n-1$-го рівня. Очевидно, що зв'язки між блоками нижчого $n-1$-го рівня є міцнішими ніж зв'язки n-го рівня, власне, тому вони й утворюють блок більш високого рівня. Змоделюємо таку ієрархічну систему в одновимірному випадку і розглянемо деякі особливості розповсюдження хвиль у такому середовищі.

Дискретне одновимірне ієрархічне середовище моделюється найпростішою системою: ланцюгом куль однакового радіуса r. Взаємодія між i-м та j-м блоками описується нелінійним законом [29]:

$$\mathrm{F}_{ij}^{n} = C_{ij} sign(\delta_{ij}) \left|\delta_{ij}\right|^{\beta}, \tag{4.1}$$

де C_{ij} – коефіцієнт взаємодії між кулями, що залежить від місцезнаходження куль в ланцюгу, $\beta = 3/2$, δ_{ij} – величина зближення між елементами, яка визначається формулою (2.2). При розтягуванні сила взаємодії також є функцією величини δ_{ij} в степеня 3/2.

Нехай $C_{ij} = C_1$, якщо $i = 3k$, $j = 4k$, де $k = 1,2 \ldots N_1$, $C_{ij} = C_2$, якщо $i = 9k$, $j = 10k$, де $k = 1,2 \ldots N_2$; для всіх інших сусідів $C_{ij} = C_0$, причому $C_0 > C_1 > C_2$. Таким чином, ми розбили ланцюг на три ієрархічні рівні: найнижчий (нульовий), який складається з одного блоку, взаємодія між цими блоками описується коефіцієнтом C_0; перший, який складається із 3-х блоків нульового рівня і які взаємодіють за законом (4.1) з коефіцієнтом C_1 та найвищий – другий, утворений трьома блоками першого рівня. Взаємодія між блоками другого рівня описується рівнянням (4.1) з коефіцієнтом C_2. На рис. 4.1 блоки другого рівня заштриховані різними відтінками.

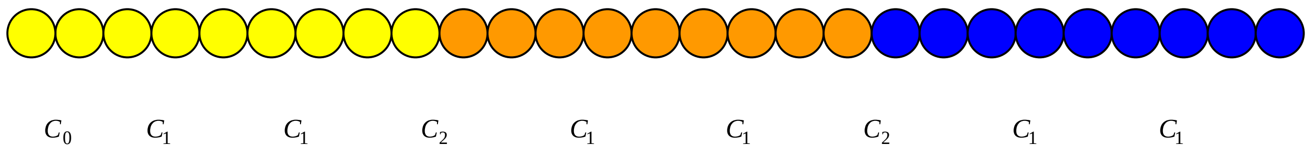


Рис. 4.1. Ланцюг блоків.

Розглянемо спочатку неієрархічно організований ланцюг з однаковими зв'язками між всіма елементами, тобто $C_2 = C_1 = C_0$. Це дасть нам можливість порівняти процеси розповсюдження хвиль в ієрархічному і простому ланцюгах. Нехай в початковий момент перший блок ударяється об ланцюг зі швидкістю $V_0 = 20$ м/с. Система звичайних диференційних рівнянь та чисельна реалізація системи, яка використовується в цих розрахунках, описана в пункті 2.1. Отримані в розрахунках розподіли швидкості та енергії за блоками наведені на рис. 4.2. Чітко видно, що хвиля є відокремленою і

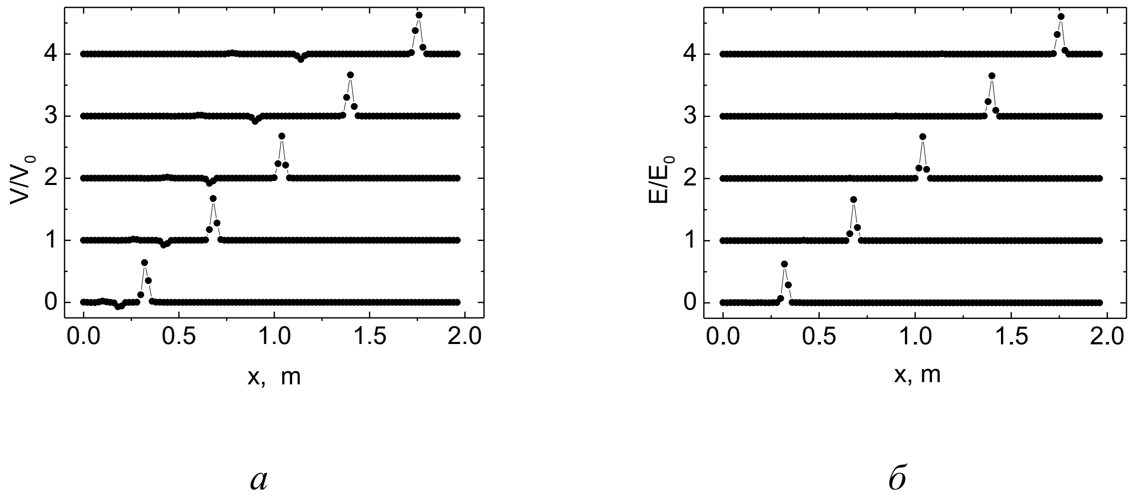


Рис. 4.2. Залежності *а*) відносної швидкості V / V_0; *б*) відносної повної енергії E / E_0 від координати x. Неієрархічна модель.

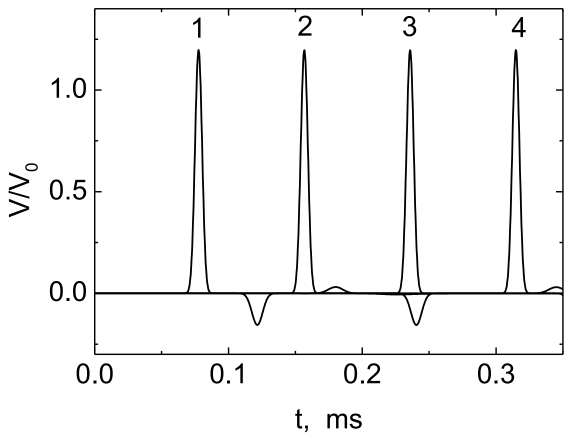
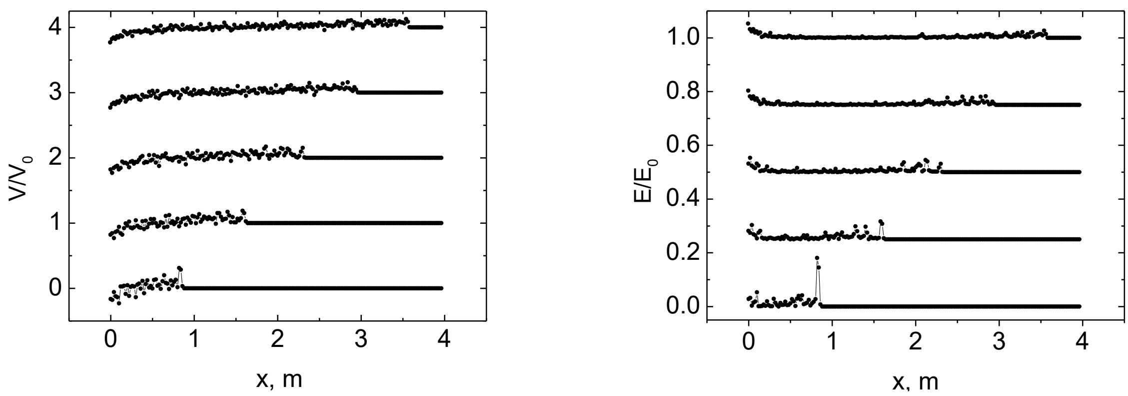


Рис. 4.3. Залежності відносної швидкості V/V_0 від часу. 1) $n=20$, 2) $n=40$, 3) $n=60$, 4) $n=80$, де n – номер блоку. Неієрархічна модель.

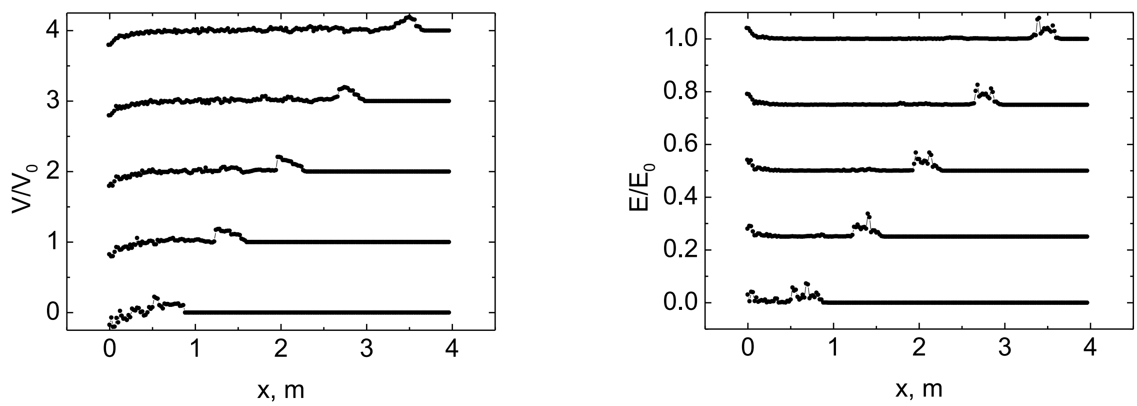
локалізованою на трьох елементах. За відокремленою хвилею стиснення рухається відокремлена хвиля розтягнення зі значно меншою амплітудою і відповідно з меншою швидкістю. Вона також локалізована на трьох елементах. На рис. 4.3, де наведені залежності швидкості від часу для чотирьох різних відстаней від початку координат, ця хвиля спостерігається більш чітко. Тут також видно другу хвилю стиснення.



а *б*

Рис. 4.4. Залежності *а*) відносної швидкості V/V_0; *б*) відносної повної енергії E/E_0 від координати x. Ієрархічна система $\alpha=0,5$.

Тепер змоделюємо процес поширення нелінійної хвилі у дискретному ієрархічному середовищі. Розглянемо випадок коли коефіцієнти взаємодії на різних рівнях ієрархії відрізняються несуттєво: $C_1 = C_0\alpha$, $C_2 = C_2\alpha^2$, де $\alpha = 0{,}5$. На рис. 4.4 показані отримані у розрахунках розподіли швидкості та енергії за координатою. Видно, що в цьому випадку відсутня відокремлена хвиля, так само енергія переноситься нелокалізовано.



а *б*

Рис. 4.5. Залежності *а*) відносної швидкості V/V_0; *б*) відносної повної енергії E/E_0 від координати x. Ієрархічна система $\alpha = 0{,}1$.

Далі розглянемо випадок, коли $\alpha = 0{,}1$, тобто зв'язки між сусідніми рівнями ієрархії відрізняються суттєво. На рис. 4.5 наведені отримані в розрахунках розподіли швидкості та енергії за блоками. У цьому випадку спостерігається формування відокремленої хвилі (рис. 4.5, *а*), хоча за головним збуренням мають місце незначні коливання. Як видно із рис. 4.5, *б* ці коливання практично не переносять енергії, тобто енергія в такому середовищі переноситься хвилею локалізовано. Ширина такої відокремленої хвилі складає 18 блоків, тобто розмір блоку 2-го рівня. На рис. 4.6 наведені залежності швидкості від часу для чотирьох різних відстаней від початку координат. Видно, що амплітуда збурення практично не змінюється, хоча його форма еволюціонує.

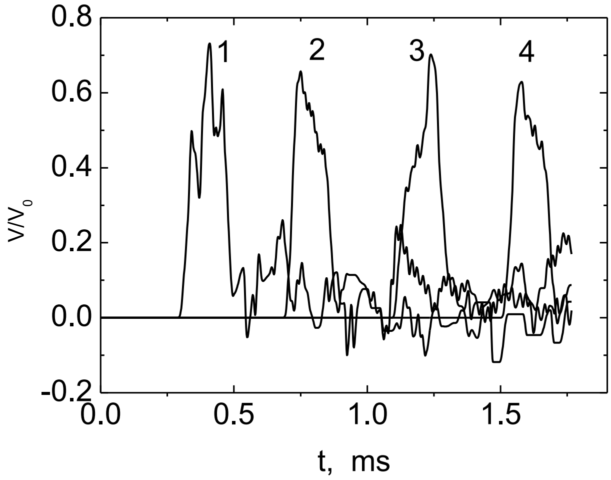


Рис. 4.6. Залежності відносної швидкості V/V_0 від часу. 1) $n=20$, 2) $n=40$, 3) $n=60$, 4) $n=80$, де n – номер блоку. Ієрархічна система $\alpha=0{,}1$.

Таким чином, побудована проста модель ієрархічного середовища. Проведено розрахунки розповсюдження нелінійних хвиль у такому середовищі. Показано, що у випадку, коли зв'язки між елементами різних рівнів відрізняються суттєво, в ієрархічному середовищі може розповсюджуватись відокремлена хвиля, яка локалізовано переносить енергію.

4.2. Модель геосередовища як система ієрархічно вкладених осциляторів

Основними рисами динамічної поведінки природних ієрархічно структурованих середовищ є високий ступінь нелінійності, складна взаємодія між структурними елементами, перерозподіл енергії між ієрархічними рівнями. Ці процеси проявляються у генерації високочастотних коливань при застосуванні низькочастотних збурень в присвердловинній зоні [346], при зміні спектрів послідовностей афтершоків [347], в існуванні широкого кола нелінійних хвиль після вибухів у гірських масивах [348], тощо. Обмін енергією між ієрархічними рівнями є дуже важливим чинником втрати стабільності блочних систем при звільненні сейсмічної енергії [5].

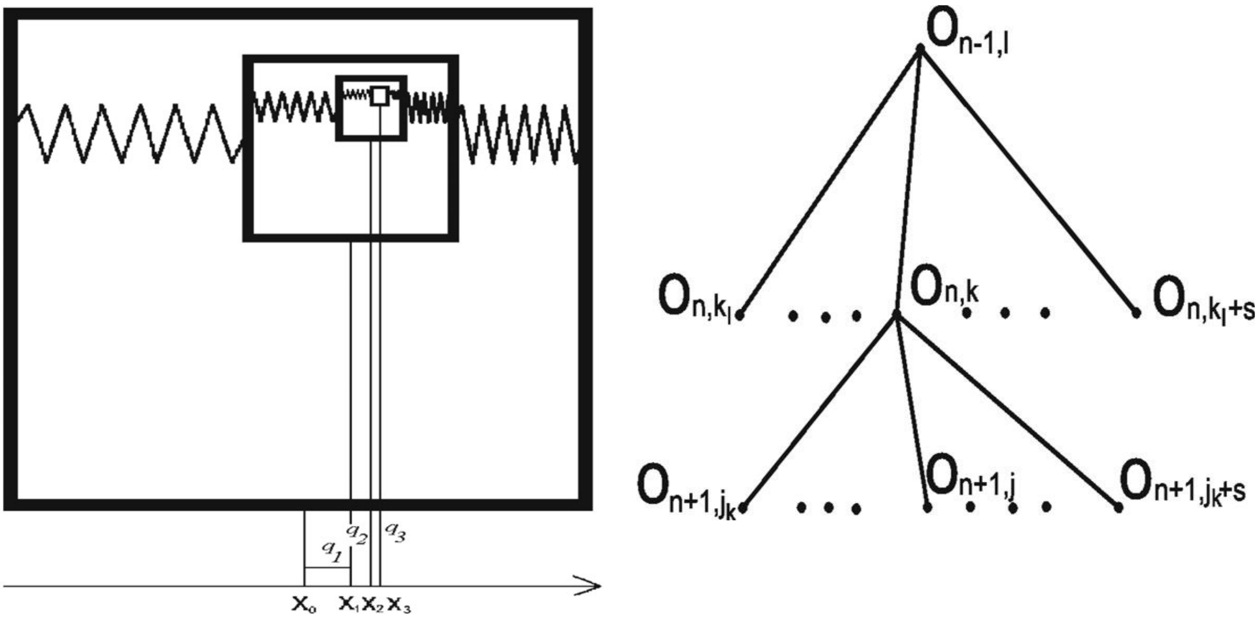
Для вивчення цих динамічних явищ пропонується модель для середовища, що складається з ієрархічно пов'язаних елементів (блоків). Більшість досліджень динаміки ієрархічних систем осциляторів були зосереджені на процесах синхронізації [349-357], натомість, в даних дослідженнях зацікавленість полягає в дослідженні процесів обміну енергією між ієрархічними рівнями, зокрема передачею енергії від верхнього рівня до нижнього.

4.2.1. Побудова математичної моделі ієрархічно вкладених осциляторів

Ієрархічне блокове середовище моделюється системою вкладених ангармонічних осциляторів (рис. 4.7, *а*) [28, 29, 41, 56, 57]. Частина ієрархічної системи як дерева показана на рис. 4.7, *б*. Припустимо, що модель включає N рівнів, і кожен осцилятор з n-го ($1 < n < N$) рівня з'єднується з осциляторами рівня $(n+1)$, за винятком осциляторів низького рівня. Гамільтоніан цієї системи має такий вигляд

$$H = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\frac{p_{nk}^2}{2m_{nk}} + \frac{C_{nk}}{\alpha}\left| x_{nk} - x_{(n-1)l_k} \right|^{\alpha} \right), \tag{4.2}$$

де індекс (nk) позначає місцезнаходження осцилятора, а саме, n-й рівень та k-те місце; l_k – це місце осцилятора рівня $(n-1)$, пов'язаного з (nk)-тим осцилятором; m_{nk} та p_{nk} – маса і відповідно імпульс (nk) осцилятора; x_{nk} – координата осцилятора; C_{nk} – жорсткість зв'язку, α – константа.



а *б*

Рис. 4.7. Схематичне зображення моделі ієрархічного середовища (*а*) та відповідне дерево (*б*). Тут x_i – координати осциляторів, q_i – відхилення від стійкого положення, O_{ij} – центри мас осциляторів на i-му рівні і на j-му місці. Лініями позначено зв'язки між осциляторами.

Підставляючи H у рівняння

$$\dot{x}_{nk} = \frac{\partial H}{\partial p_{nk}}, \quad \dot{p}_{nk} = -\frac{\partial H}{\partial x_{nk}}$$

можна отримати наступну систему диференційних рівнянь

$$\dot{x}_{nk} = p_{nk} / m_{nk},$$

$$\dot{p}_{nk} = -C_{nk}\left|x_{nk} - x_{n-1,l_k}\right|^{\alpha-1}\chi(x_{nk} - x_{(n-1),l_k}) + \tag{4.3}$$

$$+\omega_{n+1}^2 p\frac{m_{n+1}}{m_n}\left|x_{n+1} - x_n\right|^{\alpha-1}\chi(x_{n+1} - x_n),$$

де $\chi(x)=1$, якщо $x\geq 0$, інакше $\chi(x)=-1$. Розглядаючи осцилятори, які ідентичні на кожному рівні і рухаються синхронно, система (4.3) може бути записана наступним чином

$$\begin{aligned}\ddot{x}_n &= -\omega_n^2\left|x_n - x_{n-1}\right|^{\alpha-1}\chi(x_n - x_{n-1}) + \\ &+ \omega_{n+1}^2 s\frac{m_{n+1}}{m_n}\left|x_{n+1} - x_n\right|^{\alpha-1}\chi(x_{n+1} - x_n)\end{aligned} \tag{4.4}$$

де $\omega_n^2 = \dfrac{C_n}{m_n}$, а s – кількість осциляторів на одному рівні.

Для зручності введемо нові змінні $q_n = x_n - x_{n-1}$, які за змістом є зміщеннями від положення рівноваги, $x_0 = const$ [41]. Тоді $x_n = \sum\limits_{s=1}^{n} q_s$. Остаточно система (4.4) матиме вигляд

$$\sum_{s=1}^{i}\ddot{q}_s = -\omega_i^2\left|q_i\right|^{\beta}\chi(q_i) + \omega_{i+1}^2 s\frac{m_{i+1}}{m_i}\left|q_{i+1}\right|^{\beta}\chi(q_{i+1}). \tag{4.5}$$

Після введення позначень $F_i = \omega_i^2\left|q_i\right|^{\alpha-1}\chi(q_i)$, $\varphi_i = \dfrac{sm_{i+1}}{m_i}$, систему (4.5) можна записати у формі

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= -F_1 + \varphi_1 F_2, \\ \ddot{q}_n &= F_{n-1} - F_n\left(1+\varphi_{n-1}\right) + \varphi_n F_{n+1}, \\ \ddot{q}_N &= F_{N-1} - F_N\left(1+\varphi_{N-1}\right).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Для простоти ми припускаємо, що величини ω_i та m_i є геометричними послідовностями. Отже, $\omega_i = \omega_0 r^{i-1}$, $r>1$ та $m_i = m_0 h^{i-1}$ $h<1$. З цього випливає, що $\varphi_i = sh = \varphi = const$.

4.2.2. Дослідження моделі з трьома ієрархічними рівнями

Почнемо з того, що розглянемо модель з трьома ієрархічними рівнями, тобто покладемо $N = 3$. У цьому випадку система (4.6) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -F_1 + \varphi_1 F_2, \\ \ddot{q}_2 &= F_1 - F_2(1+\varphi) + \varphi F_3, \\ \ddot{q}_3 &= F_2 - F_3(1+\varphi). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Дотепер не досягнуто успіху в пошуку точних розв’язків для системи (4.7), тому, щоб отримати інформацію про структуру розв’язків, будуть використовуватися числові та якісні методи аналізу.

Завдяки гамільтоновій природі системи (4.7) траєкторії динамічної системи лежать на гіперплощинах постійної енергії. Будову цих гіперповерхностей у фазовому просторі можна ефективно вивчити за допомогою техніки Пуанкаре [358, 359].

Зафіксуємо параметри $\omega_0 = 1$, $r = 1{,}1$, $\varphi = 0{,}6$ та виберемо початкові умови для числового інтегрування у вигляді $q_1(0) = 0$, $q_1^{'}(0) = 0{,}2$, $q_j(0) = q_j^{'}(0) = 0$, $j = 2, 3$. Спочатку розглянемо лінійний випадок, коли $\beta = 1$. Нехай площина $q_1^{'}(0) = 0$ – площина перетину Пуанкаре. При інтегруванні системи (4.7) за допомогою методу Дорманда-Принца [360], найбільш цікавими є точки, в яких траєкторії перетинають площини в одному напрямку. Зображаючи ці перетини на площині $(q_2^{'}, q_1)$, можна отримати діаграми, представлені на рис. 4.8, *а*. Рис. 4.8, *б* відповідає перетину Пуанкаре траєкторіями, які починаються з тієї ж відправної точки, що і в попередньому випадку, але з параметром $\beta = 1{,}05$.

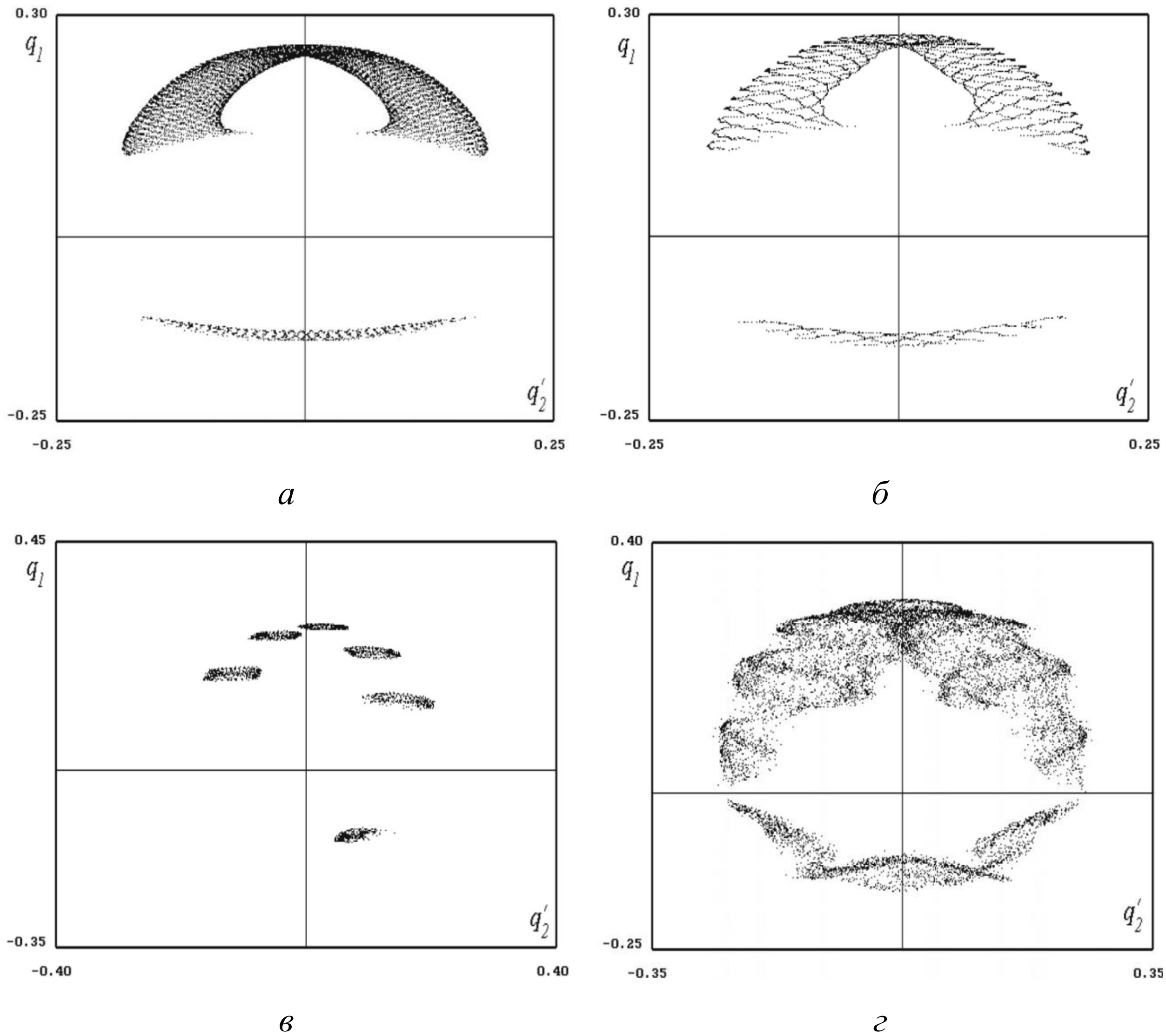


Рис. 4.8. Перетини Пуанкаре при різних β = 1 (*а*), β = 1,05 (*б*), β = 1,10 (*в*), β = 1,15 (*г*). Початкові умови $q_1^{'}$ = 0,2, а інші координати дорівнюють нулю.

Точно так само, фіксуючи β = 1,1, β = 1,15, β = 1,25 і β = 1,5 (нелінійні випадки), ми отримуємо типові діаграми Пуанкаре, зображені на рисунках 4.8-4.9.

З аналізу цих рисунків випливає, що включення в модель нелінійності викликає появу смугових поверхонь тору (рис. 4.8, *б*), тори з щільною обмоткою (рис. 4.8, *в*), траєкторії, подібні до періодичної (рис. 4.9, *в*), які не спостерігаються в лінійному випадку. Згідно з рисунком 4.9, *г* збільшення нелінійності, пов’язаної з параметром β, призводить до утворення перетинів Пуанкаре, рівномірно заповнених точками.

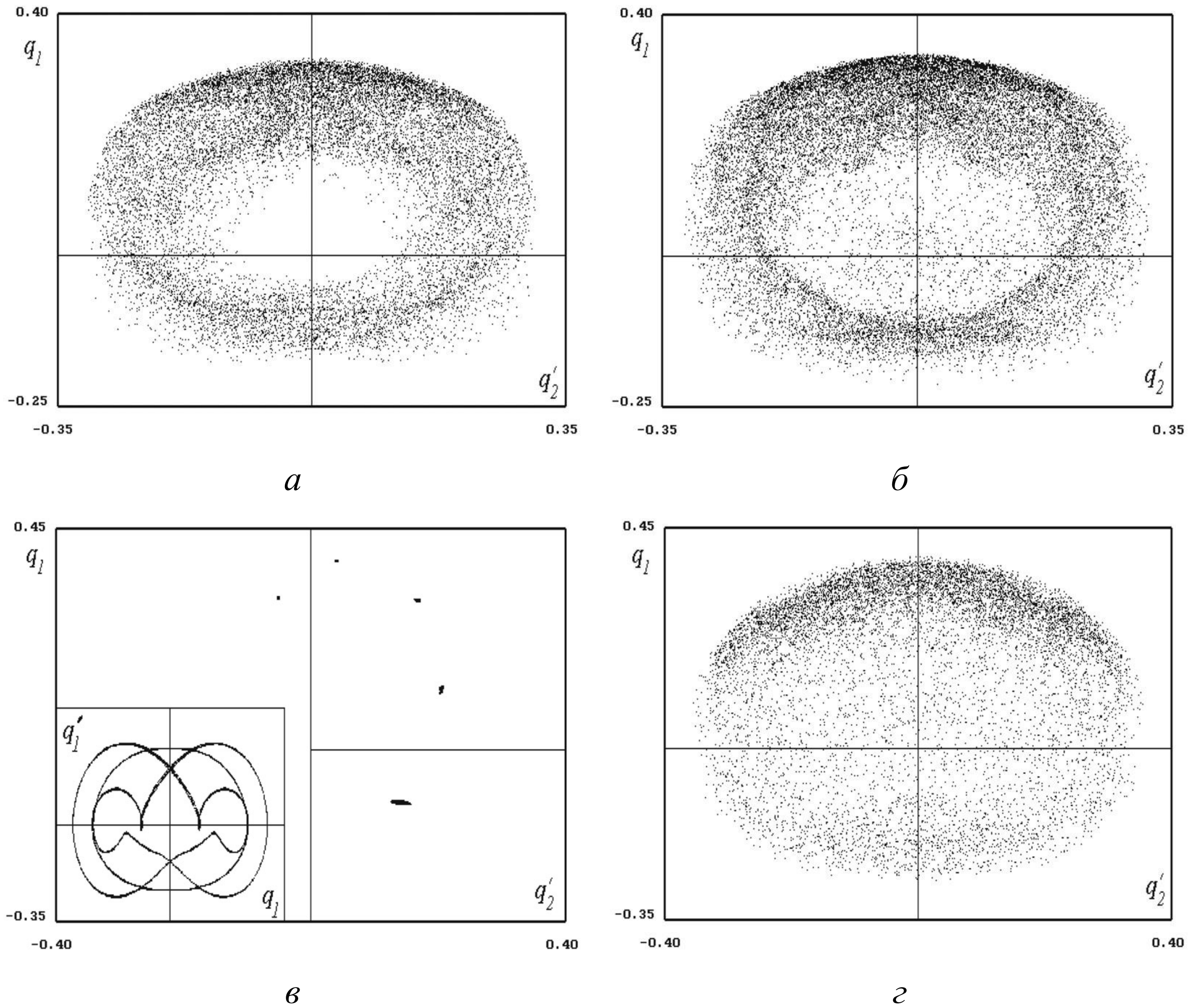


Рис. 4.9. Перетини Пуанкаре при різних β = 1,20 (*а*), β = 1,25 (*б*), β = 1,5 (*в*). Початкові умови q_1' = 0,2, а інші координати дорівнюють нулю. Початкові умови для (*г*): q_1 = 0,068, q_1' = 0,2, $q_{2,3} = q_{2,3}'$ = 0. У куті рисунка (*в*) зображено фазовий портрет квазіперіодичної траєкторії, що відповідає перетину Пуанкаре (*в*).

Порівнюючи початкові умови побудови діаграм Пуанкаре на рисунках 4.9*в* та 4.9*г*, ми бачимо, що мале відхилення першої координати істотно змінює спостережувані режими. Це одна з основних рис нелінійних моделей [361].

Варто зазначити, що розміри режимів слабко відрізняються один від одного. Але є значення параметра β, коли область перетину Пуанкаре (рис. 4.9, *а*, 4.9, *б* та 4.9, *г*) заповнена точками неоднорідно. Це свідчить про існування переважаючих амплітуд у квазіперіодичному режимі.

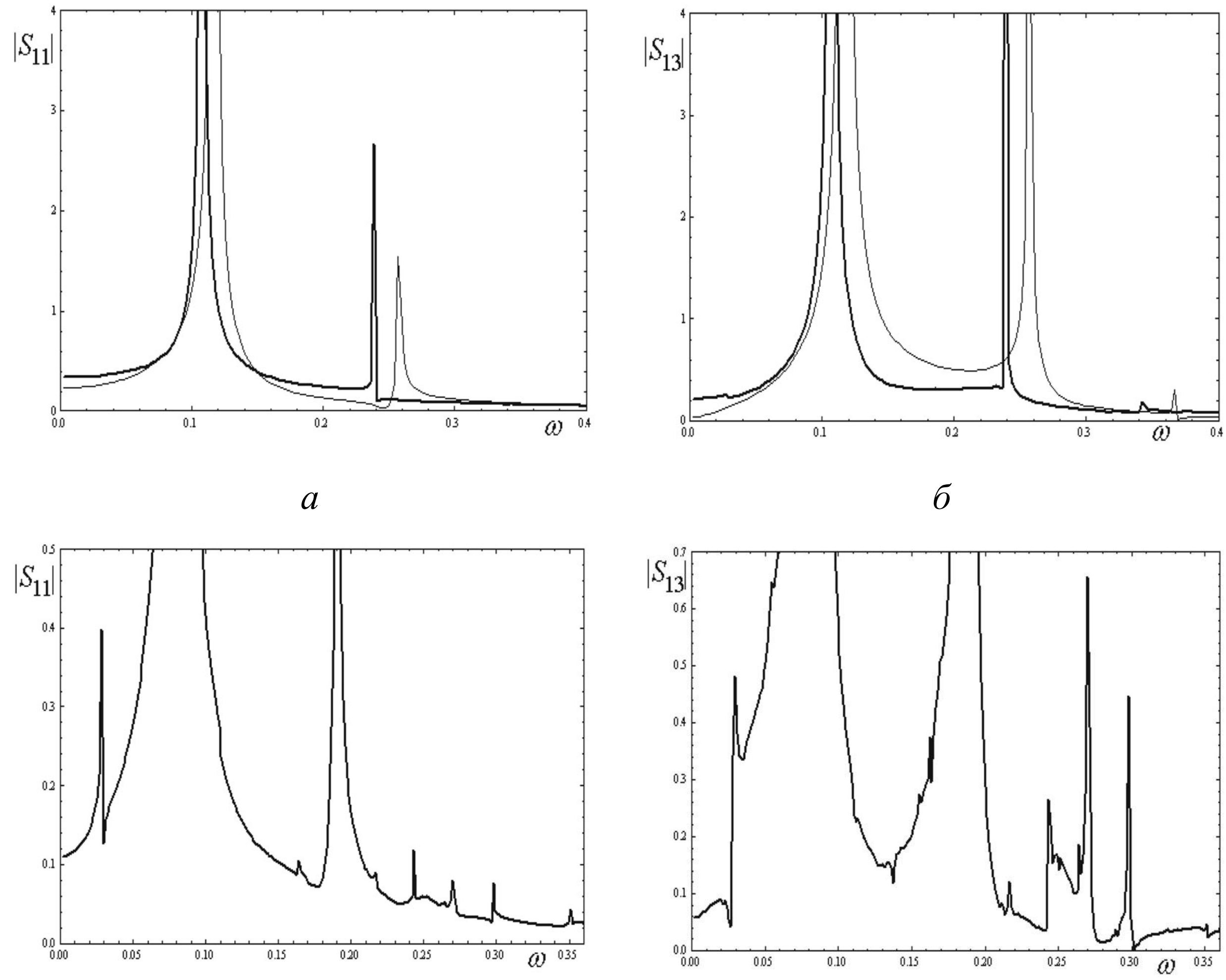
Додаткову інформацію про властивості досліджуваних нами режимів можна отримати за допомогою кореляційного аналізу. Використовуючи розв'язок системи (4.7) у вигляді дискретних послідовностей $q_i(j)$, i = 1, 2, 3, j = 1τ, 2τ, ..., Mτ (τ = 0,01 є кроком дискретизації часової змінної), функція крос-кореляції визначається як [362]

$$R_{xy}(k)=\frac{M}{M-k}\frac{\sum_{j=1}^{M-k}q_x(j)\,q_y(j-k)}{\sum_{j=1}^{M}q_x(j)q_y(j)},\quad x,y=1,\ldots,3 \qquad (4.8)$$

Якщо x = y, то отримаємо визначення автокореляційної функції $R_{xx}(k)$. Разом з кореляційними функціями ми використовуємо їх перетворення Фур'є $FFT(R_{xy})=S_{xy}(\omega)$, які у випадку автокореляційної функції збігаються з потужністю спектра сигналу [363].

Почнемо з кореляційного аналізу режимів, отриманих при малих β. Взявши траєкторії, чиї Пуанкаре перетини зображені на рисунках 4.8, *а* та 4.8, *г*, можна отримати графіки $|S_{11}(\omega)|$ (рис. 4.10, *а*) та $|S_{13}(\omega)|$ (рис. 4.10, *б*). Згідно з рисунком 4.10, *а*, спектр має суттєвий максимум біля ω = 0,1, а інший – приблизно 2ω. Це свідчить про те, що послідовність q_1 має превалюючий часовий масштаб, коли кореляція є найбільш сильною. Слід зауважити, що ця домінантна частота зміщується ліворуч при зростанні нелінійності (порівняння кривих, позначених відтінками сірого кольору). Оскільки β мале, поведінка осциляторів не відрізняється один від одного (рис. 4.10, *б*).

Для β = 1,5, коли існує хаотичний режим (рис. 4.9, *г*), спектр функції R_{11} має дві переважаючі частоти (рис. 4.10, *в*), які супроводжуються декількома піками. У той же час спостерігається більш істотна дефрагментація спектру для функції R_{13} (рис. 4.10, *г*). Особливо слід звернути увагу на появу додаткових високочастотних піків, які можна розглядати як додаткові часові масштаби.



а *б* *в* *г*

Рис. 4.10. Графіки функцій $|S_{11}(\omega)|$ (ліворуч) і $|S_{13}(\omega)|$ (праворуч). Спектри відповідають режиму рисунка 4.8, *в* (верхні панелі) та рисунку 4.8, *г* (нижні панелі). Криві, зображені тонкими лініями, відповідають лінійній системі (4.7) з $\beta = 1$.

Далі розглядаються коливання в системі (4.7) при наступних часткових частотах $\omega_i = r^{i-1}$, $r = 2{,}0$. При розгляді зберігаються ті ж самі початкові умови, що використовувалися раніше.

З перерізів Пуанкаре (рис. 4.11, *а*) випливає, що траєкторії можуть утворювати трубку в фазовому просторі при малих значеннях параметра β. Коли β зростає, ми спостерігаємо перетворення фазового простору таким чином, що режими стають більш хаотичними (рис. 4.11, *б* та 4.11, *в*). Нарешті, зростання β призводить до істотної хаотизації перерізу Пуанкаре (рис. 4.11, *г*).

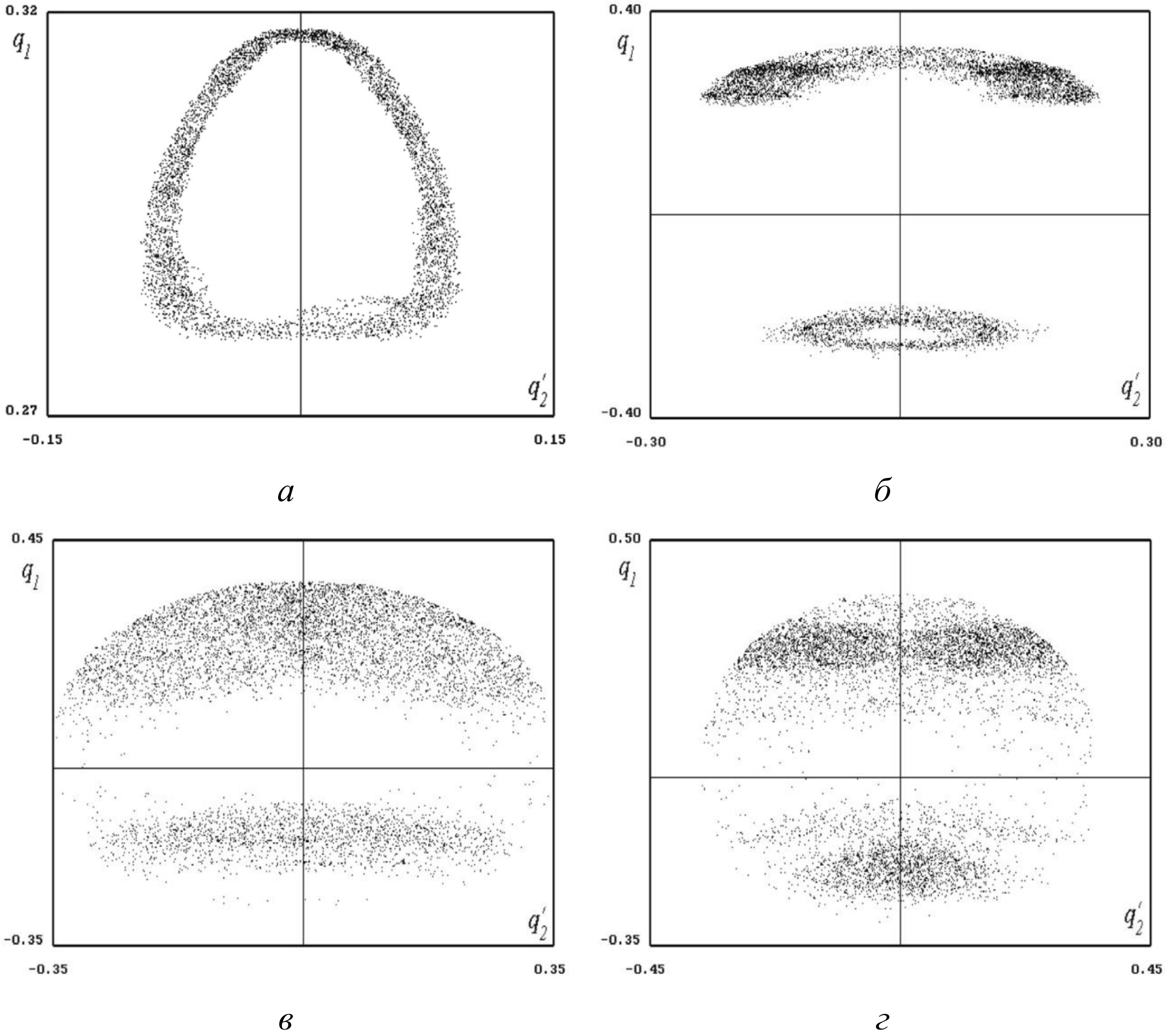
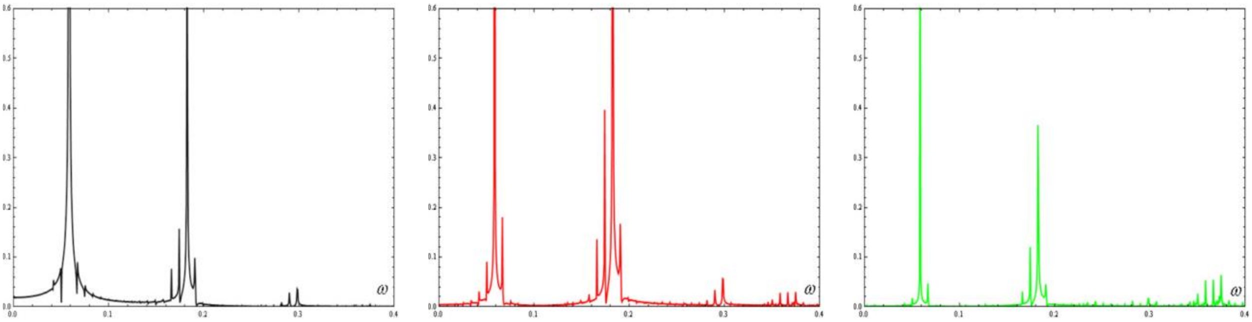


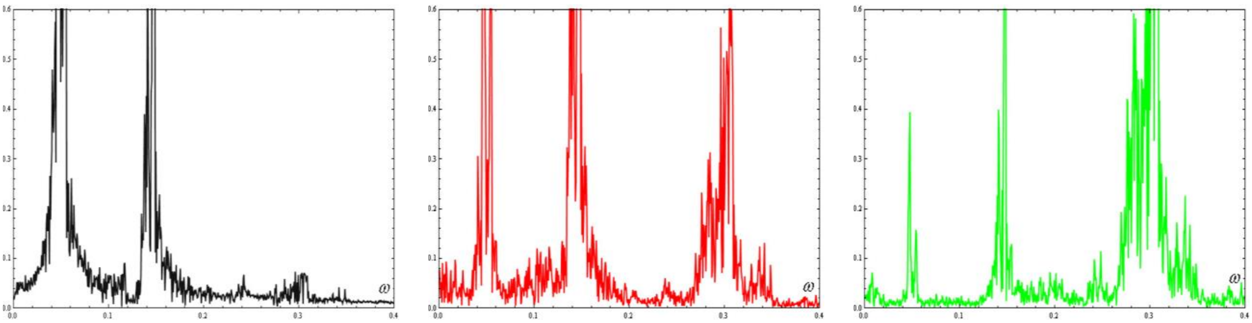
Рис. 4.11. Перетини Пуанкаре при β = 1,2 (*a*), β = 1,3 (*b*), β = 1,4 (*c*), β = 1,5 (*d*). Значення параметрів r = 2, φ = 0,6. Початкові умови q_1'=0,2, а інші координати дорівнюють нулю.

Зростання β таким чином супроводжується зростанням нерегулярності. У цій ситуації неможливо зменшити систему (4.7) до моделі малої розмірності, наприклад, до одновимірних зображень перетинів Пуанкаре.

Щоб зрозуміти явища в системі при збільшенні β, отримано перетворення Фур'є для компонент q_i, а саме, $FFT(q_i)$ при β = 1,2 (рис. 4.12, *а* – 4.12, *в*) та $FFT(q_i)$ при β = 1,5 (рис. 4.12, *г* – 4.12, *е*). Із спектрів, представлених на рисунках 4.12, *а* – 4.12, *в*, випливає, що всі компоненти q_i характеризуються двома суттєвими спектральними максимумами. Це зумовлює існування тору (рис. 4.11, *а*) у фазовому просторі системи.



а *б* *в*



г *д* *е*

Рис. 4.12. Фур'є-спектри q_i, i = 1, 2, 3 – компонент траєкторій, наведених на рис. 4.11 при β = 1,2 та β = 1,5, відповідно.

Для β = 1,5 компонент q_1 має два широких спектральних максимуми (рис. 4.12, *г*) та один помітний максимум в тому ж місці, що і в спектрі з рис. 4.12, *а*. Спектр q_2 (рис. 4.12, *д*) включає в себе три переважних максимуми, що мають сильно нерегулярний характер. У спектрі q_i також можна виділити три максимуми. На відміну від спектру з рис. 4.12, *в*, видно, що висота максимумів зростає, коли ω зростає. Це може бути пов'язано зі збудженням високочастотних спектральних режимів.

Отже, систему (4.7) можна розглядати як модель, що описує спрямований перенос енергії в ієрархічному середовищі.

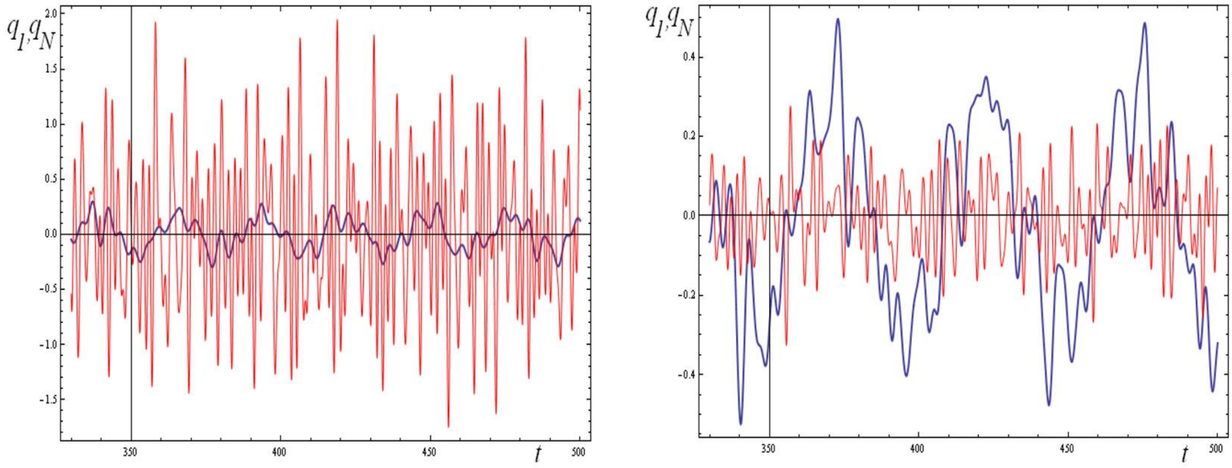
4.2.3. Дослідження моделі з багатьма ієрархічними рівнями

Розглядається модель, яка складається з багатьох ієрархічних рівнів, наприклад, N = 20. Фіксовані параметри мають наступні значення: $\omega_0 = 1$, $r = 1{,}04$, $\beta = 1{,}15$ та початковий стан $q_1(0) = 0$, $q_1(0) = 0$, $q_1^{'}(0) = 0{,}3$, $q_j(0) = q_j^{'}(0) = 0$, $j = 2, \ldots, N$. Порівняння компонент q_1 та q_N розв'язку системи (4.6), отримані при $\varphi = 0{,}7$ та $\varphi = 0{,}9$. Відповідні результати наведені на лівій і правій панелях на рисунках 4.13 та 4.14, відповідно.

Для $\varphi =$ 0,7 амплітуда q_1 набагато менше амплітуди q_N. Вид сигналів на рис. 4.13, *a* вказує на те, що частотні наповнення сигналів q_1 і q_N відрізняються. Крім того, часова залежність $q_1(t)$ виглядає як гармонічний сигнал, модульований іншим сигналом з більш високою частотою. Це підтверджується аналізом спектрів Фур'є для q_1 та q_N (рис. 4.14, *a*). Спектр для q_1, зображений товстою лінією на рис. 4.14, *a*, містить один максимум, що відповідає існуванню моди, подібної до функції косинус, і ряду набагато менших максимумів, які спричиняють пульсацію профілю q_1.

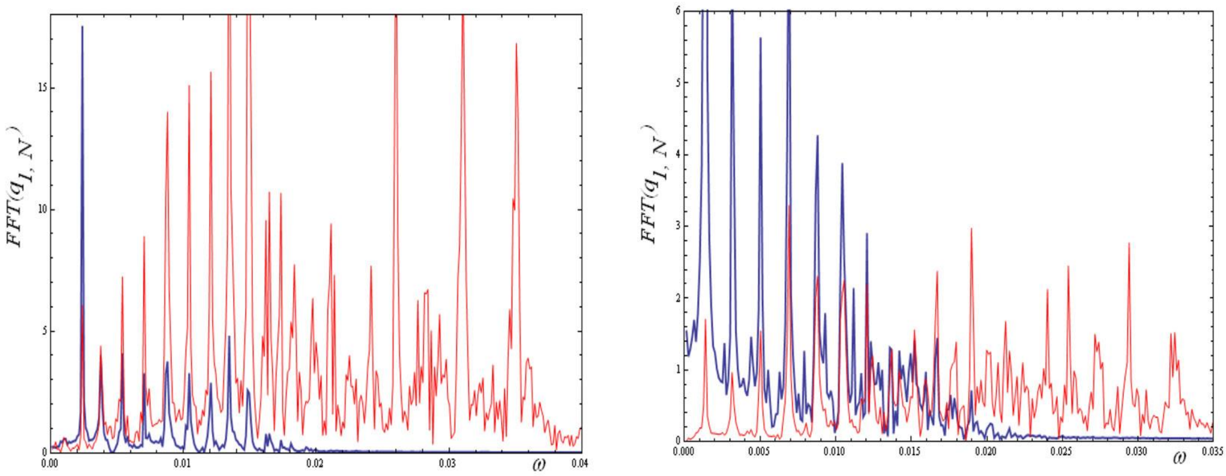
Як видно з рис. 4.14, *a*, спектр для q_N, зображений світлішою кривою, містить ряд майже еквівалентних максимумів, розташованих як у низьких, так і у високочастотних областях. Аналогічний аналіз може бути виконаний для розв'язків системи (4.6) при $\varphi = 0{,}9$.

Часові залежності компонент q_1 та q_N, наведені на рис. 4.13, *b*, показують, що амплітуда q_1 більша за q_N. Згідно з рис. 4.14, *b*, основна частина спектра Фур’є компоненти q_1 локалізована у низькочастотній області, проте спектр q_N майже рівномірно розподілений у розглянутій області.



а *б*

Рис. 4.13. Зображення компонент $q_1(t)$ (товста синя крива) та $q_N(t)$ (тонка червона крива), $t \in (330;\, 500)$ при $\varphi = 0{,}7$ (*a*) і $\varphi = 0{,}9$ (*b*).



а *б*

Рис. 4.14. Зображення спектрів компонент $q_1(t)$ (товста синя крива) та $q_N(t)$ (тонка червона крива), $t \in (330;\, 500)$ при $\varphi = 0{,}7$ (*a*) і $\varphi = 0{,}9$ (*b*).

З результатів, представлених у цьому пункті, можна зробити висновок, що, по-перше, може існувати критичне значення φ, яке відповідає формуванню порівнянних коливань на першому та останньому ієрархічних рівнях середовища. По-друге, спектр найнижчого рівня, який представляє найбільший інтерес, розподіляється в широкій частотній області і домінуючі частоти можуть відрізнятися в залежності від φ.

Отже, запропоновано математичну модель середовища з ієрархічною структурою, як систему нелінійних вкладених осциляторів. Проблема, яка важлива для природних ієрархічних середовищ пов'язана з особливостями передачі енергії по ієрархічній структурі. Щоб розглянути цю проблему, проведені дослідження фазових портретів, кореляційних функцій та спектри Фур'є, що характеризують осцилятори, розміщені на різних ієрархічних рівнях. В результаті цих досліджень з'ясовано, що ієрархічні системи виявляють квазіперіодичні та хаотичні режими, розвиток яких залежить від параметра φ. Показано, що серед значень параметра φ, який відповідає процесам передачі енергії від верхнього рівня до найнижчого, існує порогове значення. Тому в рамках представленої моделі можна підтвердити, що ієрархічна структура, яка супроводжується нелінійністю, відіграє важливу роль у перетворенні потоків енергії в середовищі. Перебудова ієрархічних рівнів, викликана інтенсивним навантаженням, є природним механізмом накопичення та випромінювання енергії структурованих середовищ у сильно нерівноважних умовах.

4.3.Нелінійні коливання в ієрархічному середовищі під дією зовнішнього періодичного збурення

Цей пункт присвячений вивченню динаміки ієрархічних середовищ при зовнішньому збуренні. Як і в попередньому пункті, припущення щодо побудови системи є дійсними. Щоб врахувати суттєві недосконалості природних середовищ, в моделі вводяться дисипативні процеси у вигляді лінійного в'язкого тертя. Зовнішня гармонійна сила застосовується до верхнього рівня ієрархічної системи.

Досліджується реакція системи на періодичне зовнішнє навантаження, коли частота цього навантаження близька до власних частот ієрархічної системи. Оскільки власні частоти визначаються масами осциляторів та їх жорсткістю, зовнішнє навантаження визначає область ієрархічного середовища, що розглядається. Неважливо, що розглядається частина ієрархічної системи, але важливе значення має зв’язок між власними частотами ієрархічної системи та керуючою частотою.

Таким чином, проводиться дослідження вимушених коливань у сильно нелінійній ієрархічній системі пов’язаних осциляторів. Метою статті є вивчення стійких коливань, коли внутрішні (структурні) та зовнішні (частота та амплітуда) параметри змінюються. Точніше, задачею є класифікація стійких коливань в скороченій моделі з тим, щоб передбачити особливості головної моделі.

4.3.1. Математична модель ієрархічної системи з дисипацією

Розглядаються осцилятори, що мають однакові маси і синхронно рухаються на рівні n. Тоді кожен осцилятор з цього рівня задовольняє рівнянням Гамільтона-Якобі, доповненим членами, що відповідають за тертя та зовнішнє збурення $f(t)$ [43, 57]

$$\begin{aligned}\ddot{x}_n &= -\omega_n^2 \left|x_n - x_{n-1}\right|^{\alpha-1}\chi(x_n - x_{n-1}) - \mu_n\left(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}\right) + \\ &+ \omega_{n+1}^2 s\frac{m_{n+1}}{m_n}\left|x_{n+1} - x_n\right|^{\alpha-1}\chi(x_{n+1} - x_n) + f(t)\delta_1,\end{aligned} \tag{4.9}$$

де $\omega_n^2 = C_n / m_n$, функція $\chi(x) = 1$, якщо $x \ge 0$, інакше $\chi(x) = -1$, $\delta_1 = \delta(n-1)$ – дельта функція Дірака. Взагалі, можна мати справу з довільними послідовностями маси і жорсткості, але природно припустити, що m_n зменшується, C_n та ω_n збільшуються від верхнього рівня до нижнього.

Вводячи нові змінні $q_n = x_n - x_{n-1}$, які відповідають зміщенням осциляторів від рівноважного стану, система (4.9) перепишеться у наступному вигляді

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -F_1 + \varphi_1 F_2 - \mu_1 \dot{q}_1 + f(t) \\ \ddot{q}_n &= F_{n-1} - F_n(1+\varphi_{n-1}) + \varphi_n F_{n+1} - \mu_n \dot{q}_n + \mu_{n-1}\dot{q}_{n-1} \\ \ddot{q}_N &= F_{N-1} - F_N(1+\varphi_{N-1}) - \mu_n \dot{q}_n + \mu_{N-1}\dot{q}_{N-1}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

де $F_i = \omega_i^2 |q_i|^\beta \chi(q_i)$, $\beta = \nu - 1$, $\varphi_i = sm_{i+1}/m_i$ $i = 1,2, ..., N$. Необхідно підкреслити, що система лінійна при $\beta = 1$, в той час, як вона стає строго нелінійною при $\beta \neq 1$. Без втрати загальності, приймемо, що величини ω_i та m_i становлять геометричні прогресії, тобто, $\omega_i = \omega_0 r^{i-1}$, $r > 1$ та $m_i = m_0 h^{i-1}$, $h < 1$, $i = 1,2, ..., N$. Тоді $\varphi_i = sh = \varphi = const$. Також приймемо, що коефіцієнти в'язкості на кожному рівні ідентичні, тому $\mu_n = \mu = const$.

Розглянемо модель з трьома ієрархічними рівнями, тобто $N = 3$, а також розпочнемо вивчення з лінійного випадку коли $\beta = 1$, тобто $F_i = \omega_i^2 q_i$, а перший рівень знаходиться під гармонічним навантаженням $f(t) = \gamma \sin \alpha t$. Тоді система (4.10) матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -F_1 + \varphi F_2 - \mu \dot{q}_1 + \gamma \sin \alpha t, \\ \ddot{q}_2 &= F_1 - F_2(1+\varphi) + \varphi F_3 - \mu \dot{q}_2 + \mu \dot{q}_1, \\ \ddot{q}_3 &= F_2 - F_3(1+\varphi) - \mu \dot{q}_3 + \mu \dot{q}_2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Таким чином, ми будемо виводити криві частотної характеристики [364] для системи (4.11), коли частота α змінюється і розглянемо поведінку моделі при збільшенні нелінійності. Підкреслимо, що дана система є лінійною при $\beta = 1$, тоді як вона стає сильно нелінійною при $\beta \neq 1$. Зазначимо, що методи, які стосуються слабких нелінійних моделей, розроблені суттєво [364, 365], тоді як підходи для справді нелінійних систем розвинені набагато гірше. Як правило, аналітичні методи розроблені для моделей з одним ступенем свободи [366–369]. Вдалося отримати результати щодо опису структури потоку для плоских механічних систем, які описуються поліноміальними потенціалами [370]. Для обробки багатовимірних моделей використовуються числові [371] або гальорківські процедури [364].

В даному дослідженні в системі не припускається існування жодних малих параметрів, тому неможливо застосувати методи збурень (метод множинних масштабів, метод усереднення [364, 367, 369]), що могло б забезпечити побудову асимптотичного розв’язку за допомогою збурення деякої канонічної, як правило, лінійної моделі. У цій роботі ми використовуємо методи проекції, зокрема метод Гальоркіна та їх модифікації. При застосуванні цієї техніки ми враховуємо необхідність оцінки точності процедури [364]. Замість того, щоб оцінювати високі гармоніки, використовується порівняння з прямим числовим моделюванням.

4.3.2. Дослідження вимушених коливань у тришарових ієрархічних середовищах методом особливих точок

У якості відправної точки розглянемо лінійний випадок, коли параметр $\beta = 1$. Припускаючи, що розв’язок системи існує у вигляді $q_k = X_k \exp i\Omega$, $k = 1, 2, 3$, отримуємо характеристичне рівняння для власних частот Ω_k

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - \omega_1^2 - \mu i\Omega & \varphi\omega_2^2 & 0 \\ \omega_1^2 + \mu i\Omega & \Omega^2 - (1+\varphi)\omega_2^2 - \mu i\Omega & \varphi\omega_3^2 \\ 0 & \omega_2^2 + \mu i\Omega & \Omega^2 - (1+\varphi)\omega_3^2 - \mu i\Omega \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.12)$$

Через лінійність системи (4.12) власні моди з часом зникають, а залишається лише гармонійний режим частоти α. Щоб отримати амплітуди q_k, шукаємо розв’язок системи (4.11) у такому вигляді:

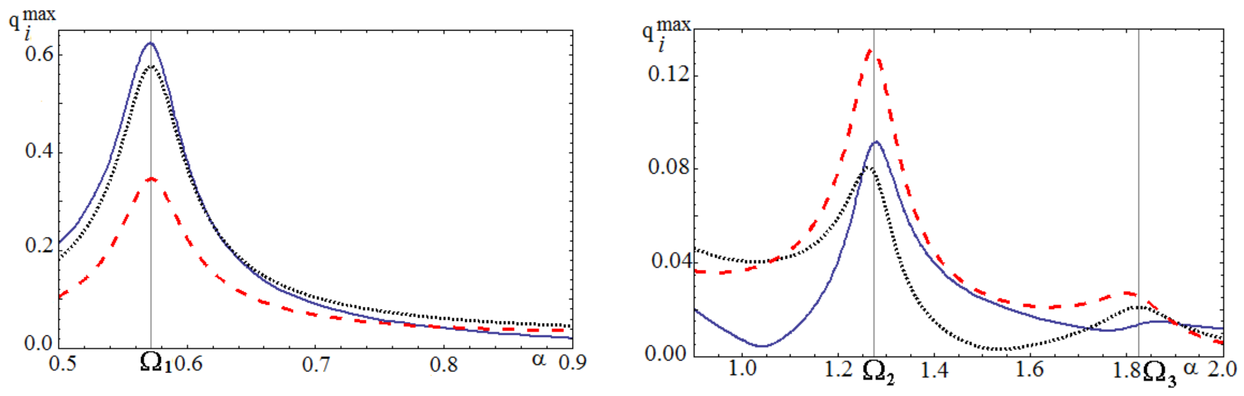
$$q_1 = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t$$
$$q_2 = C\sin\alpha t + D\cos\alpha t \qquad (4.13)$$
$$q_3 = H\sin\alpha t + G\cos\alpha t.$$

Підставляючи (4.13) в (4.11) і прирівнюючи коефіцієнти при тригонометричних функціях, приходимо до лінійної системи алгебраїчних рівнянь:

$$A\alpha\mu + B\left(\omega_1^2 - \alpha^2\right) - D\varphi\omega_2^2 = 0,\; A\left(\omega_1^2 - \alpha^2\right) - B\alpha\mu - C\varphi\omega_2^2 = \gamma,$$
$$-A\alpha\mu - B\omega_1^2 + C\alpha\mu + D\left(\omega_2^2\{1+\varphi\} - \alpha^2\right) - G\varphi\omega_3^2 = 0,$$
$$-A\omega_1^2 + B\alpha\mu + C\left(\omega_2^2\{1+\varphi\} - \alpha^2\right) - D\alpha\mu - H\varphi\omega_3^2 = 0, \qquad (4.14)$$
$$-C\alpha\mu - D\omega_2^2 + H\alpha\mu + G\left(\omega_3^2\{1+\varphi\} - \alpha^2\right) = 0,$$
$$-C\omega_2^2 + D\alpha\mu + H\left(\omega_3^2\{1+\varphi\} - \alpha^2\right) - G\alpha\mu = 0.$$

Корені цієї системи дозволяють побудувати амплітудні криві, що визначають залежність максимальної амплітуди $q_i^{\max}$ коливань від частоти ходової частоти α. А саме, поклавши величину $q_i^{\max} = \sqrt{A^2 + B^2}$ уздовж вертикальної осі та частоту α вздовж горизонтальної осі, можна побудувати резонансну криву для компоненти q_1 (рис. 4.15).

Для виявлення основних властивостей моделі візьмемо довільну послідовність ω_i, а саме, при $\omega_0 = 1,\ r = 1{,}1$, отримуємо $\omega_1 = 1,\ \omega_2 = 1{,}1,\ \omega_3 =$ 1,21. Інші параметри $\varphi = 0{,}6$, $\mu = 0{,}1$. Тоді з (4.12) випливає, що власними частотами є $\Omega_1 = 0{,}571973$, $\Omega_2 = 1{,}27305$, $\Omega_3 = 1{,}82337$. На амплітудній кривій в інтервалі α від 0,5 до 2 спостерігається резонансне збільшення амплітуди в околі власних частот Ω_k. Варто також зазначити, що існує розбіжність між Ω_k та фактичними максимумами резонансних кривих, особливо для Ω_2 та Ω_3, що викликано зв’язністю рівнянь.



а *б*

Рис. 4.15. Амплітудні криві лінійної системи (4.11), де α змінюється в інтервалі: (0,5; 0,9) (*а*) і (0,9; 2,0) (*б*). Товста лінія відповідає q_1 компоненті, пунктирна лінія – q_2, штрихова лінія – q_3; Ω_k, $k=1,\,2,\,3$ – власні частоти, визначені за допомогою (4.12).

З рис. 4.15 випливає, що амплітуда коливань на верхньому шарі q_1 більша, ніж інші в околі первинної резонансної частоти Ω_1, тоді як амплітуда q_3 переважає у високочастотній області.

Тепер змістимо параметр β з лінійного випадку, тобто $\beta=1$, і розглянемо випадок сильної нелінійності, коли β вибрано поблизу 1.

Щоб вивести криві відгуку для нелінійної системи, застосуємо метод, розроблений для моделі одиничного ступеня свободи у роботі [372]. Будемо називати цей підхід методом особливих точок (МОТ). Походження назви методу можна зрозуміти з наступних пояснень.

Згідно методу, припустимо, що розв'язок системи (4.11) має вигляд $q_1 = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t = a\sin(\alpha t - \delta)$, при прикладеній зовнішній силі $P=\gamma\sin\alpha t$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що коли зовнішня сила матиме такий вигляд, то розв'язок буде таким $q_1 = a\sin\alpha t$. Також вважатимемо, що $q_2 = a\rho_2\sin(\alpha t+\theta_2)$, $q_3 = a\rho_3\sin(\alpha t+\theta_3)$.

Для обчислення амплітуди усталеного періодичного режиму використаємо наступні міркування:

1. Коли q_1 досягає своїх максимальних значень, то $\sin\alpha t = 1$, а також $\dfrac{dq_1}{dt} = 0$, $\dfrac{d^2 q_1}{dt^2} = -\alpha^2 a$. У той же час, $q_2 = a\rho_2 \cos\theta_2$, $\dfrac{dq_2}{dt} = -a\alpha\rho_2 \sin\theta_2$, $\dfrac{d^2 q_2}{dt^2} = -a\alpha^2 \rho_2 \cos\theta_2$.

Аналогічно,

$$q_3 = a\rho_3 \cos\theta_3,\ \frac{dq_3}{dt} = -a\alpha\rho_3 \sin\theta_3,\ \frac{d^2 q_3}{dt^2} = -a\alpha^2 \rho_3 \cos\theta_3.$$

2. Коли q_1 проходить через положення рівноваги, то $\sin\alpha t = 0$, а також $\dfrac{dq_1}{dt} = \alpha a$, $\dfrac{d^2 q_1}{dt^2} = 0$.

У той же час,

$$q_2 = a\rho_2 \sin\theta_2,\ \frac{dq_2}{dt} = a\alpha\rho_2 \cos\theta_2,\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -a\alpha^2 \rho_2 \sin\theta_2.$$

Аналогічно,

$$q_3 = a\rho_3 \sin\theta_3,\ \frac{dq_3}{dt} = a\alpha\rho_3 \cos\theta_3,\ \frac{d^2 q_3}{dt^2} = -a\alpha^2 \rho_3 \sin\theta_3.$$

Таким чином невідомі величини δ, α, ρ_2, ρ_3, θ_2, θ_3 задовольняють наступну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{gathered}
\alpha^2 a - F_1(a) + \varphi F_2(\rho_2 a\cos\theta_2) + \gamma\cos\delta = 0 \\
\alpha^2 a\rho_2 \cos\theta_2 + F_1(a) - (1+\varphi)F_2(\rho_2 a\cos\theta_2) + \varphi F_3(\rho_3 a\cos\theta_3) + \mu\rho_2 a\alpha\sin\theta_2 = 0, \\
\alpha^2 a\rho_3 \cos\theta_3 + F_2(\rho_2 a\cos\theta_2) - (1+\varphi)F_3(\rho_3 a\cos\theta_3) + \\
+ \mu\rho_3 a\alpha\sin\theta_3 - \mu\rho_2 a\alpha\sin\theta_2 = 0 \\
\varphi F_2(\rho_2 a\sin\theta_2) - \mu a\alpha + \gamma\sin\delta = 0, \qquad (4.15) \\
\alpha^2 a\rho_2 \sin\theta_2 - (1+\varphi)F_2(\rho_2 a\sin\theta_2) + \varphi F_3(\rho_3 a\sin\theta_3) - \mu\rho_2 a\alpha\cos\theta_2 + \mu a\alpha = 0, \\
\alpha^2 a\rho_3 \sin\theta_3 + F_2(\rho_2 a\sin\theta_2) - (1+\varphi)F_3(\rho_3 a\sin\theta_3) - \\
- \mu\rho_3 a\alpha\cos\theta_3 + \mu\rho_2 a\alpha\cos\theta_2 = 0
\end{gathered}$$

Для лінійного випадку моделі (4.11) амплітудні криві, обчислені за допомогою системи (4.14) та (4.15) дають тотожні результати, як і очікувалось. Ця обставина вказує на правильність отриманих співвідношень, принаймні для лінійної моделі.

Перед вивченням системи (4.15), корисно виключити невідому змінну δ. Поєднуючи перше та четверте рівняння системи можна отримати наступне співвідношення

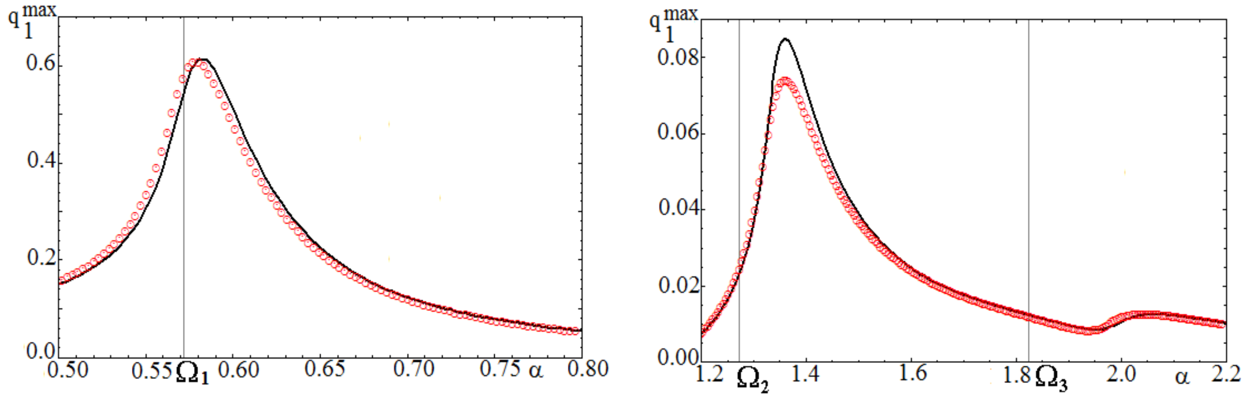
$$\left(\alpha^2 a - F_1(a) + \varphi F_2(\rho_2 a \cos\theta_2)\right)^2 + \left(\varphi F_2(\rho_2 a \sin\theta_2) - \mu a \alpha\right)^2 = \gamma^2. \qquad (4.16)$$

Таке співвідношення корисне при числових дослідженнях через зменшення кількості незалежних змінних і, відповідно, кількості початкових умов при реалізації схеми Ньютона. Тому надалі вивчається система (4.15) у редукованій формі.

Отже, зафіксуємо $\beta = 0{,}95$, тоді як інші параметри залишимо такими, як фіксовані вище, та побудуємо амплітудну криву при зміні α. Спочатку обчислимо максимальні значення q_k шляхом безпосереднього числового інтегрування системи (4.11), яка еволюціонує в режимі стаціонарних коливань. Зазначимо, що початкові умови, додані до системи (4.11), залишаються незмінними для різних α. Відповідна амплітудна крива зображена на рис. 4.17 суцільною лінією.

Щоб розв'язати алгебраїчну систему (4.15) слід вибрати відповідні початкові умови при кожному α щоб забезпечити збіжність методу Ньютона. За початкові умови зручно вибирати розв'язок системи при попередньому значенні α. Це дозволяє продовжити розв'язок одного і того ж розв'язку при збільшенні α від 0,5 до 2.2 (рис. 4.16). Відповідний графік обчислених амплітуд зображений на рис. 4.16 позначками «$\circ$».

На рис. 4.16 можна спостерігати зміщення максимумів у напрямі вищих частот. Аналіз рис. 4.16, *а* показує, що розв'язки системи (4.15) які визначають наближену амплітудну криву, та крива, яка вважається справжньою, є близькими. Форми кривих при високих частотах співпадають. Однак криві в околі другого максимуму (рис. 4.16, *б*) не співпадають. Апроксимуюча крива має слабший максимум порівняно з максимумом справжньої кривої.

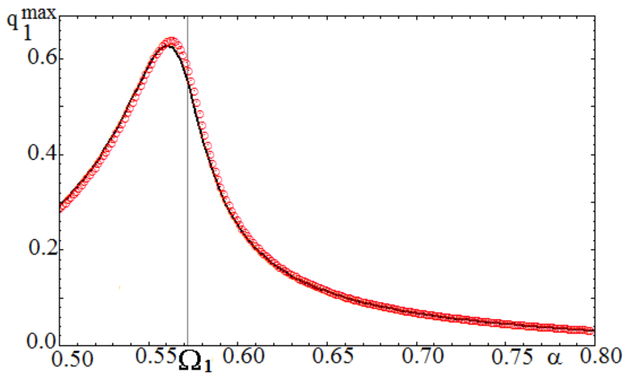


а *б*

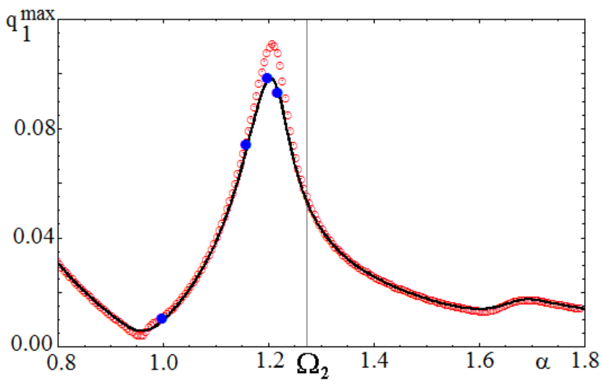
Рис. 4.16. Амплітудні криві нелінійної системи (4.11) обчислені числовим способом (суцільна лінія) та методом особливих точок (позначки «∘») при $\beta = 0{,}95$ та зміні α в інтервалі $(0{,}5;\ 0{,}8)$ (*а*) та $(1{,}2;\ 2{,}2)$ (*б*).

Виконаємо подібні обчислення амплітудної кривої при $\beta = 1{,}05$ (рис. 4.17). Рис. 4.17 показує, що резонансний максимум зміщується у напрямі менших частот. На відміну від рис. 4.16, *б*, видно, що в околі другого максимуму апроксимуючий профіль $q_1^{\max}$ дещо вищий ніж для справжньої резонансної кривої.

Якщо вибрати $\beta = 1{,}25$, з’являється розрив на кривій. Ця обставина ускладнює процес розв’язання системи (4.15). Стартуючи з лівого кінця діаграми (рис. 4.18, *а*) при $\alpha = 0{,}3$, можна обчислити резонансну криву до моменту появи розриву після чого коливання раптово зменшують амплітуду формуючи спадаючу гілку резонансної кривої. У той же час спостерігається інтервал амплітуд (поблизу середньої стрілки), до яких можна потрапити рухаючись тільки при зменшенні параметра α, як це показано стрілками на рис. 4.18, *а*. Будуючи резонансну криву в околі другого максимуму (рис. 4.18, *б*), ми стартуємо з лівого кінця та отримаємо верхню гілку кривої. Це супроводжується перериванням числової процедури. Коли ми стартуємо з правого кінця діаграми, тоді можна обчислити нижню гілку кривої.



а



б

Рис. 4.17. Амплітудні криві нелінійної системи (4.11) при $\beta = 1{,}05$ та змінному α з інтервалу $(0{,}5;\, 0.8)$ (*а*) та $(0{,}8;\, 1{,}8)$ (*б*). Суцільна крива отримана шляхом числового інтегрування системи, точки з «$\circ$» – методом особливих точок, точки з «$\bullet$» – методом Гальоркіна.

Таким чином, порівнюючи рис. 4.16–4.18, можна побачити, що метод особливих точок є менш точним, але описує основні тренди цілком правильно.

4.3.3. Застосування методу Гальоркіна для нелінійної моделі

Для перевірки результатів отриманих розробленим вище методом, використаємо метод Гальоркіна. Для цього виконаємо заміну часової змінної $\tau = \alpha t$. Розв'язок системи (4.11) шукатимемо у вигляді розкладу за тригонометричними функціями 1, $\sin\tau$, $\cos\tau$:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= A_0 + A_1 \sin\tau + A_2 \cos\tau, \\
q_2 &= B_0 + B_1 \sin\tau + B_2 \cos\tau, \\
q_3 &= C_0 + C_1 \sin\tau + C_2 \cos\tau,
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

де A_k, B_k, C_k – невідомі коефіцієнти. Згідно методу Гальоркіна, підставимо вирази (4.17) в систему (4.11), помножимо кожне рівняння на базисну функцію та проінтегруємо за періодом 2π. В результаті отримаємо систему, яку можна записати у формі $G_i(X)=0, i=1,...,9$ відносно $X=(A_{0,1,3}, B_{0,1,2}, C_{0,1,2})$, а саме:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} F_1 - \varphi F_2 d\tau = 0, \\
&-A_1\alpha^2 + A_2\alpha\mu + \int_0^{2\pi} (F_1 - \varphi F_2)\cos\tau d\tau = 0, \\
&-A_2\alpha^2 - A_1\alpha\mu + \int_0^{2\pi} (F_1 - \varphi F_2)\sin\tau d\tau = \gamma, \\
&\int_0^{2\pi} -F_1 + (1+\varphi)F_2 - \varphi F_3 d\tau = 0, \\
&-B_1\alpha^2 - A_2\alpha\mu + \alpha B_2\mu + \int_0^{2\pi} (-F_1 + (1+\varphi)F_2 - \varphi F_3)\cos\tau d\tau = 0, \\
&-B_2\alpha^2 + A_1\alpha\mu - \alpha B_1\mu + \int_0^{2\pi} (-F_1 + (1+\varphi)F_2 - \varphi F_3)\sin\tau d\tau = 0, \\
&\int_0^{2\pi} -F_2 + (1+\varphi)F_3 d\tau = 0, \\
&-C_1\alpha^2 - B_2\alpha\mu + \alpha C_2\mu + \int_0^{2\pi} (-F_2 + (1+\varphi)F_3)\cos\tau d\tau = 0, \\
&-C_2\alpha^2 + B_1\alpha\mu + \alpha C_1\mu + \int_0^{2\pi} (-F_2 + (1+\varphi)F_3)\sin\tau d\tau = 0.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Зазначимо, що отриману систему можна спростити, коли функції F_k є аналітичними. В інших випадках інтегро-диференціальна система (4.18) розв’язується числовим способом. Для побудови ітераційної процедури використано метод січних:

$$X_{n+1} = X_n - MG(X_n).$$

Матриця $\hat{M}$ є різницевим наближенням матриці Якобі з елементами, які мають наступний вигляд: $M_{i,j} = \left(G_i\left(X_j + \varepsilon\right) - G_i\left(X_j\right)\right)/\varepsilon$, $\varepsilon = 0{,}001$.

Виявилось, що час роботи числової схеми значно більший через обчислення коливних інтегралів. Тому ми застосували цей метод до окремих точок на амплітудній кривій. Перш за все, виявилось, що $A_0 = B_0 = C_0 = 0$. У лінійному випадку системи (4.11), коли $\beta = 1$, було отримано амплітудну криву, яка співпадає з зображеною на рис. 4.15. Ці результати використовуються як стартові для ітераційної процедури для нелінійної системи (4.18).

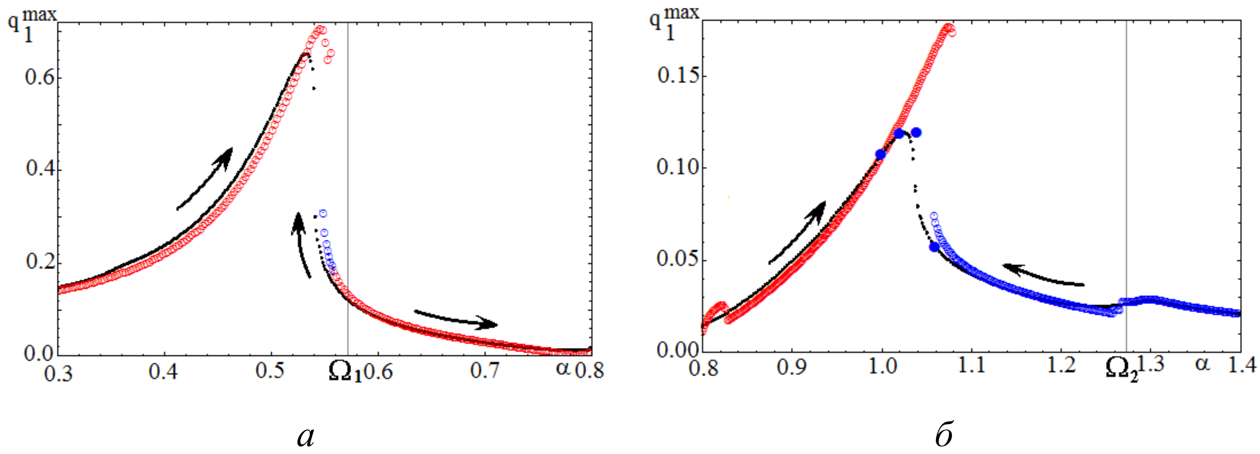


Рис. 4.18. Амплітудні криві нелінійної системи (4.11) q_1^k як функції α, де $\alpha \in (0{,}3;\, 0{,}8)$ (*а*) та $(0{,}8;\, 1{,}4)$ (*б*) при $\beta = 1{,}2$. Стрілки показують напрям зміни α, зокрема точки з «$\circ$» відповідають рухові вздовж кривої при зменшенні α. Інші позначки співпадають з описаними у попередньому рисунку 4.16.

Досліджуючи нелінійну систему при $\beta = 1{,}05$, обмежимось інтервалом частот $\alpha \in (1.16;\, 1.22)$, де спостерігається деяка невідповідність між дійсною та апроксимуючою амплітудною кривою (рис. 4.17, *б*). Розв’язок системи (4.18) зображений на рис. 4.17, *б* за допомогою заштрихованих кругів. Видно, що метод Гальоркіна дає точніші результати, але вимагає більш значних зусиль при обчисленнях.

Коли рівень нелінійності зростає до $\beta = 1{,}2$, спостерігаються явища стрибку (рис. 4.18). У цьому випадку спостерігається слабка коливна збіжність ітераційної процедури особливо в околі розриву амплітудної кривої (рис. 4.18, *б*) поблизу верхньої її гілки. Амплітуди коливань системи (4.11) зображені на рис. 4.18, *б* за допомогою заштрихованих кругів.

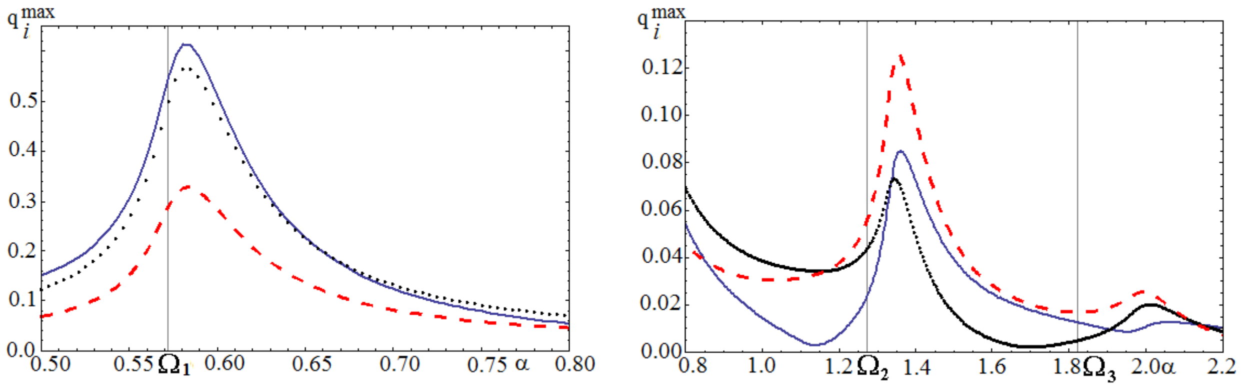
Підсумовуючи застосування методів описаних вище, бачимо, що (i) метод Гальоркіна є більш точним, але в той же час і більш кропітким (ii) метод особливих точок має достатню точність при слабкій нелінійності та забезпечує правильне оцінювання якісної поведінки амплітудної кривої.

Отже, під час розробки та порівняння методів вивчення системи (4.11) були встановлені ряд особливостей стаціонарних коливальних режимів. З рис. 4.16 та рис. 4.17 випливає, що екстремуми амплітудних кривих зсуваються праворуч при $\beta < 1$ та у протилежному напрямі при $\beta > 1$. Резонансні максимуми формують спадну послідовність, принаймні для вибраних значень параметрів. Існує критичне значення параметра β, яке відповідає виникненню явища стрибка.

Аналізуючи рис. 4.19 та рис. 4.20, видно, що розташування кривих відносно одна одної залишається таким же як і на рис. 4.15. Більше того, асиметрія амплітудної кривої для q_3, яка залежить від міри нелінійності β, стає більш видимою.

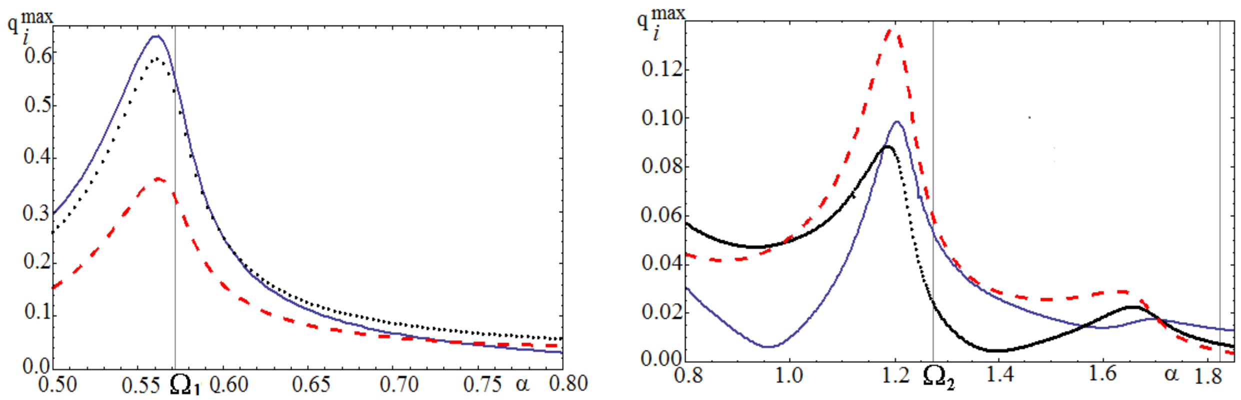
Через особливу важливість резонансних режимів, розташування максимумів амплітудної кривої вивчалось більш детально. Щоб зробити це, будувалась скелетна крива, ГМТ максимумів резонансної кривої.

Зафіксуємо значення $\beta = 1{,}1$ та використаємо метод особливих точок. Обчислена скелетна крива зображена на рис. 4.21, *а*. Для зручності, дві амплітудні криві при різних значеннях амплітуди зовнішнього навантаження



а *б*

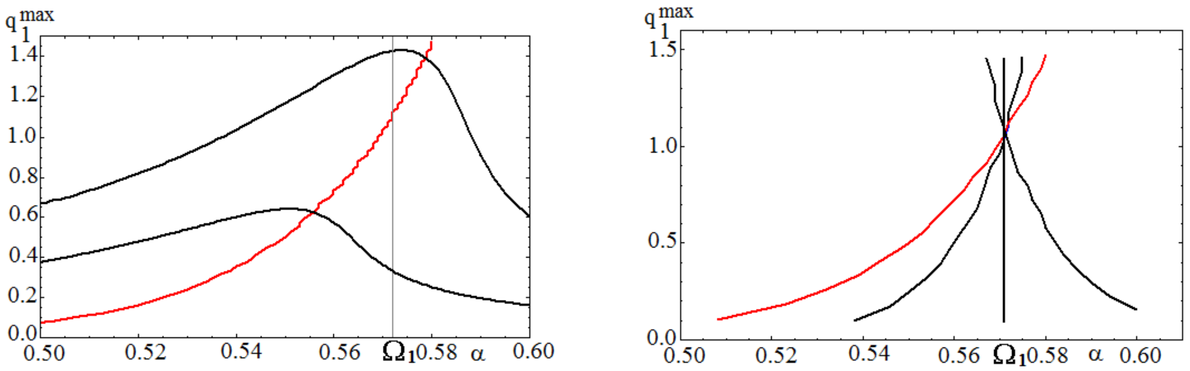
Рис. 4.19. Амплітудні криві системи (4.11) для компонент q_i, $i = 1,2,3$ як функція α, де $\alpha \in (0{,}5;\, 0{,}8)$ (*а*) та $(0{,}8;\, 2{,}2)$ (*б*) при $\beta = 0{,}95$. Суцільна лінія відповідає компоненті q_1, пунктирна – компоненті q_2, штрихова – компоненті q_3.



а *б*

Рис. 4.20 Амплітудні криві системи (4.11) для компонент q_i, $i = 1,2,3$ як функція α, де $\alpha \in (0{,}5;\, 0{,}8)$ (*а*) та $(0{,}8;\, 2{,}2)$ (*б*) при $\beta = 1{,}05$. Суцільна лінія відповідає компоненті q_1, пунктирна – компоненті q_2, штрихова – компоненті q_3.

$\gamma = 0{,}03$ та $\gamma = 0{,}07$ були обчислені чисельно. Зазначимо, що максимум розташовується ближче до скелетної кривої при менших γ. Не дивлячись на те, що використаний метод не є достатньо точним, незначна невідповідність між скелетною кривою та дійсним максимумом не критична для передбачення резонансних явищ.



а *б*

Рис. 4.21 Резонансні та скелетна криві при $\beta = 1{,}1$ (*а*); скелетні криві при $\beta = 1{,}1;\ 1{,}05;\ 1{,}0;\ 0{,}95$. (зліва направо) (*б*).

Змінюючи β від 1,1 до 0,95, були побудовані інші скелетні криві (рис. 4.21, *б*). Як і очікувалось, скелетна крива для лінійного випадку (вертикальна лінія) розділяє криві з різним типом монотонності. Цікаво, що усі ці криві перетинаються в одній точці.

Таким чином, у роботі розглядалась математична модель ієрархічно складеного середовища. Динаміка цієї моделі описується суттєво нелінійною системою зв'язаних осциляторів. Дослідження були зосереджені на нелінійних явищах, які виникають в складних системах, коли прикладається зовнішнє навантаження. Для виявлення та класифікації виявлених режимів, використовувались резонансні та скелетні криві, обчислення яких здійснювалось трьома методами: числовим способом, методом Гальоркіна та методом особливих точок. Порівняння результатів цих методів виявили їх переваги та недоліки.

Було встановлено, що нелінійність спричинює зсув резонансних частот, асиметрію резонансних кривих, явища стрибку та керує формою і монотонністю скелетної кривої. Це може допомогти під час ідентифікації характеристик природних матеріалів в експериментах їх резонансного навантаження [373–375]. Варто зазначити, що ряд проблем стосовно дослідження стаціонарних коливань у моделі (4.9) залишаються поза нашою увагою. Зокрема, виникає питання що може трапитись в ієрархічній системі коли число ієрархічних рівнів збільшити.

4.4. Ієрархічна блокова модель сейсмічного процесу

У цьому пункті пропонується модель для опису сейсмічних процесів, яка враховує ієрархічну структуру сейсмічної зони та той факт, що вона знаходиться в стані самоорганізованої критичності [44, 46]. Сейсмічна область Ω у вигляді куба утворена ієрархічною системою блоків кубічної форми, які розташовуються у випадковому порядку (рис. 4.22). Тут не розв'язується конкретна крайова задача, а досліджується можливість моделювання природнього сейсмічного процесу за допомогою ієрархічної системи блоків.

В систему ззовні підводиться енергія, яка накопичується в блоках нерівномірно. При досягненні енергією блока порогового значення, вона вивільняється і передається найближчим сусідам. Частина цієї енергії дисипує, а ще частина випромінюється у навколишнє середовище. Якщо сусідній блок отримує достатньо енергії щоб перевищити порогове значення, то він також вивільняє її і таким чином процес вивільнення енергії набуває лавиноподібного характеру, що, власне, і є сейсмічною подією. Використання енергії як основної змінної має перевагу, оскільки енергія є скалярною величиною. Це дає можливість легко застосувати схему клітинних автоматів для формалізації процесу перерозподілу енергії між блоками.

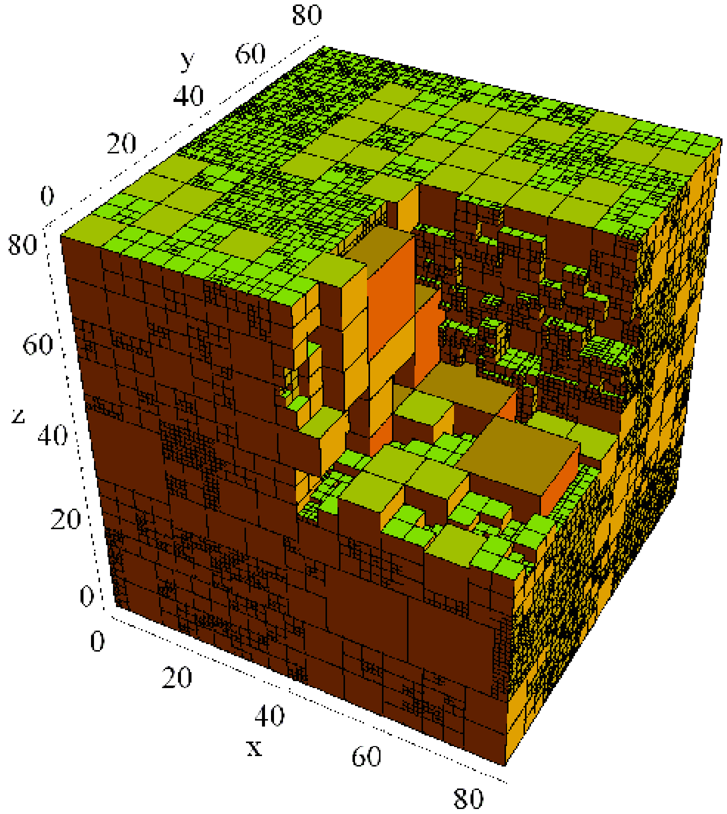


Рис. 4.22. Сейсмічна область Ω як ієрархічна система блоків.

Розглядається ієрархічна система, утворена блоками п’яти розмірів (рівнів) з розмірами сторін l_i, де l_i – цілі числа. Найменші блоки мають розмір $l_1 = 1$, а розмір блоків кожного наступного рівня вдвічі більший. Кількість блоків кожного рівня вибирається із умови того, що фрактальна розмірність блокового середовища дорівнює $D = 2{,}5$, що є властивим для розподілів фрагментів більшості природних структурованих матеріалів [376], а саме $N_i(> l_i) = C_l l_i^{-D}$, де N_i – кількість блоків, з розміром більшим ніж l_i. Як і в класичних моделях клітинних автоматів [99, 301], кожен блок знаходиться у двох станах: у стані спокою (стійкий елемент) та у збуреному стані (нестійкий елемент). Якщо накопичена блоком енергія менша порогового значення енергії E_i^{th}, то такий елемент є стійким, а якщо енергія блока досягає або перевищує порогове значення $E_i \geq E_i^{th}$, то він втрачає стійкість і зменшує свою енергію. На відміну від класичних моделей клітинних автоматів, в процесі розвантаження блок втрачає тільки частину енергії, яку він накопичив раніше $E_i \to E_i^r = E_i^{th}\theta$, де залишкова енергія E_i^r визначається параметром θ. З урахуванням того, що частина енергії дисипує та випромінюється у вигляді сейсмічних хвиль, сусіднім блокам передається енергія $(E_i - E_i^{th}\theta)(1-\gamma\psi)$, де $\psi \in [0,1]$ – випадкова величина, а γ – коефіцієнт, який визначає, що доля енергії дисипує та випромінюється. Ця енергія розподіляється між сусідніми блоками пропорційно площі контакту

$$E_k \to E_k + \frac{\lambda_{ik} E_i^{th}}{S_i^2}(E_i - E_i^{th}\theta)(1-\gamma\psi), \tag{4.19}$$

де λ_{ik} – площа контакту між i-м та k-м блоками, $S_i = 6l_i^2$. Порогове значення енергії блока E_i^{th} залежить від його розміру, а саме від площі поверхні $E_i^{th} = S_i(1+\delta_i)$. Тут введено невеликий шум δ_i з гауссовим розподілом, нульовим середнім значенням $\langle \delta_i \rangle = 0$ та дисперсією d_δ.

Енергія вводиться в систему блоків дискретно: порціями $\Delta E = 1$ на одному кроці за часом, аналогічно тому, як це здійснюється у моделях клітинних автоматів [99, 111, 112]. Імовірність попадання енергії пропорційна площі поверхні блоку. У процесі приготування та реалізації землетрусу слід виділити два різні за швидкістю протікання процеси: перший "повільний", зв'язаний з надходженням енергії в сейсмічну зону від руху тектонічних плит та "швидкий", зв'язаний безпосередньо із землетрусом. Тому енергія вводиться в систему тільки під час "повільного" процесу. Накопичення пружної енергії відбувається коли землетруси відсутні.

На межах задаються періодичні умови, що дає можливість максимально зменшити вплив розміру розрахункової області на сейсмічний процес. В такому випадку виведення енергії відбувається виключно через дисипацію та сейсмічне випромінювання. Моделювання сейсмічного процесу здійснюється у блоковій системі, в якій кількість найбільших блоків складає

$n_5 = 50$, а загальна кількість всіх блоків з урахуванням фрактальної розмірності $D = 2{,}5$ складає $N = 62182$.

На початку розрахунку всі блоки мають певну енергію, розподілену випадковим чином так, що в жодному блоці вона не перевищує порогового значення. Доволі швидко система досягає стаціонарного, але нерівноважного стану з невеликими флуктуаціями сумарної енергії, як показано на рис. 4.23. Тут наведені залежності сумарних енергій від часу для 4-х різних значень коефіцієнта θ, яким регулюється залишкова енергія E_i^r. Зрозуміло, що найбільшу сумарну енергію має система з найбільшою залишковою енергією.

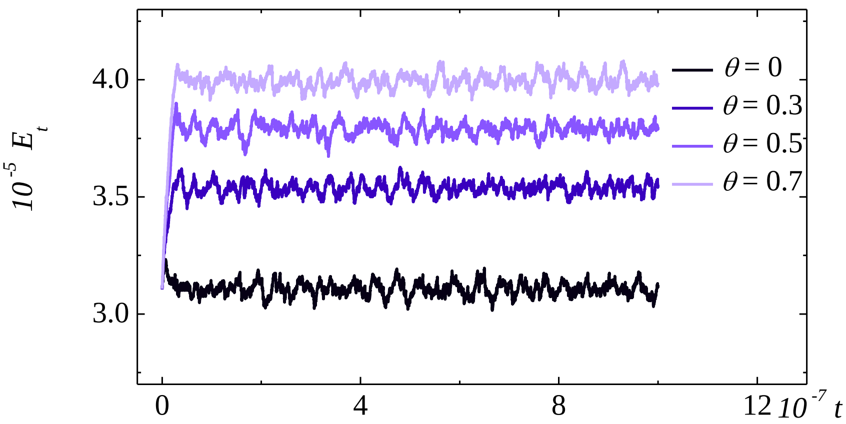
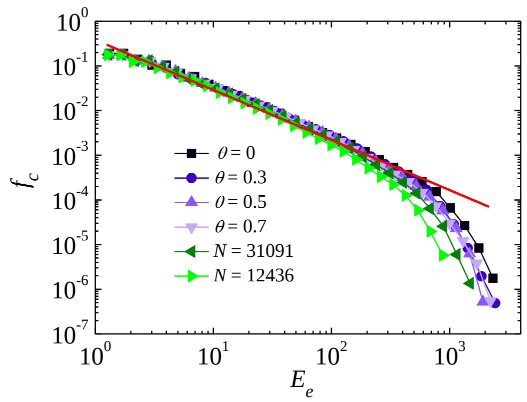
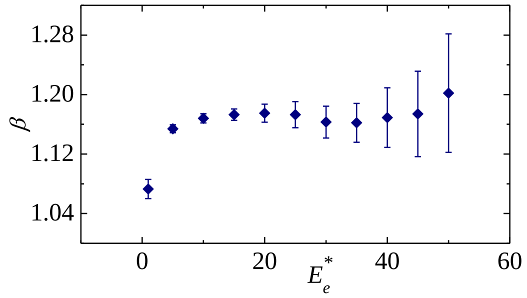


Рис. 4.23. Часова залежність сумарної енергії E_t для різних значень коефіцієнта θ.

На рис. 4.24, *а* показано кумулятивний розподіл землетрусів для чотирьох значень залишкової енергії. Тут пряма лінія відповідає значенню показника $\beta = 1{,}7 \pm 0{,}02$, тобто, модель з хорошою точністю відтворює закон Гутенберга-Ріхтера в енергетичному представленні $N(>E) \propto E^{-\beta}$, в якому показник ступеня β знаходиться в діапазоні 0,80-1,05 [108] для всіх значень залишкової енергії. Відхилення від степеневої залежності має місце як для великих землетрусів, так і для малих, що пов’язано з обмеженням розмірів блоків. Це підтверджується тим, що зменшення кількості блоків призводить до більшого загинання функції розподілу (рис. 4.24, *а*). На рис. 4.24, *б* наведено залежність експоненти β від нижнього порогу обрізання енергії E_t^*. На графіку видно чітко виражене плато, де β майже постійне і дорівнює 1,17. З цього випливає коректність визначення показника β.





а *б*

Рис. 4.24. Закон Гутенберга-Ріхтера. (*а*) Кумулятивний розподіл кількості землетрусів за енергією для різних залишкових енергій та різної кількості блоків. Нахил прямої, що апроксимує всі залежності $\beta = 1{,}07$. (*б*) Залежність показника β від нижнього порогу обрізання енергії E_t^*; довірчі інтервали відповідають довірчій імовірності 95%.

Сейсмічна активність до та після великих землетрусів для різних значень залишкової енергії вказує на відсутність серій афтершоків, хоча при цьому присутні форшоки (Рис. 4.25, *а*). Тому дана модель вимагає удосконалення з тим, щоб описати реалістичну картину сейсмічного процесу, яка включала би існування афтершоків. Для цього слід використати гіпотезу, що великі землетруси спричинюють значне руйнування гірського масиву та

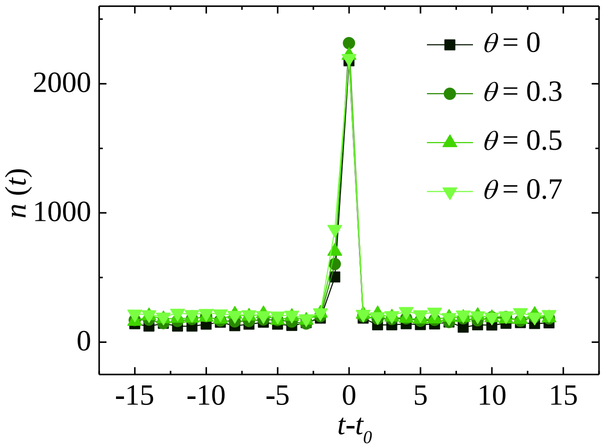
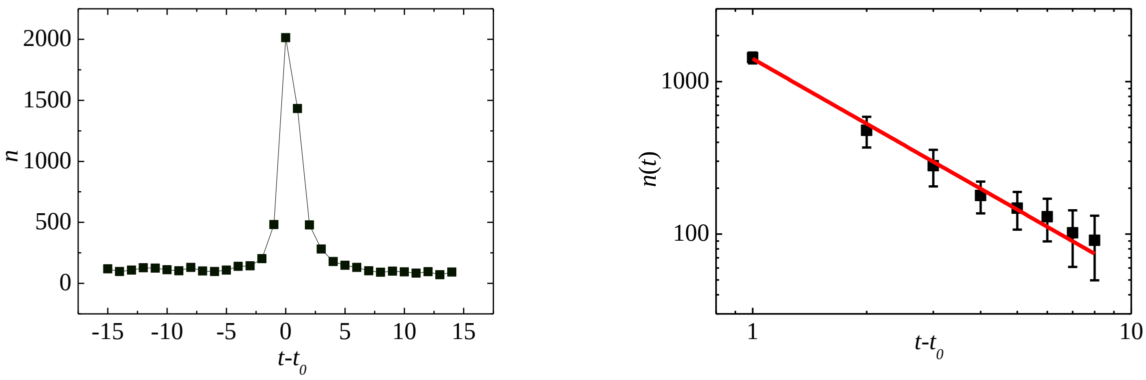


Рис. 4.25. Залежність середньої кількості землетрусів від часу до основного землетрусу за різних значень залишкової енергії.

перерозподіл напруження в області, охопленій цими землетрусами [377, 378]. Руйнування гірської породи призводить до зменшення критичних напружень (енергії), які визначають умови втрати рівноваги та генерування афтершоків. У цій моделі зменшення критичної енергії здійснюється за допомогою наступної процедури: на кожному часовому кроці для кожного блоку, який знаходиться у цій області, випадковим чином зменшується поріг

$$E_i^{th} \to \mu E_i^{th}(1+\varepsilon_i), \tag{4.20}$$

де $0<\mu<1$, а ε_i – невеликий шум з гауссовим розподілом, з нульовим середнім значенням та дисперсією d_ε. Таке зменшення відбувається до тих пір, поки значення порогової енергії не досягне величини залишкової енергії $E_i^r=\theta S_i(1+\delta_i)$. В подальшому, через деякий значний проміжок часу, відбувається відновлення (“заліковування”) зруйнованих зв’язків. Цей процес відбувається також випадково, коли виконається умова $\chi_i<\tau$, де $\chi_i\in[0,1]$ – випадкова величина, що генерується для *i*-го блоку на кожному кроці по часу після великого землетрусу, а τ – мала величина, яка забезпечує тривалий період “заліковування”. Оскільки в області, охопленій землетрусом відбувається зміна енергетичних порогів, то одночасно можуть виникати кілька афтершоків і всі вони враховуються для побудови статистичних залежностей.



а *б*

Рис. 4.26. Залежність середньої кількості землетрусів від часу до основного землетрусу (*а*); степенева апроксимація афтершоків (*б*), довірчі інтервали відповідають довірчій імовірності 95%.

Така вдосконалена модель суттєво змінює поведінку системи після великих землетрусів. На рис. 4.26, *а* наведено отримані в розрахунках кількість форшоків та афтершоків залежно від часу з використанням удосконаленої моделі. Тут великими землетрусами, як і в попередній моделі, вважаються землетруси з енергією, що перевищує $E = 1000$, а загальна кількість великих землетрусів N=1176295. Ці дані отримані для параметра залишкової енергії $\theta = 0{,}5$, коефіцієнта, що зменшує поріг $\mu = 0{,}6$, дисперсій $d_\delta = 0{,}1$, $d_\varepsilon = 0{,}1$ та $\varepsilon = 0{,}01$. Затухання частоти афтершоків *in-situ* відбувається за законом Оморі, який в узагальненій формі має вигляд

$$n = k/(t+c)^p, \qquad (4.21)$$

де показник степеня p знаходиться в інтервалі від 1,0 до 1,8, а c – мала величина [377]. Згідно з результатами моделювання, залежність афтершоків від часу апроксимується кривою з коефіцієнтами $k = 1489$, $c = 0{,}03$, $p = 1{,}5 \pm 0{,}04$ (рис. 4.26, *б*).

Параметр μ, пов'язаний зі зменшенням порогу після великого землетрусу (4.20), несуттєво впливає на кумулятивний розподіл землетрусів (рис. 4.27, *а*). Однак, вплив μ на $n(t)$, що випливає з рис. 4.27, *б*, є значним. Для значень $\mu \geq 0{,}75$ ця залежність перестає бути степеневою. Для вивчення зв'язку між μ і p побудовано рис. 4.28. Слід зауважити, що для μ<0,75 параметр p дещо збільшується з 1,17 до 1,56 при збільшенні μ.

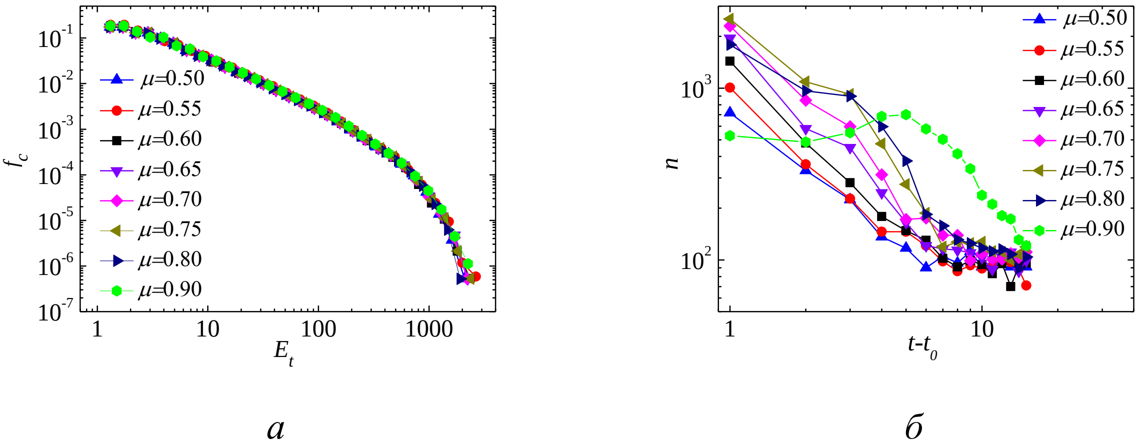


Рис. 4.27. (*а*) Кумулятивний розподіл землетрусів за енергією та (*б*) середня кількість афтершоків з моменту виникнення основного землетрусу за різних μ.

Комп'ютерне моделювання підтверджує, що вплив шумів δ_i та ϵ_i на $n(t)$ є незначним (рис. 4.29). Показники сткпкня p практично не змінюються при різних значеннях дисперсій d_δ та d_ϵ. Аналогічним чином, шуми практично не впливають на показник β. Зменшення критичної енергії до значення $E^* = 100$, надлишок якої знижує поріг E_i^{th}, практично не впливає ні на показник β, ні на p.

Що стосується афтершоків у сейсмічному процесі, то існує ще один скейлінговий закон, який називається законом продуктивності, запропонованим Утсу [377, 378]. Він описує залежність загальної кількості

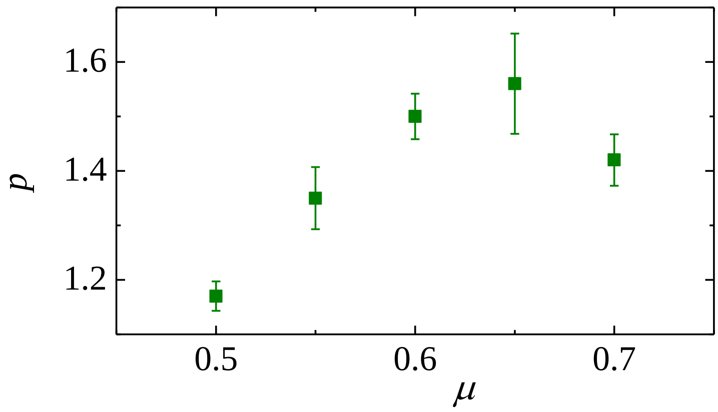


Рис. 4.28. Закон Оморі. Залежність показника p від параметра μ з довірчою імовірністю 95%.

спричинених землетрусом афтершоків, від його магнітуди m_{ms}

$$N_a = N_0 \exp[\alpha(m_{ms} - m_0)], \qquad (4.22)$$

де m_0 – мінімальна магнітуда, α – константа. Переходячи від магнітуди до енергії, можна отримати

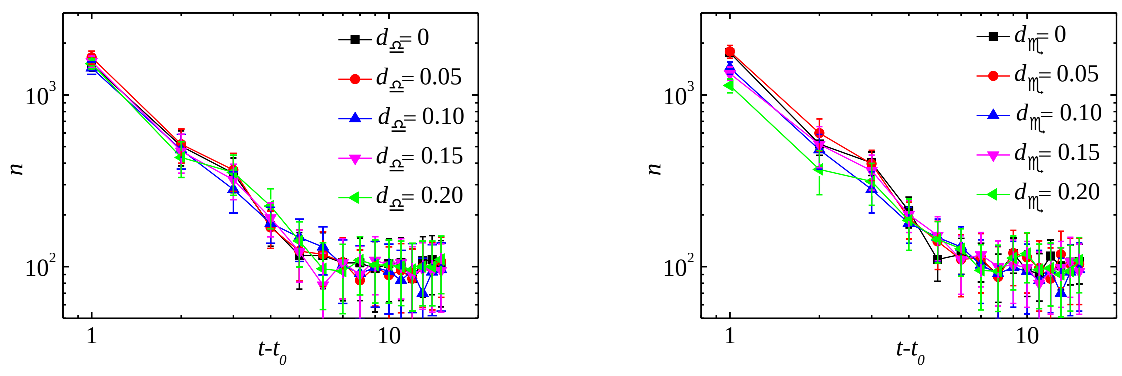
$$\log_{10} N_a = K \log_{10} E_{ms} + C, \quad K, C = const. \qquad (4.23)$$

Як випливає з рис. 4.30, отриманого при $\mu = 0{,}6$, $d_\delta = 0{,}1$ та $d_\epsilon = 0{,}1$, ця залежність практично лінійна в логарифмічних координатах з $K = 0{,}41 \pm 0{,}03$.

Інший закон про афтершоки, закон Бетта, передбачає, що різниця в магнітудах між основним землетрусом з магнітудою m_{ms} та найбільшим зафіксованим афтершоком з магнітудою $m_{as}^{\max}$

$$\Delta m = m_{ms} - m_{as}^{\max} \qquad (4.24)$$

близька до 1,2, незалежно від величини основного землетрусу [379, 380].



а *б*

Рис. 4.29. Залежність середнього значення інтенсивності афтершоків від часу з моменту виникнення основного землетрусу при різних відхиленнях (*а*) d_δ та (*б*) d_ϵ. Довірчі інтервали відповідають довірчій імовірності 95%.

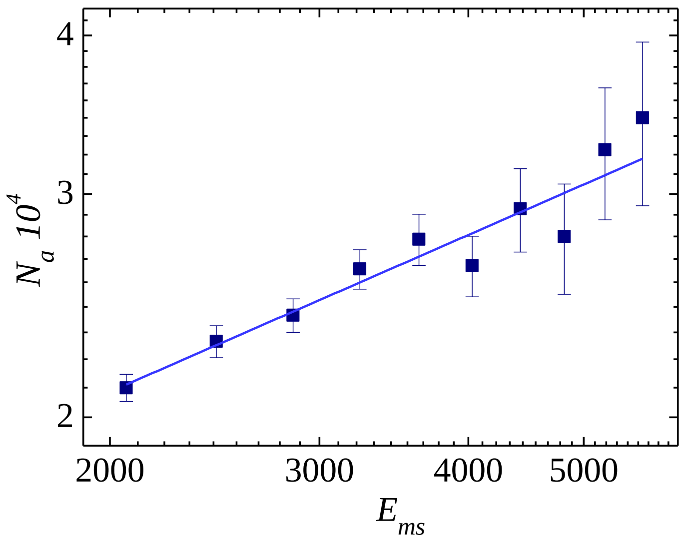


Рис. 4.30. Закон продуктивності афтершоків. Залежність загальної кількості афтершоків N_a від енергії E_{ms} основного землетрусу. Довірчі інтервали відповідають довірчій імовірності 95%.

В енергетичному представленні це співвідношення виглядає як

$$\Delta m = 1/A(\log_{10} E_{ms} - \log_{10} E_{as}^{\max}), \tag{4.25}$$

де A = 1,5. На рис. 4.31 показана залежність середнього значення відносної різниці $\langle \Delta m \rangle$ від енергії основного землетрусу E_{ms}. Відносна різниця $\langle \Delta m \rangle$ близька до постійної величини і трохи більша, ніж експериментальне значення.

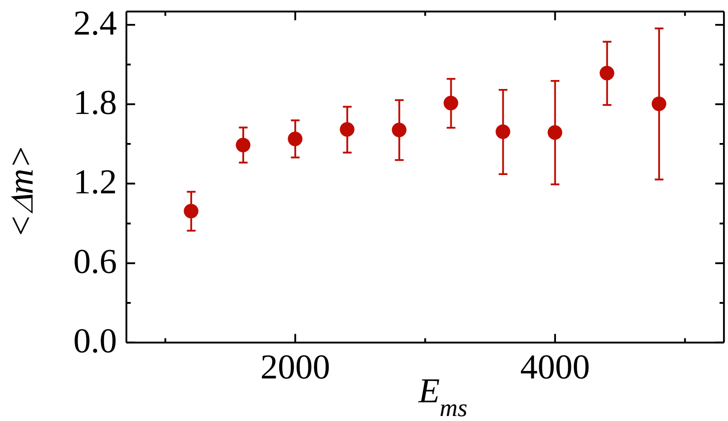


Рис. 4.31. Закон Бетта. Середнє значення відносної різниці $\langle \Delta m \rangle$ у магнітуді між основним землетрусом і його найбільшим афтершоком як функції енергії основного землетрусу E_{ms}.

Гіпоцентри та епіцентри землетрусів утворюють відповідно у просторі та на поверхні фрактальні множини з розмірностями d_f^h та d_f^e. Згідно численних досліджень, фрактальна розмірність для епіцентрів змінюється від 1,0 до 1,8 [381, 382], а гіпоцентральна фрактальна розмірність змінюється від 2,2 для поверхневих до 1,5-1,6 для глибинних землетрусів [383, 384]. У даній моделі гіпоцентри визначались як середнє значення положень центрів усіх кубів, які були задіяні у формуванні землетруса, а епіцентри – відповідно їх проекції на верхню площину куба Ω.

На рис. 4.32 показано просторовий розподіл гіпоцентрів землетрусів, з якого видно, що гіпоцентри розташовані нерівномірно, утворюючи кластери. Фрактальні розмірності d_f^h та d_f^e цих розподілів оцінюються за допомогою методу кореляційного інтегралу [15]. Кореляційний інтеграл визначається як

$$C(r) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{N} H\left(r - \left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|\right), \tag{4.26}$$

де r_i та r_j – гіпоцентри (епіцентри) i-го та j-го землетрусів, а H – функція Хевісайда. Тобто, для кореляційного інтегралу підраховуються тільки ті землетруси, відстань між якими менша від r.

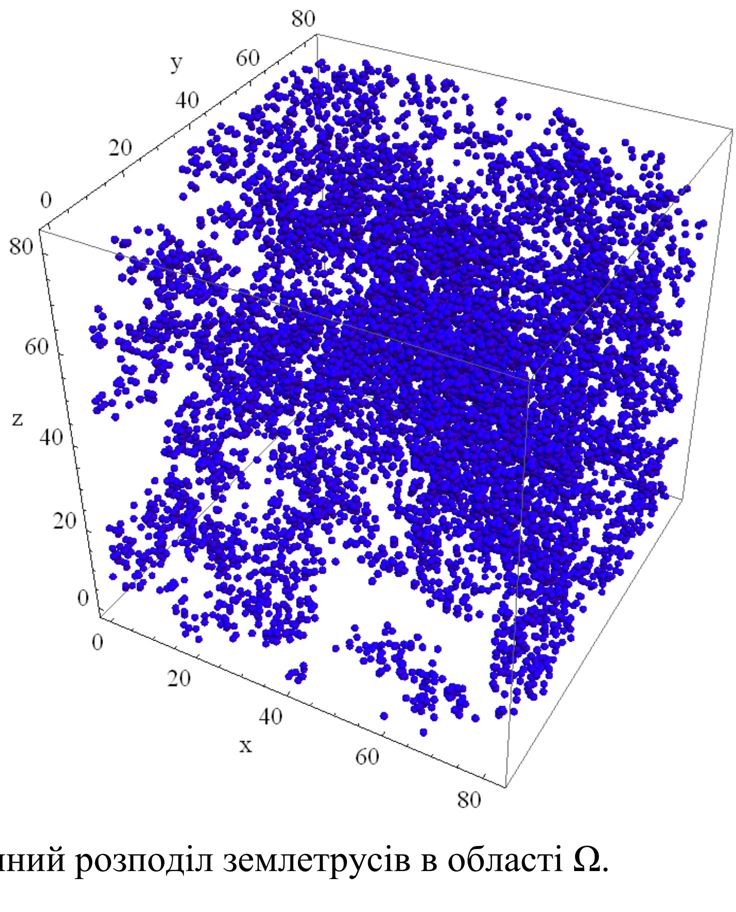


Рис. 4.32. Об’ємний розподіл землетрусів в області Ω.

Для фрактальних множин кореляційний інтеграл $C(r)$ на малих відстанях r зростає за степеневим законом

$$C(r) \propto r^{\nu}, \tag{4.27}$$

де кореляційний показник, або двоточкова кореляційна розмірність ν дуже близька до фрактальної розмірності d_f. Як правило, щоб уникнути залежності $C(r)$ від N, кількість подій N вибирається якомога більшим. Для N=1176295 землетрусів (за такої великої кількості подій кореляційний інтеграл вже не залежить від N) залежності кореляційного інтегралу від відстані для гіпоцентрів та епіцентрів у подвійних логарифмічних координатах наведено на рис. 4.33. Обчислена за цими залежностями двоточкова кореляційна розмірність для епіцентрів $\nu^e = 1{,}8$ попадає в межі експериментальних величин, а для гіпоцентрів $\nu^h = 2{,}8$ дещо перевищує фрактальні розмірності, отримані для реальних землетрусів. Це пов'язано з тим, що в моделі область має форму куба, а в природних умовах сейсмічні області видовжені вздовж розломів.

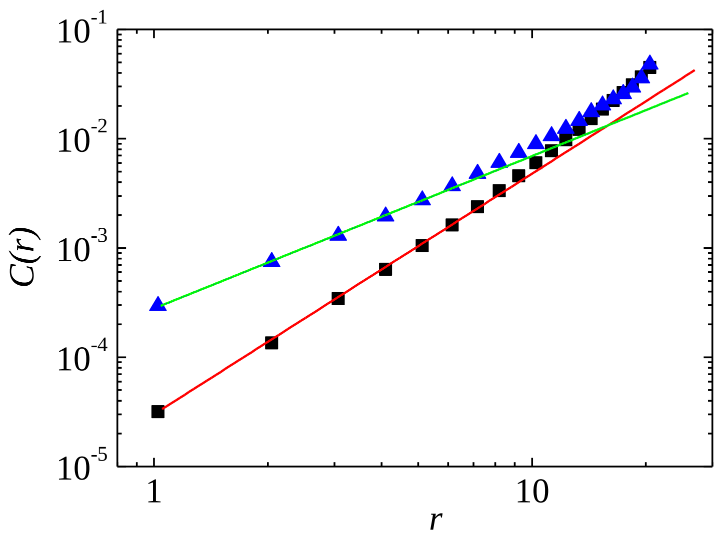


Рис. 4.33. Кореляційні інтеграли як функції відстаней між гіпоцентрами та епіцентрами землетрусів в логарифмічних координатах та відповідні апроксимації степеневими залежностями.

Існує ще один підхід до опису часових, просторових та енергетичних властивостей сейсмічних процесів, розроблений Баком та ін. [382] та Корралом [386–388], яка використовує час між землетрусами з рівною або більшою величиною, називається часом очікування або часом повторення. Цей підхід базується на існуванні уніфікованого самоподібного розподілу для часу очікування τ: $P(t) = Rf(R\tau)$, де $f(x)$ – масштабна функція, R – інтенсивність сейсмічної активності. Функція $f(x)$ дуже близька до γ-розподілу

$$f(x) \propto x^{\gamma-1}\exp(-x/\lambda) \tag{4.28}$$

з відповідними параметрами γ і λ. На рис. 4.34 показано розподіл часу очікування після знерозмірення за допомогою швидкості сейсмічної активності R. Апроксимаційна функція – γ-розподіл (4.28) з параметрами $\gamma = 0{,}51\pm0{,}02$ та $\lambda = 1{,}12\pm0{,}04$. Ці параметри дещо відрізняються, від експериментальні для землетрусів: $\gamma =$ 0,67±0,05 і $\lambda =$ 1,58±0,15 [387].

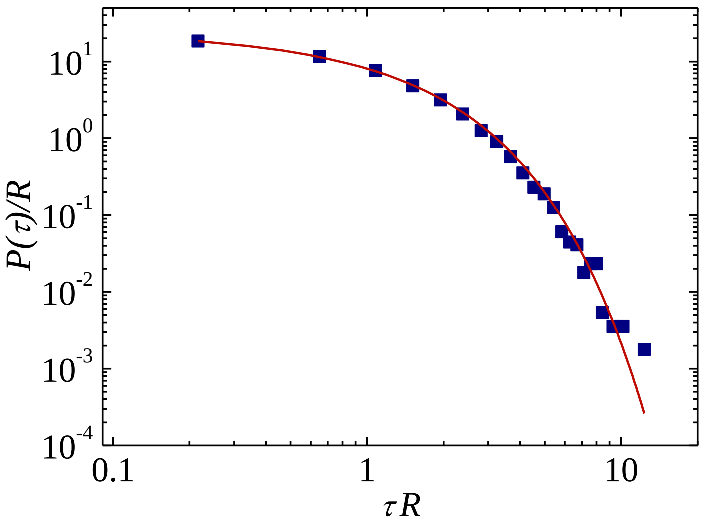


Рис. 4.34. Розподіл часу очікування, знерозміреного швидкістю сейсмічної активності, R. Апроксимаційна крива [γ-розподіл (4.28)] побудована за допомогою методу найменших квадратів.

У цій моделі повільні процеси накопичення та швидкі процеси релаксації енергії проходять в однаковій часовій шкалі. У природі, на відміну від моделі, накопичення пружної енергії триває роки чи десятиліття, а виділення триває кілька хвилин. Числові розрахунки за даною моделлю показали, що збільшення тривалості накопиченої енергії, тобто зменшення ймовірності приведення енергії в систему, призводить до збільшення параметрів γ і λ.

Отже, представлена ієрархічна модель, заснована на самоорганізованій критичності, відтворює основні закономірності сейсмічних процесів: закон Гутенберга-Ріхтера з показником ступеня $\beta = 1{,}07 \pm 0{,}02$, закон Оморі для афтершоків з коефіцієнтом затухання $p = 1{,}5 \pm 0{,}04$, наявність форшоків, фрактальні властивості просторового розподілу землетрусів з фрактальними розмірностями $d_f^h \approx 2{,}8$ та $d_f^e \approx 1{,}8$ відповідно для гіпоцентрів та епіцентрів.

Ця модель дає трохи завищене значення різниці величин між основним землетрусом і найбільшим афтершоком у порівнянні з реальними сейсмічними процесами. Розподіл часу очікування добре узгоджується з γ-розподілом, але константи менші, ніж реальні, через те, що в моделі не враховується різниця між часовими масштабами етапів накопичення та виділення енергії.

Комп’ютерне моделювання показало, що всі параметри в моделі можна розділити на дві групи: параметри, які істотно впливають на поведінку системи та параметри, які мають слабкий вплив на його поведінку. Перша група включає в себе параметри θ, γ та μ, а другий - d_δ, d_ϵ та ε. Отже, ця модель містить лише три релевантні параметри.

4.5. Висновки

1. Побудовано просту модель ієрархічного середовища: ланцюг куль однакового розміру з ієрархічними зв'язками між кулями. Проведено комп'ютерні розрахунки розповсюдження нелінійних хвиль у такому ланцюгу. Показано, що у випадку, коли зв'язки між елементами різних рівнів відрізняються суттєво, в ієрархічному середовищі може розповсюджуватись відокремлена хвиля, яка локалізовано переносить енергію.

2. Запропонована модель ієрархічного блокового середовища як система вкладених ангармонічних осциляторів. Використовуючи формалізм Гамільтона, отримана динамічна система, що описує динаміку ієрархічно пов'язаних структурних елементів. Проаналізовано систему рівнянь для моделі з трьома ієрархічними рівнями з ідентичними на кожному рівні осциляторами та умовою, що вони рухаються синхронно. Згідно з аналізом перетинів Пуанкаре, виявлено локалізовані квазіперіодичні та хаотичні траєкторії в трьохрівневій ієрархічній моделі. Крім того, дослідження кореляційних функцій показали, що спектр потужності для трирівневої моделі має локальні максимуми, що характеризують часові масштаби з сильною кореляцією. Використовуючи аналіз Фур'є компонентів рішення, досліджено розподіл енергії, що переноситься в системі по ієрархічному рівню. В результаті цих досліджень з'ясовано, що ієрархічні системи виявляють квазіперіодичні та хаотичні режими, розвиток яких залежить від параметра φ.

   Проведено також дослідження коливальних процесів у багаторівневій системі. Показано, що може існувати критичне значення φ, яке відповідає формуванню порівнянних коливань на першому та останньому ієрархічних рівнях середовища. Спектр найнижчого рівня розподіляється в широкій частотній області, домінуючі частоти можуть відрізнятися в залежності від φ.

Розглянуто періодичні режими, що виникають у трирівневій ієрархічній моделі з дисипацією, коли найвищий структурний рівень піддається дії гармонічної сили. Для вивчення цих режимів як розв'язків сильно нелінійної високорозмірної динамічної системи, вдосконалено метод особливих точок та перевірено результати за допомогою методу Гальоркіна та прямого числового розв'язку. Це дало можливість побудувати амплітудно-частотні криві, які характеризують особливості коливань у моделі. Зокрема, було виявлено зміщення резонансних частот в залежності від міри нелінійності. Також спостерігаються деформації скелетних кривих при зміні міри нелінійності та зміні характеру монотонності при $\beta = 1$ (лінійна система).

Аналізуючи амплітудно-частотні криві, було показано, що ієрархічна структура може вести себе як підсилювач сигналу прикладеного до найвищого рівня ієрархії. Це дозволяє зрозуміти механізм накопичення та перерозподілу пружної енергії у складних геофізичних системах при сейсмічних подіях. Представлені дослідження також важливі для сейсмічних досліджень в областях зі складною структурою та для забезпечення сейсмічної безпеки складних промислових та цивільних об'єктів.

3. Розроблена модель землетрусів, яка базується на двох фундаментальних принципах: ієрархічній структурі сейсмоактивних областей та концепції самоорганізованої критичності. Модель відтворює основні емпіричні властивості сейсмічних процесів: скейлінгове співвідношення частота–енергія (закон Гутенберга-Ріхтера), узагальнений закон Оморі для часового згасання афтершоків, закон про продуктивність афтершоків, закон Бетта про середнє

значення відносної різниці у магнітуді між основним землетрусом і його найбільшим афтершоком, фрактальні розподіли гіпоцентрів (епіцентрів) зі степеневими залежностями кількості подій від відстані між гіпоцентрами (епіцентрами) і, нарешті, γ-розподіл для часу очікування. У моделі порогова енергія залежить від розміру блоку та розподіляється відповідно до закону Гаусса. Після сильних землетрусів вони перерозподіляються при зменшенні середніх значень. Зміна енергії порогу призводить до запуску серії афтершоків.

Перевага цієї моделі полягає в тому, що немає необхідності вводити допоміжну неоднорідність для отримання просторового фрактального розподілу землетрусів. Модель враховує вже природну ієрархічну структуру сейсмічної зони. Більш того, опис поведінки сейсмічної зони після сильного землетрусу фізично обґрунтовується. Слід також зазначити, що кілька питань залишаються поза обговоренням. Це стосується того, що природне середовище є ієрархічною системою вкладених блоків, а не системою випадково розташованих блоків. Крім того, анізотропія сейсмічної зони, пов’язана з існуванням розломів та морфологічною неоднорідністю, не враховується. Незважаючи на ці спрощені припущення, модель цілком правильно відтворює основні властивості сейсмічних процесів.

РОЗДІЛ 5.

ЕКПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗСУВНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ГРАНУЛЬОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА

Згідно концепції, запропонованій Садовським зі співавторами та детально викладеної у розділі 1, геосередовище – це дискретна ієрархічна система, поведінка якої є характерною для поведінки складних систем, тобто в таких системах мають місце дальнодіючі кореляції у просторі і часі, існує можливість самоорганізації, утворення динамічних структур, тощо. Для дослідження таких систем необхідно використовувати статистичні методи, оскільки поведінка подібних систем є стохастичною.

У даному розділі експериментально досліджується динаміка модельного гранульованого середовища, утвореного масивом структурних елементів у вигляді кубів, з використанням статистичної обробки отриманих експериментальних даних. Розглядається неієрархічна система, проте навіть у такій постановці, дане середовище веде себе подібно до складної системи з характерними дальнодіючими кореляціями. Виявляється, що поведінка такого гранульованого середовища при зсувному навантаженні дуже подібна до поведінки геосередовища в сейсмоактивній зоні. Тому тут також досліджується можливість впливу на динаміку гранульованого середовища, а отже, можливість впливу на сейсмоактивну область і, відповідно, на сейсмічний процес.

5.1. Експериментальний стенд для дослідження зсувного деформування гранульованого масиву, утвореного гранулами кубічної форми

Дослідження нерівноважних процесів у гранульованих середовищах при зсувному деформуванні проводились для випадків наявності зовнішніх збурень, так і їх відсутності. Експериментальний комплекс включає стенд для дослідження деформування гранульованих середовищ при зсувних навантаженнях, джерело малих збурень та комплекс вимірювальної апаратури [47]. Зовнішній вигляд експериментального стенду показано на рис. 5.1.

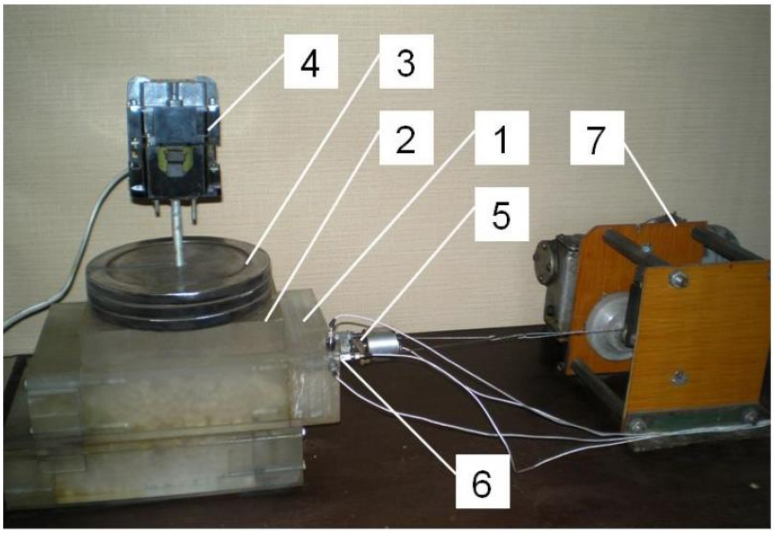


Рис. 5.1. Зовнішній вигляд експериментального стенду.

Експериментальний стенд складається з пристрою для деформування гранульованого середовища, який являє собою ємність (1) (рис.5.1), що складається із двох частин: верхньої рухомої та нижньої нерухомої, плити для створення навантаження на гранульований масив (2), на якій розташовуються вантажі (3), механізму для створення імпульсних збурень (4), датчика сили (5), акселерометрів (6), пристрою для створення тяги (7). Ємність виготовлена з органічного скла. Нижня частина має внутрішні розміри $0{,}2\times0{,}3\times0{,}07$ м та жорстко встановлена на масивному столі. Товщина бокових стінок становить 0,025 м, а передньої та задньої – 0,05 м. Стінки скріплені між собою клеєм на основі дихлоретану та стягнуті болтами, що надає їй велику міцність та жорсткість. Верхня частина має такі ж розміри і також виготовлена із оргскла; її встановлено на нижню, з попередньо відшліфованими поверхнями контакту. На нижній частині прикріплені направляючі пластини (2) (рис. 5.2) для забезпечення направленого ковзання верхньої частини. В свою чергу на верхній частині встановлено обмежувачі руху у вертикальному напрямі.

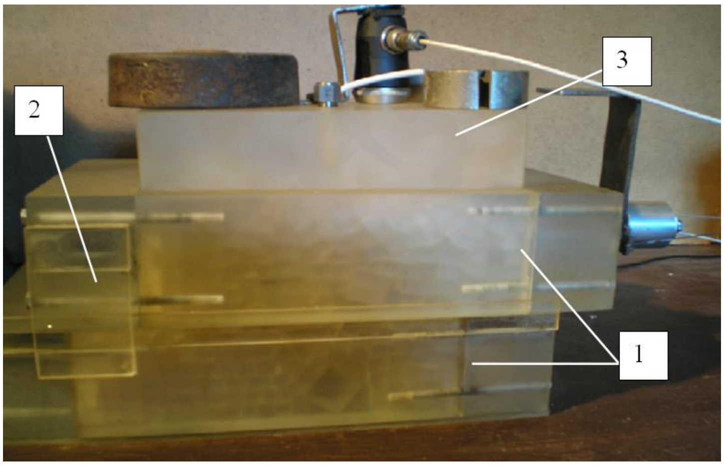
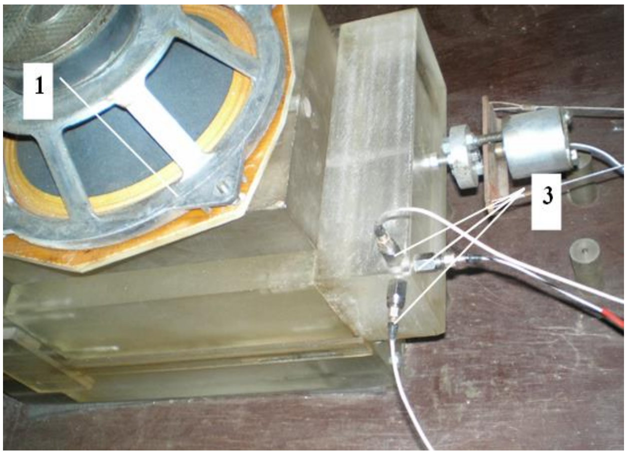


Рис. 5.2. Пристрій для деформування гранульованого середовища.

Плита (3) (рис. 5.2) виготовлена із листового оргскла товщиною 0,05 м. У випадку проведення досліджень динаміки гранульованого середовища при дії на нього малих збурень, на верхній площині плити по центру встановлюється або механізм для створення імпульсних збурень (1) (рис. 5.3, *а*), або акустичний динамік (1) (рис. 5.3, *б*).

а

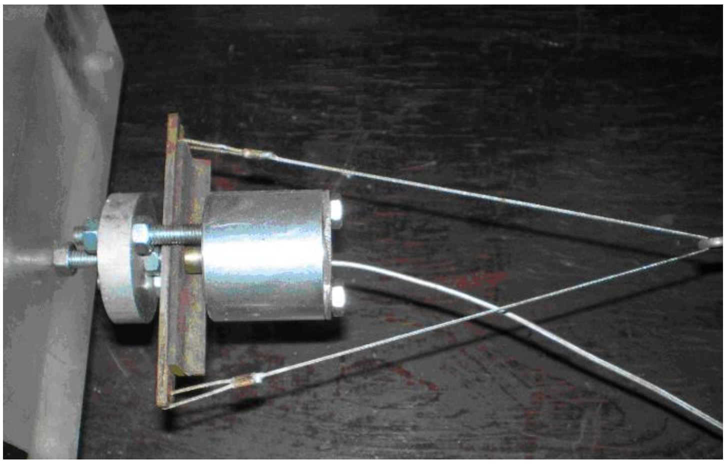


б

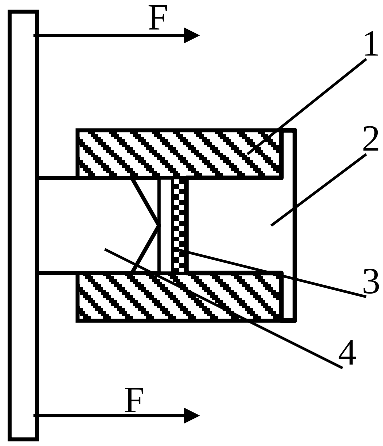
Рис. 5.3. (*а*) Джерело збурень (1), гирі для збільшення навантаження (2); (*б*) акселерометри (3).

Гирі, що розташовуються на поверхні плити у якості вантажів (2) (рис. 5.3, *а*), дають змогу змінювати навантаження на гранульований масив всередині ємності. Акселерометри (3) (рис. 5.3, *б*), вмонтовані в кут верхньої частини ємності, вимірюють прискорення у трьох ортогональних напрямках.

На передній стінці верхньої частини ємності встановлений датчик сили, який з допомогою тросу з’єднаний з пристроєм для створення тяги. Зовнішній вигляд та схема датчика показані на рис. 5.4.



а



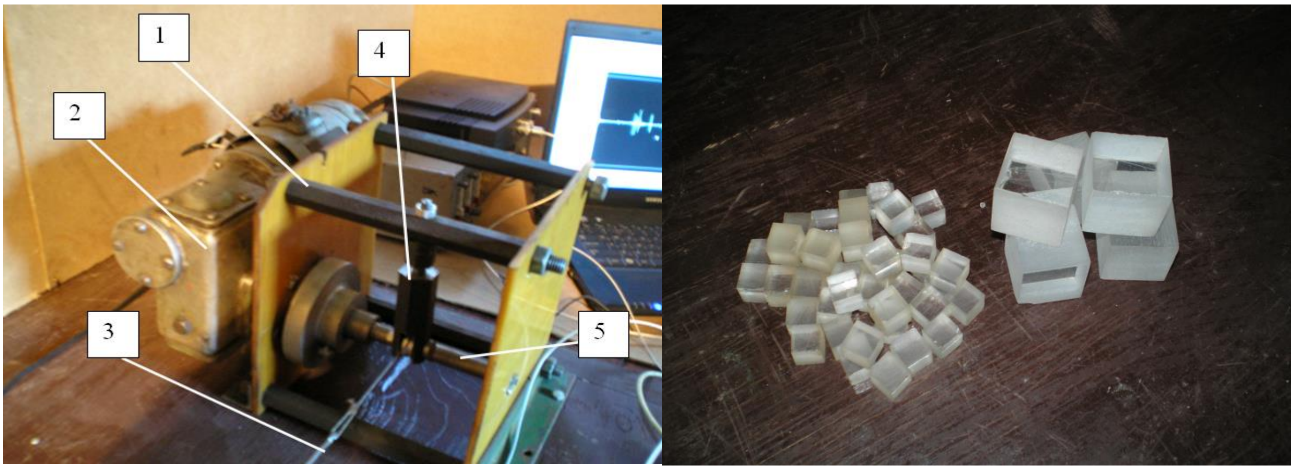
б

Рис. 5.4. Датчик сили: (*а*) зовнішній вигляд, (*б*) схема датчика.

Корпус датчика (1) (рис. 5.4, *б*) виготовлений із дюралюмінію. З одного боку в нього вмонтований датчик тиску із чутливим елементом із титанату барію (3). З іншого боку через металеву прокладку на чутливий елемент тисне поршень (4), з’єднаний з пластиною. До пластини закріплений трос, що з’єднується з пристроєм для створення тяги, зовнішній вигляд якого показано на рис. 5.5, *а*.

Пристрій для створення тяги включає в себе шасі (1) (рис. 5.5, *а*), на якому закріплений двигун з редуктором (2), зв’язаний з валом для намотки тросу (5). Один кінець тросу (3) прикріплений до валу, а інший – до датчика сили. Редуктор забезпечує зниження обертів двигуна до 2 об/хв. Виходячи з цього, діаметр валу вибраний таким, що на нього за хвилину намотується

0,1 м тросу і тим самим зміщує з'єднану з ним верхню частину ємності на 0,1 м. Схема керування призначена для забезпечення включення, виключення та реверсу двигуна пристрою.



а *б*

Рис. 5.5. (*а*) Пристрій для створення тяги; (*б*) елементи гранульованого середовища.

Елементи гранульованого середовища кубічної форми (рис. 5.5, *б*) виготовлені із оргскла. Для проведення досліджень було виготовлено всього 3000 елементів кубічної форми з розміром ребра 10 мм та 90 – з розміром 25 мм.

Як точкове джерело збурень, використовується електромагнітний пускач, розміщений на металевій пластині, що жорстко зв'язана з металевим стержнем. Пристрій являє собою електромагніт з двох металевих серцевин Ш-подібної форми, з розміщеним всередині соленоїдом. При подачі імпульсу струму на обмотку соленоїда сердечники різко притягуються один до одного, створюючи при цьому удар, який передається на металевий стержень. Таким чином, на середину плити діє точкове джерело збурень.

В якості джерела періодичних збурень з частотами 50–1000 Гц використовується низькочастотний акустичний динамік потужністю 10 Вт. Крім періодичних збурень досліджувалась реакція гранульованої системи при дії неперіодичних збурень, а саме, збурень, які діють на систему коли сила тяги перевищує певне порогове значення F^*. Для цього був розроблений та виготовлений блок управління, який вмикав джерело збурень в моменти, коли виконувалася умова $F \geq F^*$, де F – сила, яку реєструє датчик сили. Принцип дії блоку управління пояснює схема, що зображена на рис. 5.6. Сигнал з датчика сили ДС поступає на один із входів компаратора К (схеми порівняння), а на інший – зі схеми формування напруги ФН. Формувач напруги являє собою регульоване джерело постійної напруги. Сигнал з компаратора і одночасно з генератора поступає на транзисторний ключ ТК. У випадку, якщо в масиві гранул з'являються значні напруження, зростає електрична напруга на датчику сили. Коли вона досягає значення не меншого ніж на формувачі напруги, на виході компаратора з'являється сигнал, який підключає генератор імпульсів через транзисторний комутатор до реле Р, яке в свою чергу вмикає джерело малих збурень ДМЗ. При зниженні напружень в масиві схема автоматично переходить у початковий стан.

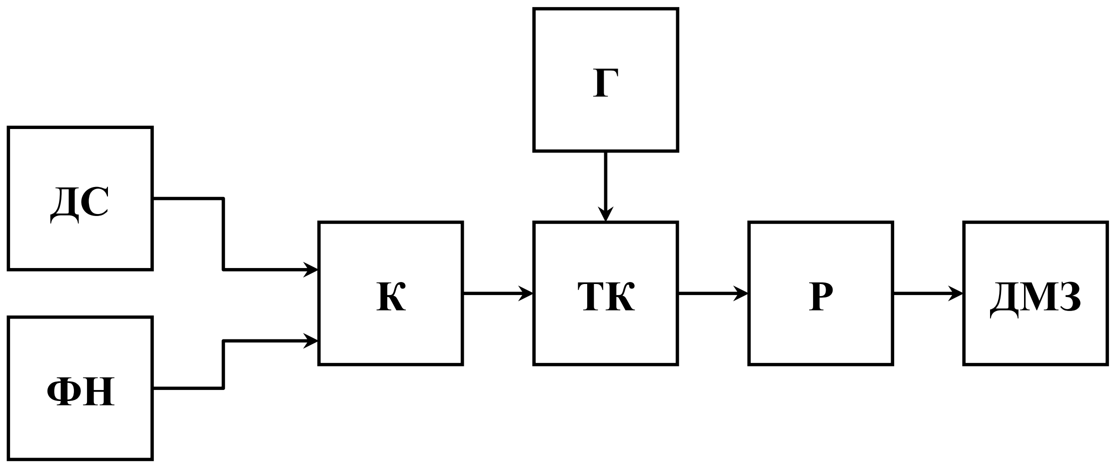


Рис. 5.6. Структурна схема блоку управління джерелом малих збурень: ДС – датчик сили, ФН – формувач напруги, К – компаратор, ТК – транзисторний ключ, Р – реле, ДМЗ – джерело малих збурень, Г - генератор.

Для проведення досліджень було підготовлено комплекс вимірювальної апаратури (рис. 5.7), який складається із системи датчиків, підсилювачів заряду, реєстратора довгоплинних процесів з комп’ютером, генератора сигналів, блоку живлення та схеми керування генератором збурень.

Для дослідження масових швидкостей хвиль, що генеруються в гранульованому середовищі при структурних змінах, які відбувались при його деформуванні, використовувались п’єзоелектричні акселерометри Т-500. Згідно з паспортом датчиків, діапазон прискорень в прямому і зворотному напрямі становив від нуля до $5 \cdot 10^3$ м/с^2. Високі значення коефіцієнта перетворення заряду дозволяють проводити вимірювання на низькій чутливості підсилювача та осцилографа, що знижує вплив власного шуму приладів. Високе значення електричного опору ізоляції, яке становить не менш ніж $2 \cdot 10^{14}$ Ом, дозволяє його використання в комплексі зі стандартним підсилювачем заряду “Нейва 2К”. Реєстрація сигналів здійснюється зовнішнім аналого-числовий перетворювачем L-Card E14-440 (рис.6.5*б*), який дозволяє за хвилину апроксимувати експериментальну криву $2{,}4 \cdot 10^7$ точками при використанні його в одноканальному режимі (частота дискретизації – 400 кГц).

а *б*

Рис. 5.7. Вимірювальна апаратура: *а*) система управління, *б*) аналого-числовий перетворювач L-Card E14-440.

Для повного відтворення процесів структурних змін в гранульованому середовищі при зсувному його навантаженні достатньо встановити частоту дискретизації – 100 кГц, що відповідає апроксимації сигналу $6 \cdot 10^6$ точками за хвилину.

Дослідження нерівноважних процесів деформування гранульованих середовищ проводилось в наступній послідовності. Верхню і нижню частини ємності для гранульованого середовища суміщали і довільно засипали в неї необхідну кількість елементів. Далі зверху встановлювалась плита з необхідною вагою P. Датчики під’єднували до підсилювачів, включали апаратуру та виставляли при необхідності частоту збурень і включали запуск генератора збурень, після чого включали тяговий пристрій.

Запис сигналів проводився протягом однієї хвилини. За цей час верхня частина ємності рівномірно зміщувалась відносно нижньої на 0,1 м, після чого установку зупиняли. Результати вимірювань зберігалися на комп’ютері у цифровому форматі.

5.2. Результати вимірювань реакції гранульованого середовища на зсувне деформування

Найперше була проведена серія експериментів для дослідження впливу зовнішнього навантаження на зсувне деформування гранульованого середовища. За допомогою датчика сили (рис. 5.4) реєструвався відгук середовища на зміщення верхньої ємності пристрою для зсувного деформування (рис. 5.2). Середовище сформоване із масиву 3000 кубів однакового розміру $a = 10$ мм. На рис. 5.8 наведено часові залежності сили $F(t)$, зареєстрованої даним датчиком. Аналіз цих залежностей вказує на тенденцію до збільшення сили реакції F при збільшенні навантаження P на верхню плиту. На рис.5.9 наведено спектри даних залежностей. Видно, що всі спектри подібні та близькі до степеневих залежностей з однаковими показниками степеня. Це вказує на подібність процесів при різних навантаженнях, а також на масштабну інваріантність процесу зсувного деформування.

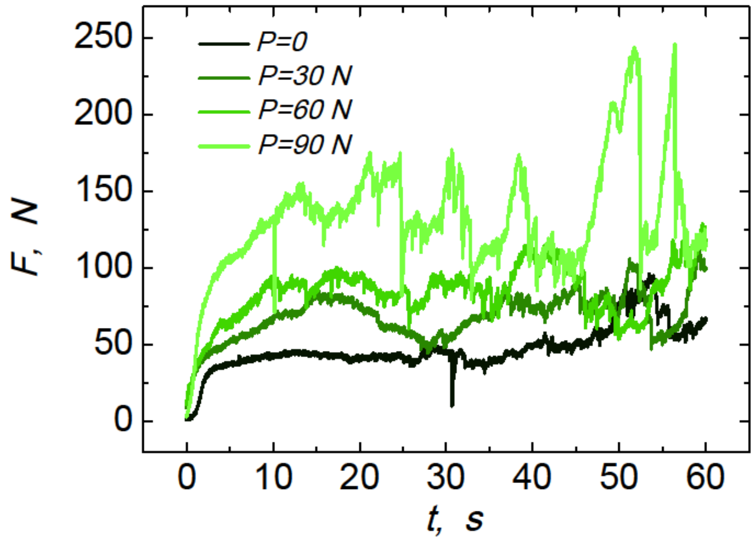


Рис. 5.8. Часові залежності сили F, що діє на датчик сили (рис. 5.4) при зсуві верхньої ємності, для різних навантажень: *а*) $P=0$, *б*) $P=30$ Н, *в*) $P=60$ Н, *г*) $P=90$ Н.

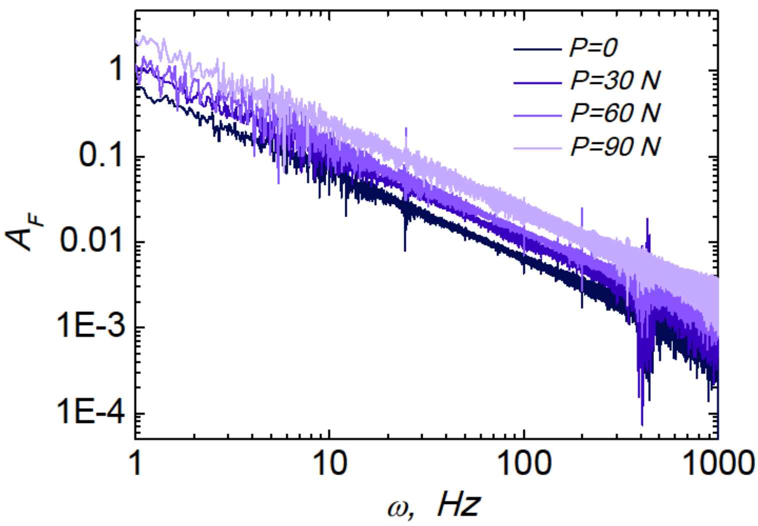


Рис. 5.9. Спектри часових залежностей сили $F(t)$, наведених на рис 3.7 для різних навантажень: *а*) $P=0$, *б*) $P=30$ Н, *в*) $P=60$ Н, *г*) $P=120$ Н.

В процесі деформування гранульованого середовища проводилися вимірювання трьох компонент прискорення в акустичних хвилях, що генеруються гранульованим середовищем в процесі переупаковки гранул.

На рис. 5.10 показано частину сигналу $a_y(t)$ в інтервалі $t \in [49{,}78;\ 49{,}80]$с, зареєстрованого датчиком прискорення у напрямку руху верхньої частини пристрою. Цей сигнал є послідовністю збурень, які генерує гранульована система. Кожна компонента $a_q, q = x, y, z$ була проінтегрована, з тим, щоб отримати часові залежності компонент швидкостей $v_q(t)$, а потім обчислювались величини

$$\hat{e}_i = \frac{1}{(t_i^e - t_i^b)} \int_{t_i^b}^{t_i^e} \sum_{k=1}^{3} v_k^2(t)\, dt, \tag{5.1}$$

які є пропорційними енергії i-го збурення, де t_i^b та t_i^e - початок та кінець i-го збурення. В результаті була отримана послідовність $e_i = \hat{e}_i / \max e_i$, яку можна розглядати як послідовність енергії акустичних збурень, віднормованої на максимальну величину. На рис. 5.11, *а* наведено таку послідовність для експерименту з навантаженням на кришку $P = 120$ Н. Дану послідовність можна дослідити на виконання законів, які мають місце для сейсмічного процесу.

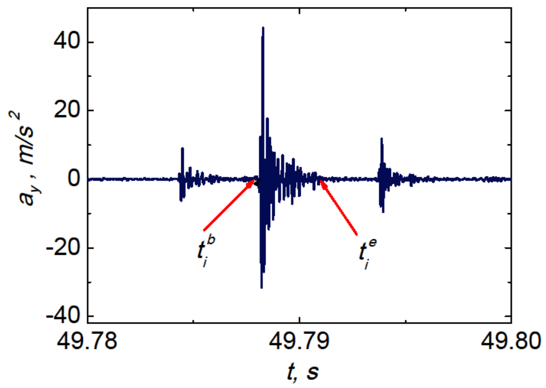
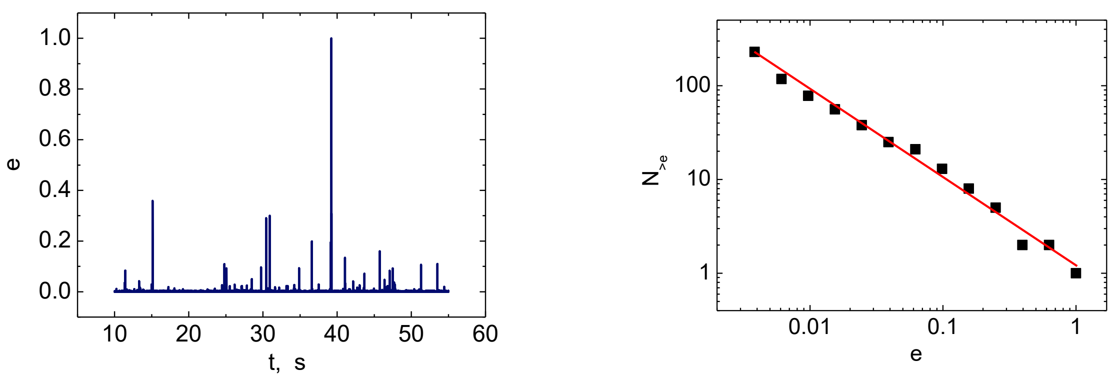


Рис. 5.10. Часова залежність компоненти прискорення a_y в інтервалі $t \in [49{,}78;\ 49{,}80]$с. Стрілками показано початок і кінець збурення.

Що стосується розподілу акустичних збурень за енергією, то він має степеневий характер, як у законі Гутенберга-Ріхтера (рис. 5.10). На рисунку наведено кумулятивний розподіл з відповідною апроксимацією степеневою залежністю

$$N_{>e} = Ce^{-\beta}, \qquad (5.2)$$

де $\beta = 0{,}93 \pm 0{,}03$, $C = -4.88 \pm 0{,}04$. Показник β попадає в діапазон, характерний для сейсмічних процесів 0,80-1,05 [108].



а *б*

Рис. 5.11. Послідовності енергії акустичних збурень в залежності від часу (*а*). Розподіл збурень за енергією (*б*).

Для великих збурень з енергією більше $e = 0{,}02$ існують форшоки і афтершоки (рис. 5.12, *а*). Афтершоки затухають за степеневим законом, як це має місце для афтершоків великих землетрусів (закон Оморі). Дана залежність афтершоків від часу апроксимується кривою

$$n = k/(t+c)^{p}, \qquad (5.3)$$

з коефіцієнтами $k = 0{,}13 \pm 0{,}03$, $c = 0{,}01$, $p = 0{,}91 \pm 0{,}06$ (рис. 5.13, *б*). Наявність форшоків та афтершоків свідчить про існування часових кореляцій

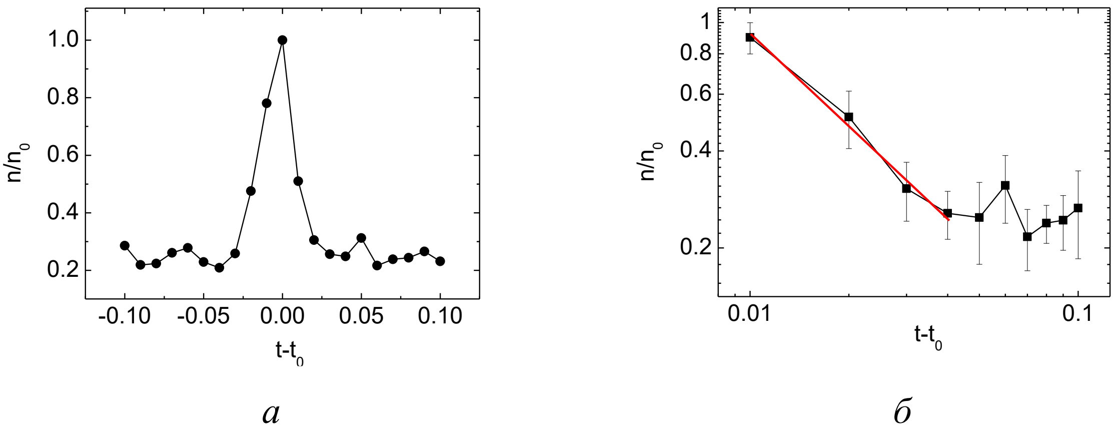


Рис. 5.12. Залежність середньої кількості акустичних збурень від часу до основного землетрусу (*а*); ступенева апроксимація афтершоків (*б*), довірчі інтервали відповідають довірчій імовірності 95%.

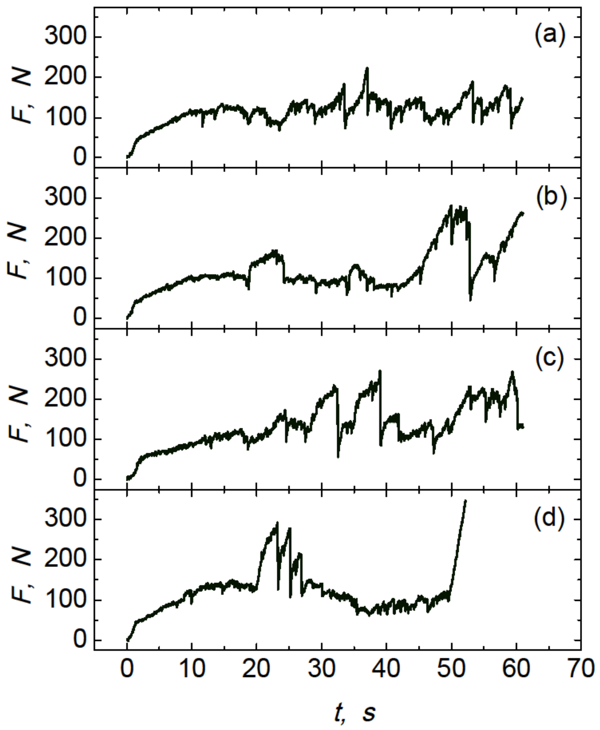


Рис. 5.13. Часові залежності сили натягу при зсувному деформуванні масиву із кубічних гранул при навантаженні на плиту ваги $P = 60$ Н: *а* – однорідне середовище із елементами з ребром 10 мм, суміші елементів з ребрами 10 мм та 25 мм у пропорціях: *б* – 80%×20% , *в* – 70%×30%, *г* –50%×50%.

у послідовності акустичних збурень.

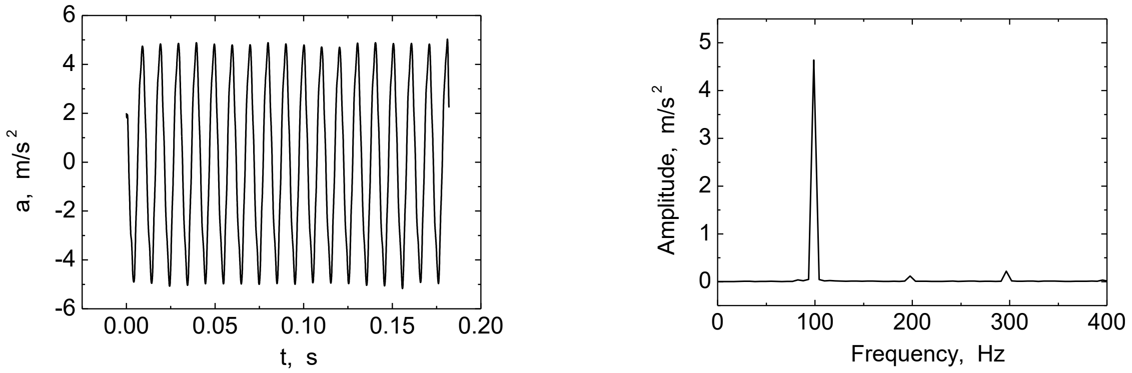
Наступна серія експериментів стосується вивчення впливу неоднорідності гранульованого середовища на процес його деформування. Для цього було проведено серію експериментів з сумішшю кубічних елементів двох розмірів: $a = 10$ мм та $a = 25$ мм. Використовувалися різні співвідношення кількості елементів одного та іншого розмірів. Зсувне деформування здійснювалося при навантаженні $P = 60$ Н.

Часові залежності сили натягу (рис. 5.13) демонструють, що якісно процес деформування як монодисперного, так і полідисперсного середовища суттєво не відрізняється, проте, при збільшенні в масиві кількості кубічних елементів з ребром $a = 25$ мм напруження зростають. У випадку об’ємного співвідношення 50%×50% мало місце таке значне зростання сили натягу, яке призвело до руйнування тросу (рис. 5.15, *г*).

5.3. Вплив малих збурень на зсувне деформування

Згідно досліджень, наведених вище, поведінці гранульованого середовища в процесі зсувного деформування притаманна складна стохастична реакція на зсувне навантаження. Цей відгук системи підкорюється статистичним закономірностям, характерним для сейсмічного процесу. Виникає питання чи можливо за допомогою малих збурень вносити зміну у поведінку такої складної системи? І це є важливим для можливості впливу на природні сейсмічні процеси, процеси лавиноутворення, зсув ґрунту, тощо.

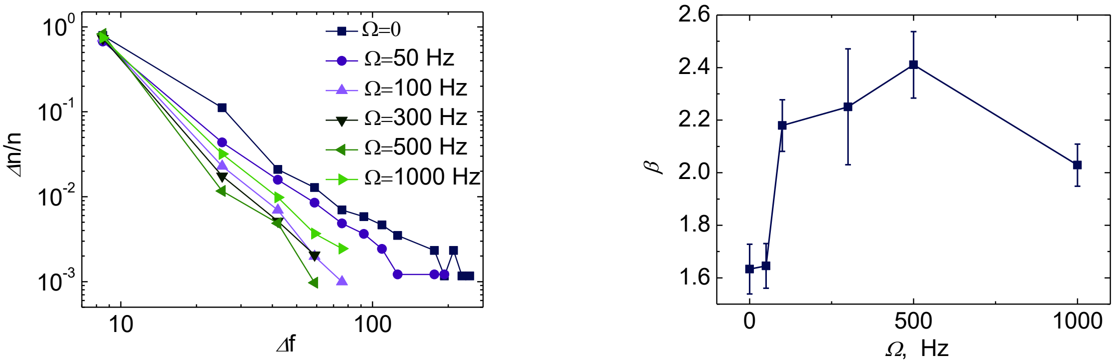
Як і в попередньому пункті, розглядається процес зсувного деформування гранульованого масиву, утвореного 3000 елементами кубічної форми з розміром ребра 10 мм. Зсув здійснюється за допомогою пристрою, описаного в пункті 5.1. За допомогою акустичного динаміка (рис. 5.3, *б*), розташованого на поверхні кришки, в середовище посилаються періодичні збурення в діапазоні частот 50-1000 Гц. Для того, щоб перевірити, який сигнал входить в середовище, на нижній поверхні кришки був вмонтований датчик прискорення. На рис. 5.14 показано прискорення, які вимірює даний датчик, та спектр зареєстрованого сигналу при частоті вхідного періодичного сигналу 100 Гц. Видно, що в процесі проходження сигналу через кришку, він майже не спотворюється. Спектральна амплітуда інших гармонік незначна. Подібні спектри мають сигнали, отримані для вхідних періодичних збурень з частотами $\Omega = 50$, 300, 500, 1000 Гц.



а *б*

Рис. 5.14. Сигнал, що фіксується датчиком прискорення на дні кришки (*а*) та його спектр (*б*).

В процесі деформування датчиком сили вимірювалась сила тяги. На рис. 5.15 наведено часові залежності сил тяги при дії малих збурень з частотами 100 та 1000 Гц. Для аналізу впливу малих збурень обчислювались стрибки сили як різниця між сусідніми локальними максимумами та локальними мінімумами. Дані стрибки сили пов’язані з реакцією гранульованого середовища на зсувну дію. Побудовані розподіли кількості стрибків за їх інтенсивністю для п’яти частот періодичних малих збурень показано на рис. 5.15, *а*. Ці розподіли, як випливає з рисунка, є степеневими функціями та залежать від частоти збурень. Залежність показника степеня β від частоти наведено на рис. 5.15, *б*. Виявляється, що при частоті $\Omega = 500$ Гц дана залежність має максимум. Тобто при даній частоті кількість великих збурень є найменшою та й максимальні значення стрибків є найменшими серед всіх частот, а отже, деформаційний процес є найбільш плавним і "м'яким", без різких стрибків сили.



а *б*

Рис. 5.15. Розподіли за стрибками сил при різних значеннях частот збурень Ω (*а*), залежність показника степеня β в степеневій апроксимації розподілів від частоти збурення (*б*).

Наступна серія експериментів із впливом зовнішніх збурень на зсувний процес виконувалася з використанням пристрою з оберненим зв'язком, описаним у пункті 5.1, коли в середовище посилався сигнал при досягненні силою тяги деякого порогового значення F^*. Гранульований масив складався із 3000 елементів кубічної форми з розміром ребра 10 мм. В усіх експериментах швидкість деформування була однаковою і становила 0,1 м/хв. На рис. 5.16 показано один із імпульсів сили, які генерує пристрій. Амплітуда імпульсу складає $f^m = 44$ Н, тривалість $\tau \approx 1$ мс.

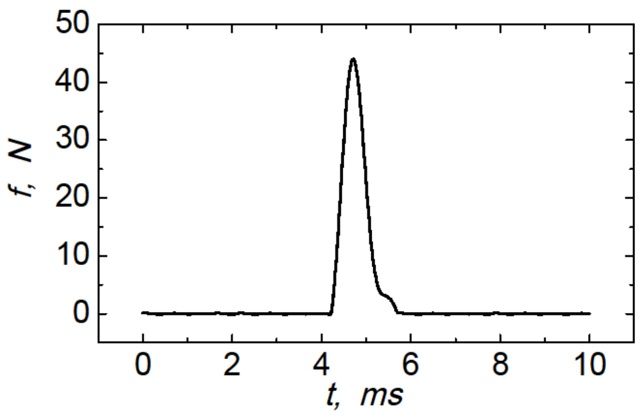


Рис. 5.16. Профіль імпульсу, який генерує пристрій.

Було проведено ряд експериментів для трьох порогових значень $F^* = 200$, 150, 125 Н. В усіх експериментах середовище навантажувалось вантажем вагою $P = 60$ Н. Часові залежності сили тяги для цих трьох порогових величин наведено на рис. 5.17, де також наведено часову залежність без зовнішньої дії. З рисунка випливає, що діючи на середовище малими збуреннями, можна уникнути великих натягів. Слід зауважити, що зменшення сили натягу до величини меншої за порогове значення часто досягається не за одним ударом. Це добре демонструють рисунки 5.17 *б*, *в*, де багатократно посилались збурення в середовище. При цьому перевищення сили натягу порогових значень F^* було незначним.

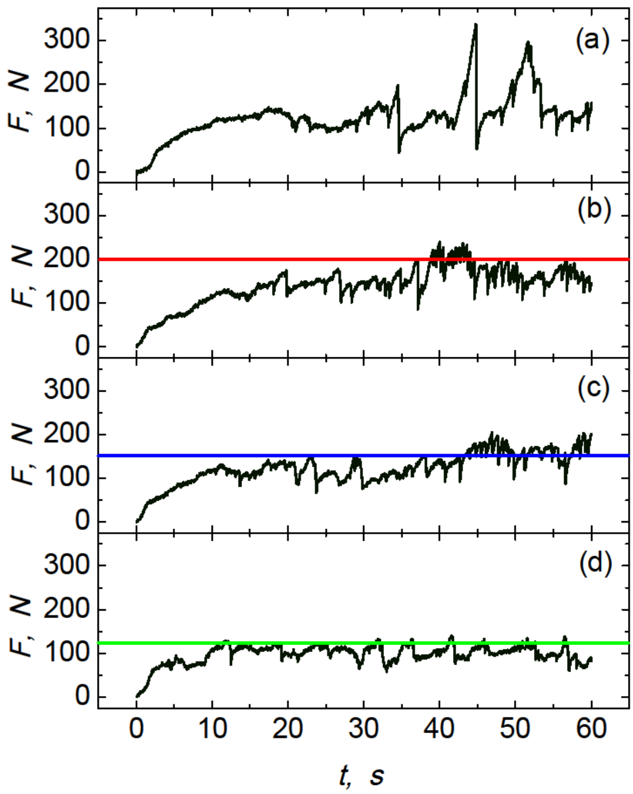


Рис. 5.13. Часові залежності сили натягу $F(t)$ при зсувному деформуванні масиву із кубічних елементів при навантаженні на плиту $P = 60$ Н, збуренні з амплітудою $f^m = 44$ Н та порогових значеннях: $F^* =$ 200 Н (*б*), $F^* = 150$ Н (*в*), $F^* = 125$ Н (*г*), без зовнішньої дії (*а*).

Генератор сигналів на схемі рис. 5.6 був ввімкнений на частоту 1 Гц. Це означає, що у випадку, якщо збурення недостатньо для розвантаження середовища, то через 1 секунду, генерується наступне збурення. Отже, експерименти продемонстрували, що при такому механізмі впливу деформування середовища є більш гладким і відбувається при менших напруженнях.

5.4. Висновки

1. Розроблена методика експериментальних досліджень зсувного деформування гранульованого середовища, сформованого з гранул кубічної форми, в тому числі при дії на середовище зовнішніх періодичних та неперіодичних збурень.
2. Проведені експерименти зсувного деформування при різних навантаженнях на гранульоване середовища вказують на подібність цих процесів, так само як деформування суміші структурних елементів двох розмірів при різних пропорціях цих елементів.
3. Отримані в експериментах записи акустичних збурень, які випромінює гранульоване середовище в процесі зсувного деформування, дало можливість побудувати розподіли кількості збурень від енергії (закон Гутенберга-Ріхтера). Виявилось, що показник степеня знаходиться в межах, характерних для землетрусів. Крім того, для великих акустичних збурень спостерігаються форшоки і афтершоки. Афтершоки затухають за степеневим законом, законом Оморі, як для сейсмічного процесу, з показником близьким до 1.
4. Опромінювання гранульованого середовища періодичними хвилями з різними частотами в процесі його деформування, показало, що слабкі збурення впливають на цей процес і максимальний ефект спостерігається при частоті 500 Гц.

5. Експерименти продемонстрували, що при дії збурень на гранульоване середовище при досягненні критичного значення сили натягу, деформування середовища відбувається за менших напружень, тобто воно є більш гладким і чим менше порогове значення сили тим гладкішим є процес деформування.

РОЗДІЛ 6.

КОМП’ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗСУВНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ГРАНУЛЬОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА

Експерименти з дослідження зсувного деформування гранульованого середовища показали, що статистичні властивості процесу деформування подібні до статистичних властивостей природного сейсмічного процесу. Комп’ютерне моделювання дає можливість більш детально розібратися в особливостях зсувного деформування, а отже у природних процесах генерування землетрусів. У цьому розділі приведені результати числового моделювання зсувного деформування гранульованого масиву в умовах, подібних до експериментальних.

На даний момент немає жодної універсальної математичної моделі, що повністю описує динамічні процеси в гранульованих середовищах. Основною перешкодою є наявність довгохвильових кореляцій у таких складних системах. У цьому випадку для моделювання динаміки гранульованих середовищ доцільно використовувати метод дискретних елементів [227]. Відома перевага цього методу полягає в можливості докладно описати динаміку кожного елемента структури. Однак варто зазначити, що цей числовий метод є досить затратним, а отже він обмежує розрахунки гранульованих систем відносно невеликою кількістю часток. Як правило, МДЕ застосовується до гранульованих систем, що складаються зі сферичних елементів або їх конгломератів. Такий вибір форми елементів спрощує опис їх руху та взаємодії, але в той же час втрачається можливість моделювати багато важливих властивостей кінематики гранульованої системи. Зокрема, Жао та співавт. [269] показали, що ребристість та форма гранул суттєво впливають на деформівні властивості гранульованого масиву при зсувному деформуванні. Чутливість властивостей деформування гранульованого середовища до нерегулярності форми гранул також переконливо продемонстрована авторами робіт [249, 282].

6.1. Побудова числової моделі для розрахунку динаміки масиву кубічних елементів

В роботі моделюється гранульоване середовище, яке складаються з багатогранних гранул [45, 58, 59]. Розглядається найпростіший випадок багатогранника – куб. Положення i-го куба однозначно визначається в довільний момент часу координатами центра мас $\mathbf{r}_{ci}$ та трьома параметрами, що визначають його обертальний рух. Таким чином гранульоване середовище, що складається з N кубів, має 6 N ступенів свободи. Рівняння руху структурних елементів гранульованого середовища мають наступний вигляд:

$$m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_{ci}}{dt^2} = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\,, \tag{6.1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}_i}{dt} = \sum_j \boldsymbol{M}_c(\boldsymbol{F}_{ij})\,, \tag{6.2}$$

де $\boldsymbol{r}_{ci}, m_i$ – відповідно радіус-вектор центра та маса i-го куба, $\boldsymbol{F}_{ij}$ – сила, що діє на i-й куб з боку j-го куба, $\boldsymbol{K}_{ci}$ – кінетичний момент i-го куба відносно його центра, $\boldsymbol{M}_c(\boldsymbol{F}_{ij})$ – момент сили відносно центра i-го куба. Додавання здійснюється для всіх j-х кубів, які мають контакт з i-м кубом. Рівняння (6.1) записано в нерухомій декартовій системі координат $Oxyz$, а рівняння (6.2) – в системі координат, що поступально рухається з центром куба C, координатні осі якої паралельні відповідним осям нерухомої системи координат $Oxyz$.

Кінетичний момент зв’язаний з кутовою швидкістю тіла через тензор моментів інерції. В загальному випадку їх напрями не співпадають. Завдяки симетрії куба його центральний еліпсоїд інерції вироджується в сферу, як для кулі. Це стосується й інших правильних багатогранників. Тому обертальний рух куба та кулі має багато спільних рис. Наприклад, вектори кінетичного моменту та кутової швидкості мають завжди однаковий напрям, тобто

$$\boldsymbol{K}_{ci} = I_{ci}\boldsymbol{\omega}_{ci},$$

де $\boldsymbol{\omega}_{ci}$ – вектор кутової швидкості куба, що обертається навколо нерухомого центру; I_{ci} - момент інерції куба відносно центру. Для будь якої осі обертання, що проходить через нерухомий центр, він має однакове значення $I_{ci} = 2/3m_i^2$.

Момент контактної сили, що діє на куб i під час контакту з кубом j знаходиться за формулою

$$\boldsymbol{M}_c(F_{ij}) = \boldsymbol{r}_{ij}^c \times \boldsymbol{F}_{ij},$$

де $\boldsymbol{r}_{ij}^c$ – вектор, проведений з центру куба i до точки контакту кубів i та j.

Для опису контактних сил та моментів сил, що прикладаються до кубів, потрібно знати точно положення кубів в нерухомій системі координат. Це забезпечується розрахунками поступального та обертального руху кубів. Поступальний рух описується рівняннями (6.1), з яких знаходяться координати центрів кубів. Обертальний рух описується рівняннями моментів (6.2), з яких знаходяться кутові швидкості кубів, а з них визначаються кути поворотів кубів.

Знаходження кутів поворотів куба складніше у порівнянні з обчисленням руху його центра. Це пов’язано з тим, що на відміну від матеріальної точки, конфігураційний многовид якої є трьохвимірний евклідовий простір, многовоид положень тіла з однією нерухомою точкою не є евклідовим [389].

Існує декілька способів задавання орієнтації твердого тіла [389–391]. Історично перший – кути Ейлера: три числа ψ, θ та φ - кути плоских поворотів визначають орієнтацію твердого тіла. Але кути Ейлера не є спостережні, як це має місце у випадку декартових координат матеріальної точки. Вказані повороти, що наповнюють конкретним змістом кути ψ, θ, φ, являють собою уявну конструкцію, яка може бути й іншою (кути Ейлера-Крилова [390], Крилова-Булгакова [389]). Існують поєднання кутів, при яких порушується однозначність представлення положень твердого тіла. Тому розроблені інші підходи, які не мають цих порушень, наприклад метод ортогональних матриць [389].

Нами вибрано метод опису кінцевого повороту твердого тіла за допомогою кватерніонів [391], які широко використовуються в сучасних теоретичній механіці та теоретичній фізиці [392]. В нерухомій системі координат кінематичне рівняння для кватерніона повороту має вигляд [391]

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{ci} \circ \Lambda, \tag{6.3}$$

де $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_0 + \lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{i}_3 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ – обертальний кватерніон.

Перетворення координат за допомогою кватерніонів передбачає, що норма кватерніона повороту дорівнює одиниці, тому в процесі розрахунків здійснюється періодичне нормування розв'язку. В наших розрахунках здійснюється автоматична корекція норми завдяки модифікації рівняння (6.3) у вигляді [391]

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{ci} \circ \Lambda - q(\|\Lambda\| - 1). \tag{6.4}$$

Числовий коефіцієнт q може змінюватися від 0 до 1. Нами вибрано значення q = 0,5. Отже, рівняння (6.1) – (6.2), (6,4) утворюють замкнену систему рівнянь для опису взаємодії N кубів. Розв'язок цієї системи знаходиться за допомогою кінцево-різницевого методу. Для розв’язку рівнянь (6.1) та (6.2) використовується алгоритм Бімана [393], а рівняння (6.4) розв’язується методом Рунге-Кутта 4-го порядку.

Опишемо основні кроки алгоритму взаємодії кубів. Для ідентифікації контакту використовується алгоритм, який розглядає частинку як область, обмежену половиною просторів $(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \le 0$, де $\boldsymbol{c}$ – центр маси для частинки, $\boldsymbol{\xi}$ – довільна точка у половині простору, $\boldsymbol{a}$ – вектор, який вказує від центра маси до межі поверхні половини простору в нормальному напрямку [394, 395].

Отримана фігура перетину – це опуклий багатогранник. Алгоритм для знаходження його вершин полягає в оцінці всіх точок перетину всіх можливих комбінацій двох граней одного куба та грані іншого куба [395].

Взаємодія між тілами визначається однією силою, яка розкладається на нормальну $\boldsymbol{F}^n$ та тангенціальну $\boldsymbol{F}^f$ сили. Координати точки, де діє контактна сила, співпадають з середніми значеннями координат вершин області перекриття $\boldsymbol{x}^0 = \sum_j \boldsymbol{x}_j / m$, де m – кількість вершин області перетину.

Напрямок сили визначається контактною нормаллю $\boldsymbol{n}^f$. Щоб отримати контактні нормалі використовуються вершини контактної лінії, яка є ломаною лінією перетину для поверхонь двох контактуючих гранул [250]. На основі цих вершин будується апроксимаційна площина за допомогою методу найменших квадратів. Для цього використовується метод сингулярного розкладу [396, 397]. Нормаль цієї площини збігається з нормаллю контакту і визначає напрям для нормальної сили взаємодії між частинками.

Модель для нормальної сили, яка не залежить від типу контактів і підходить для гранул різної форми та визначає взаємодію між тілами, була запропонована в [298]. Виходячи з цієї моделі, контактна взаємодія між тілами описується одиничною силою, яка залежить від об'єму V області перетину взаємодіючих тіл та глибини проникнення d. Тоді сила

$$F^n = kE^* \sqrt{Vd} \;, \tag{6.5}$$

де коефіцієнт $k = 4/3\sqrt{\pi}$, $V = 1/6 \cdot d \cdot d_{\max} \cdot d_p$, $d_{\max}$ - максимальна відстань між вершинами області перетину (напрямок $\boldsymbol{l}_m$), d_p - максимальна відстань між вершинами у напрямку $\boldsymbol{n}_p = \boldsymbol{n}^f \times \boldsymbol{l}_m$. Ефективний модуль Юнга E^* визначається з пружних параметрів пари контактуючих гранул

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \,,$$

де E_{12} та ν_{12} – модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона контактуючих тіл. Ми використовуємо ідентичні E_{12} та ν_{12}. Глибина проникнення d визначається як відстань проникнення області перетину в напрямку нормальної сили та обчислюється за такою формулою: $d = \max(\boldsymbol{n}^f \cdot \boldsymbol{p}^c) - \min(\boldsymbol{n}^f \cdot \boldsymbol{p}^c)$.

Крім нормальних сил під час контакту виникають також тангенційні сили. Ці сили визначаються за допомогою кулонівської моделі тертя, яка відрізняє статичне тертя (зчеплення) $F^s < \mu^s N$ та кінетичне тертя (ковзання) $F^k = \mu^k N$, де μ^s та μ^k є емпіричними коефіцієнтами. При застосуванні цієї моделі виникає певна складність, оскільки під час контакту ми не знаємо тип контакту та всіх сил, що застосовуються до частинки. Ще одна проблема стосується стрибків сил тертя. Щоб уникнути її, автори статті [267] пропонують модель для тертя, в якій згладжуються розриви сили тертя. Статичне тертя апроксимується за допомогою моделі ковзання з дуже низькими швидкостями, тобто

$$F^s = \left[\left(2\mu^{s*} - \mu^k\right) \frac{x^2}{1+x^4} + \mu^k - \frac{\mu^k}{1+x^2} \right] N \,,$$

де $\mu^{s*} = \mu^s \left[1 - 0{,}09 \left(\mu^k / \mu^s \right)^4 \right]$, $x = \nu^t / \nu^s$. Тут ν^t – величина тангенційної швидкості, а ν^s – швидкість переходу від статичного до кінетичного тертя. Напрямок сили тертя $\boldsymbol{F}^f$ паралельний відносній тангенційній швидкості кубів у точці контакту. За описаним алгоритмом знаходяться пари контактуючих кубів та визначаються у єдиний спосіб характеристики їх контакту. На базі описаного алгоритму розроблено на Фортрані код *CuBluck.*

В розрахунках куби мали характеристики як у оргскла: густина $\rho = 1{,}2$ г/см^3; модуль Юнга $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м^2; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$; коефіцієнти тертя статичного $\mu^s = 0{,}7$; кінетичного $\mu^k = 0{,}4$; характерна швидкість переходу від статичного до кінетичного тертя $\nu^s = 0{,}01$ м/с.

6.2. Зсувне деформування гранульованого середовища при дії постійної зсувної сили

Для числового моделювання розглядається, як і в експериментах, система 3000 кубів однакового розміру $l = 10$ мм, розташованих у прямокутній ємності, яка складається з двох частин, а саме: фіксованої нижньої частини висотою 60 мм та рухомої верхньої висотою – 80 мм. У верхній частині знаходиться кришка, вагою 14 кг, яка може вільно рухатися у вертикальному напрямі. Дно має наступний розмір: 0,2×0,3 м. Стінки ємності утворені кубами, розміром 0,5 м, з такими ж характеристиками, як у кубів-елементів. Ємність з випадково розміщеними кубами показана на рис. 6.1.

Щоб отримати початковий масив елементів, спочатку було проведено компактування. В об’ємі 0,2×0,3×0,5 м було у випадковому порядку розташовано 3000 кубів, які під дією сили тяжіння падали донизу і таким чином ущільнювались. Розрахунки проводилися до того моменту, поки кінетична енергія системи не досягла величини 10^{-12} Дж.

Розглядалась задача зсувного деформування системи 3000 елементів під дією постійної сили F, яка прикладалася до верхньої частини ємності (рис. 6.1), в результаті чого верхня частина з структурними елементами рухалась у напрямку y. На рис. 6.2 показано розташування елементів у різні моменти часу. Процес деформування гранульованого середовища відбувається суттєво нерівномірно, на рис. 6.3, *а* наведено залежності зміщення верхньої частини ємності від часу.

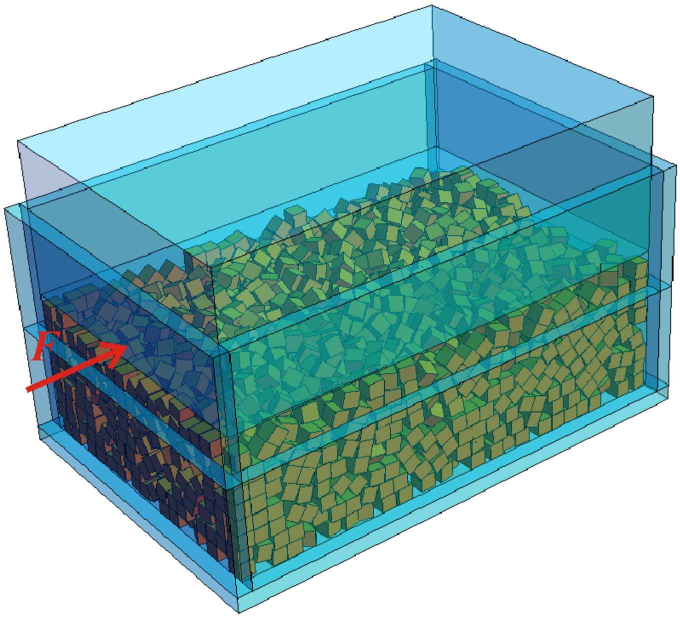
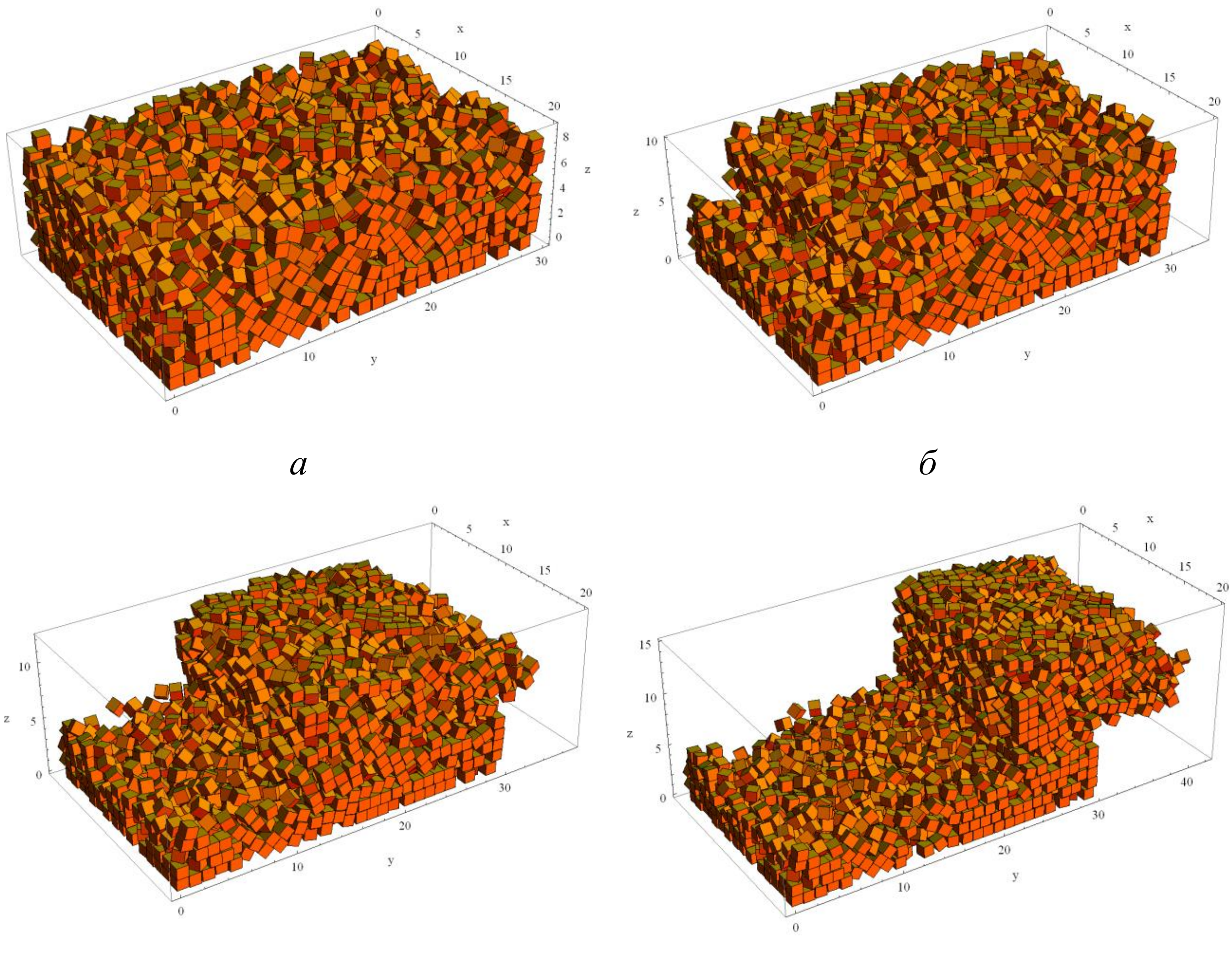


Рис. 6.1. Схема навантаження гранульованого середовища під дією постійної сили F.

Характерно, що в деякі проміжки часу має місце зворотній рух. Це добре демонструє рис. 6.3, *б*, на якому наведена залежність швидкості від часу. В ці моменти виникають значні сили, що діють на верхню частину ємності з боку середовища у напрямку, протилежному до напрямку дії сили F (рис. 6.4). Виникнення цих великих сил пов'язано із защемленням елементів між правою нижньою стінкою та верхньою лівою.

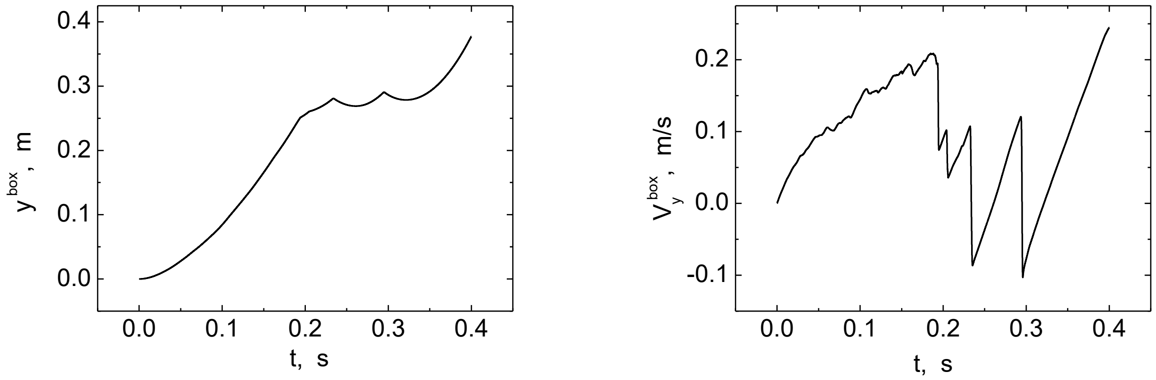
В процесі деформування відбувається зміна координаційного числа (середньої кількості контактів елемента). Залежність координаційного числа в масиві елементів від часу наведена на рис. 6.5. Після компактування координаційне число було рівним $Z_c = 2{,}18$. Далі ця величина зменшується до мінімального значення $Z_c = 0{,}33$. Гальмування призводить до збільшення контактів.



а *б* *в* *г*

Рис. 6.2. Розташування системи кубів в процесі зсуву під дією постійної сили $F = 500\ N$ на верхню частину ємності в різні моменти часу: *а*) t=0 с, *б*) t = 0,06 с, *в*) t = 0,12 с, *г*) t = 0,18 с.

Часова зміна вертикальної компоненти швидкості кришки v_z під час зсувного руху зображена на рис. 6.6, *а*. Гальмування верхньої частини боксу та защемлення елементів зменшує вертикальну швидкість кришки. Вертикальна сила F_z^{ps}, що діє на кришку в залежності від часу зображена на рис. 6.6, *б*. Гальмування верхньої частини ємності супроводжується зростанням амплітуди стрибків цієї сили.



а *б*

Рис. 6.3. Часові залежності зміщення $y^{box}(t)$ (*а*) та швидкості $v_y^{box}(t)$ (*б*) верхньої частини ємності під дією постійної сили $F = 500$ *N*.

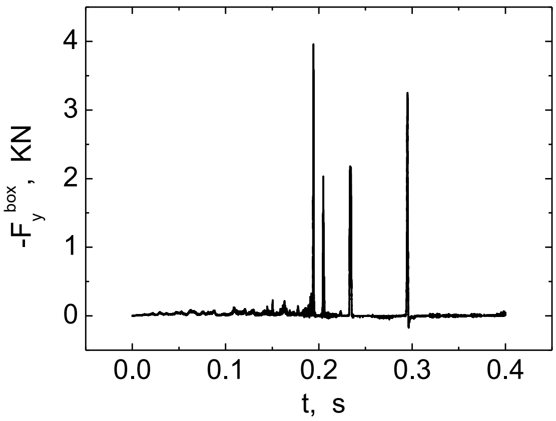


Рис. 6.4. Часова залежність сили $F_y^{box}(t)$, яка діє на верхню частину ємності в напрямку зсуву, що відбувається під дією постійної сили $F = 500$ *N*.

Еволюція енергії системи кубів досліджується на проміжках часу, де не проявляються межові ефекти: від початку до 0,19 с. Зміни видів енергії 3000 елементів з часом при зсувному деформуванні системи у горизонтальному напрямку під дією постійної сили зображено на рис.6.7. Амплітудно-частотні характеристики цих залежностей наведено на рис. 6.8.

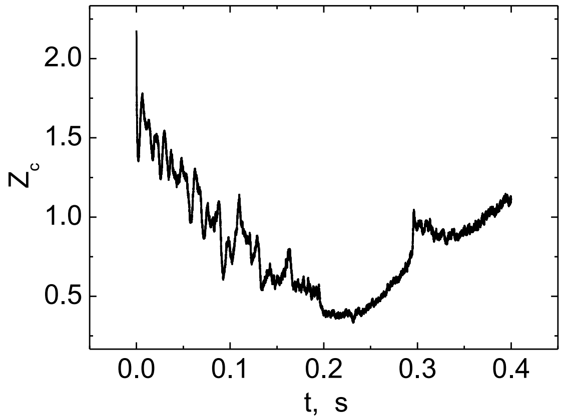
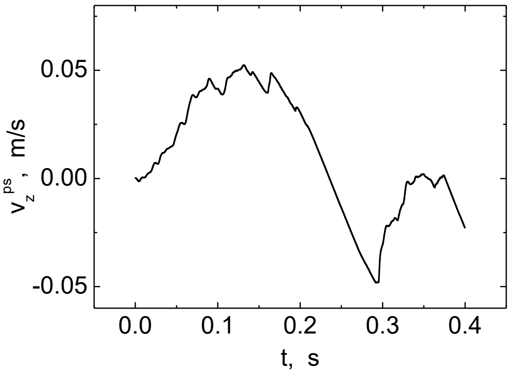
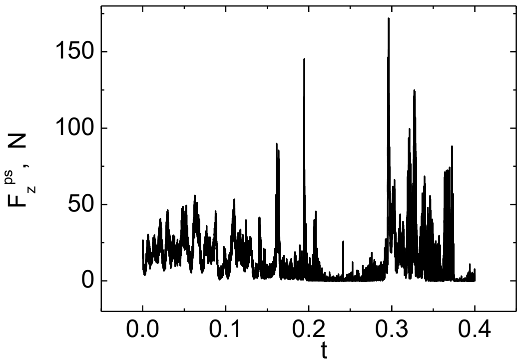


Рис. 6.5. Часова залежність координаційного числа в процесі зсуву під дією постійної сили $F = 500\ N$.



а



б

Рис. 6.6. Часові залежності швидкості $v_z^{ps}(t)$ кришки (*а*) та сили $F_z^{ps}(t)$, що діє на кришку (*б*).

Видно, що спектри мають степеневий характер, за виключенням пружних енергій, причому й самі часові залежності і їхні спектри подібні для різних упаковок, що демонструє незалежність статистичних характеристик від упаковки. Степеневий характер спектрів свідчить про відсутність виділених частот і про масштабну інваріантність процесу, що є характерним для систем, які перебувають у критичному стані.

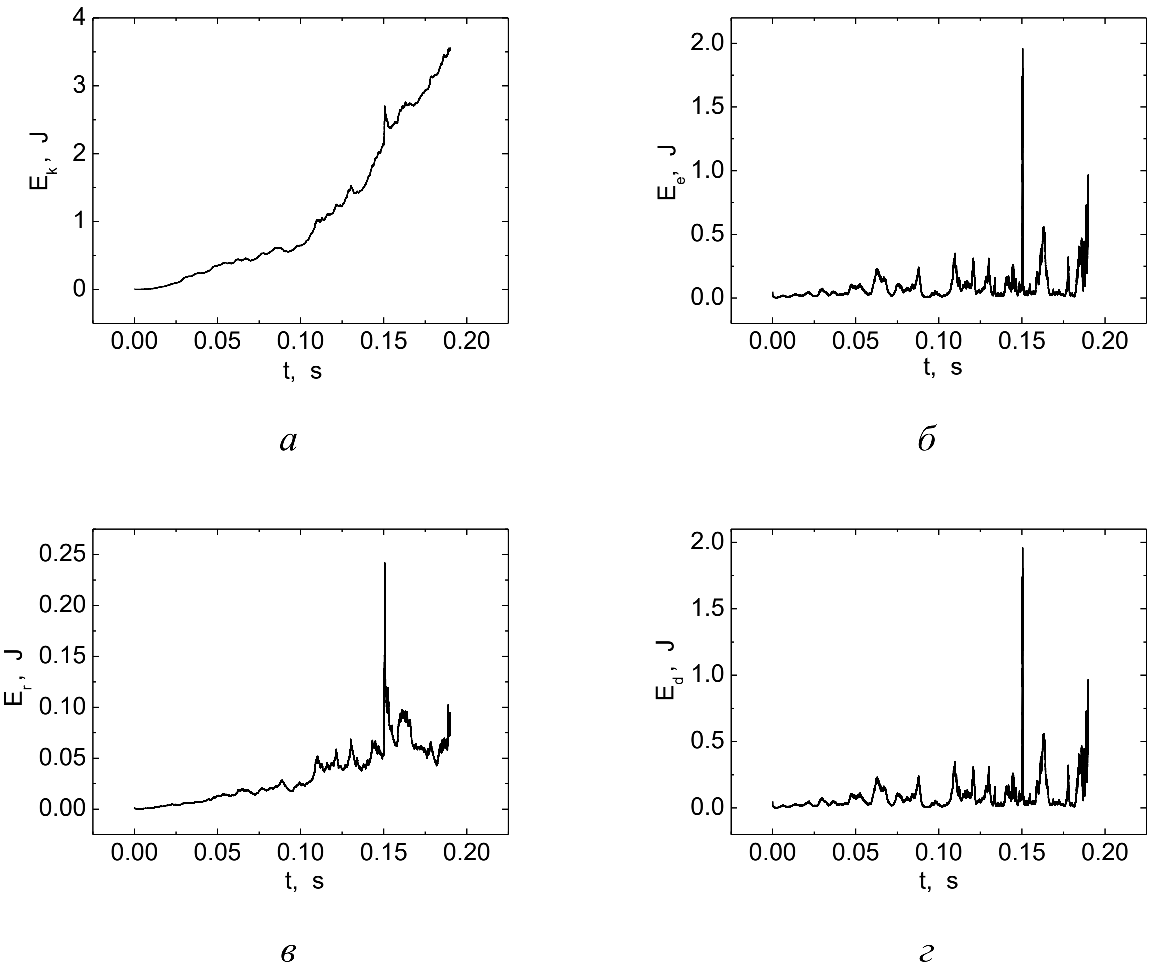
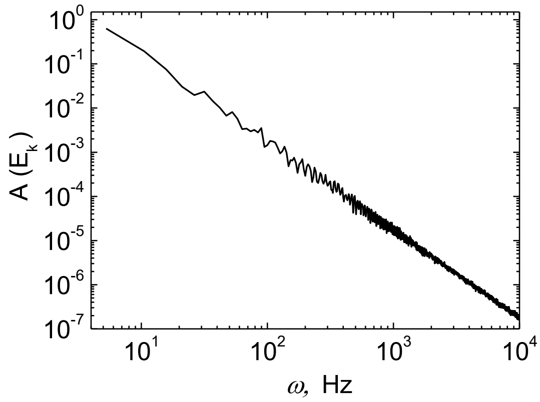
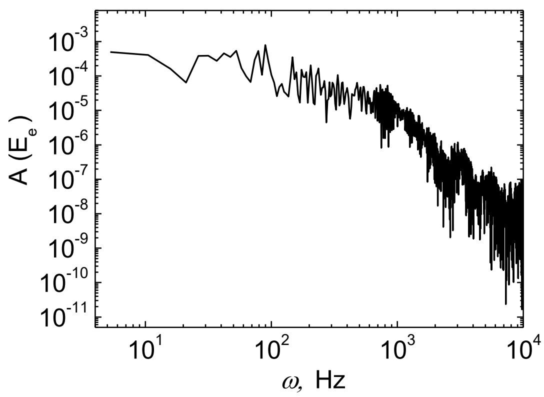


Рис. 6.7. Часові залежності кінетичної енергії E_k (*а*), енергії пружної взаємодії E_e (*б*), енергії обертання E_r (*в*), енергії диссипації E_d (*г*) системи 3000 елементів.

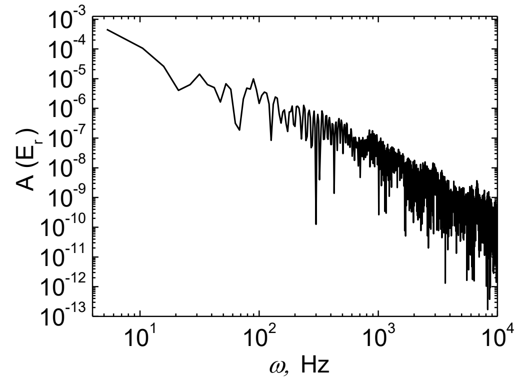
Для дослідження динаміки мікрохарактеристик такої складної системи в процесі деформування побудовано розподіли сил взаємодії між структурними елементами у різні моменти часу. На рис. 6.9, *а* показано типовий розподіл цих сил: ця залежність також є степеневою $\Phi \propto f^{-\alpha}$, де $\alpha = 1{,}9$, а на рис. 6.9, *б* – часову залежність показника ступеня α для всього інтервалу зсувного деформування. Показник α змінюється впродовж усього часу деформування, проте всі розподіли мають вигляд степеневої функції.



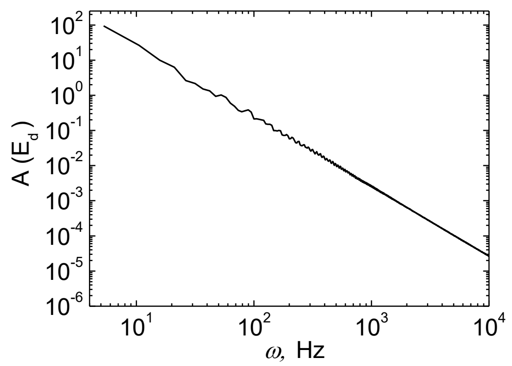
а



б



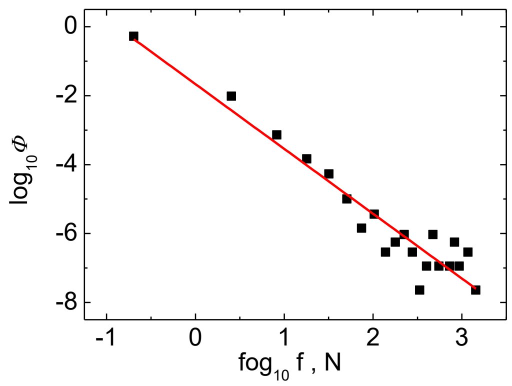
в

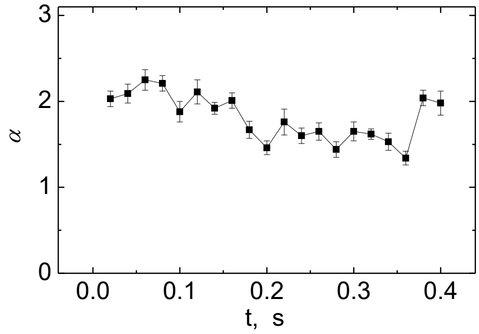


г

Рис. 6.8. Спектри часових залежностей кінетичної енергії E_k (*а*), енергії пружної взаємодії E_e (*б*), енергії обертання E_r (*в*), енергії дисипації E_d (*г*) системи 3000 елементів.

Оскільки система кубів є складною системою, то реакція такої системи на зсувне навантаження з постійною силою не є гладкою, а має стохастичний характер. Дослідимо властивості реакції цієї системи, а саме кореляційні властивості часового ряду, яким є часова залежність сили, з якою гранульоване середовище діє на верхню частину ємності $F_y^{box}(t)$ (рис. 6.4) Для цього скористаємося методом детрендового флуктуаційного аналізу (ДФА), запропонованим авторами роботи [398] і модифікованим в роботі [399].





а *б*

Рис. 6.9. Розподіл сил міжгранульної взаємодії f в момент часу $t = 0{,}10$ с. (суцільна лінія побудована методом найменших квадратів) (*а*). Залежність показника степеня α від часу (*б*).

Метод був розроблений для дослідження великомасштабних кореляцій в нестаціонарних рядах. ДФА процедура здійснюється за 4 кроки.

1. Формується ряд у вигляді суми початкових елементів $F_y^{box}(x_i)$:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^{i} F_y^{box}(x_k) - \left\langle F_y^{box}(x_j) \right\rangle, \quad i, j = 1, N.$$

2. Ряд $Y(i)$ розбивається на $N_s \equiv [N / s]$ відрізків однакової довжини s.
3. Обчислюється локальний тренд шляхом апроксимації даних на відрізку поліномом чи іншою функцією p_ν. Далі обчислюється ряд позбавлений тренду

$$Y_s(i) = Y(i) - p_\nu(i).$$

4. Для кожного відрізка обчислюється дисперсія безтрендового ряду

$$f_s^2(\nu) = \left\langle Y_s^2(i) \right\rangle = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{i} Y_s^2[(\nu - 1)s + i],$$

і нарешті, усереднюючи дисперсію за всіма відрізками і беручи квадратний корінь, можна отримати функцію ДФА флуктуацій

$$f(s)=\left[\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}f_s^2(\nu)\right]^{1/2}.$$

Авторами роботи [400] показано, що для далекодіючих кореляцій справедлива степенева залежність

$$f(s)\propto s^{1-\gamma/2}, \tag{6.6}$$

де γ – показник в степеневому законі для далекодіючих кореляцій

$$C(k)=\left\langle \bar{x}_i\bar{x}_{i+k}\right\rangle \propto k^{\gamma}.$$

Тут $C(s)$ – автокореляційна функція. Для короткодіючих кореляцій [400] справедливо

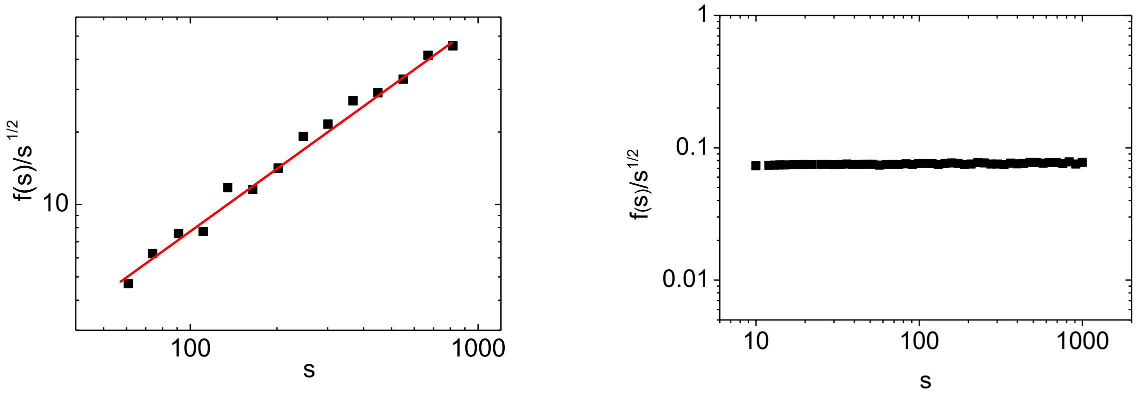
$$f(s)\propto s^{1/2}.$$

Отже, кут нахилу віднормованої функції $f(s)/s^{1/2}$ до осі s вказує на ступінь кореляції ряду.

На рис. 6.10, *а* наведено залежність $f(s)/s^{1/2}$ від розміру інтервалу s, отриману за допомогою лінійних апроксимаційних функцій p_ν. На рис. 6.10, *б*, для прикладу, наведено залежність $f(s)/s^{1/2}$ від s для δ-корельованого ряду. Залежність $f(s)/s^{1/2}(s)$ можна представити у вигляді

$$f(s)/s^{1/2}\propto s^{\alpha}. \tag{6.7}$$

Апроксимуючи її лінійною залежністю в логарифмічних координатах, отримуємо $\alpha=0{,}87$, а для δ- корельованого сигналу, очевидно, $\alpha=0$.



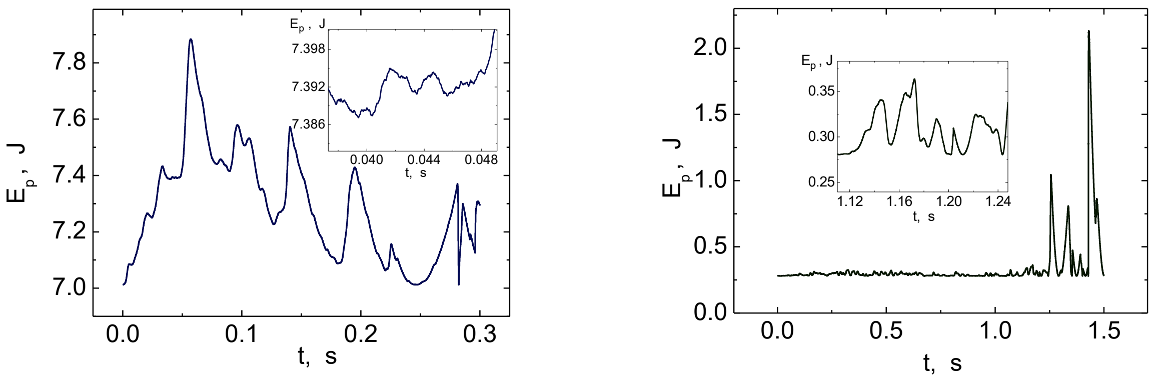
а *б*

Рис. 6.10. Залежності ДФА функції кореляції від розміру інтервалу s, на якому здійснюється позбавлення від тренду для а) залежності сили, що діє на дно ємності від часу; б) некорельований сигнал.

Із формул (6.6) та (6.7) можна обчислити показник кореляцій $\gamma = 1 - 2\alpha = 0{,}74$. Отримані значення α та γ свідчать про те, що в даному процесі мають місце далекодіючі кореляції.

6.3. Зсув гранульованого середовища за постійної швидкості деформування

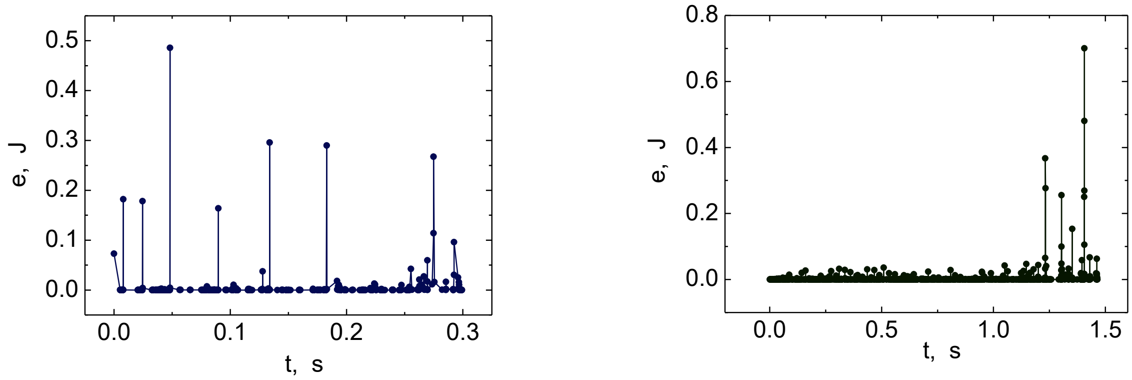
Наступна серія розрахунків стосується зсувного деформування гранульованого середовища при постійній швидкості. Розглядається масив елементів, утворений 3000 кубічними елементами. Деформування здійснюється завдяки руху верхньої частини ємності зі швидкістю V_0. При цьому кришка, масою 14 кг має можливість рухатися у вертикальному напрямку. На рис. 6.11 наведено зміни з часом кінетичної енергії кришки, пов'язаної з вертикальним її рухом для двох різних швидкостей зміщення верхньої частини V_0.



а *б*

Рис. 6.11. Часові залежності кінетичної енергії кришки, зв’язаної з вертикальним рухом поршня, для швидкостей деформування $V_0 = 1$ м/с (*а*), $V_0 = 0{,}2$ м/с (*б*). У вставках фрагменти цих залежностей.

Фрагменти цих залежностей, наведені у вставках до графіків, свідчать про те, що дані криві мають багато локальних максимумів і мінімумів. Стрибки енергії від сусідніх мінімумів до максимумів $e_i = E_{pi}^{\max} - E_{pi}^{\min}$ можна розглядати як збурення, які передаються від гранульованої системи до зовнішнього середовища.

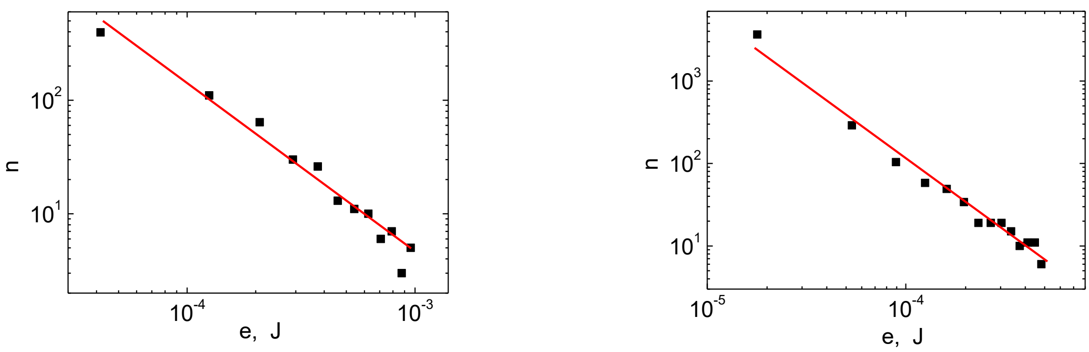


а *б*

Рис. 6.12. Часові залежності стрибків кінетичної енергії кришки, зв’язаної з вертикальним рухом поршня для двох швидкостей деформування $V_0 = 1$ м/с (а), $V_0 = 0{,}2$ м/с (*б*).

Послідовність таких збурень для двох випадків наведено на рис. 6.12. У випадку деформування зі швидкістю $V_0 = 1$ м/с кількість таких збурень $N_e = 801$, у випадку $V_0 = 0{,}2$ м/с – $N_e = 4557$. Отже, при меншій швидкості деформування має місце більша кількість збурень, які передаються оточуючому середовищу, тобто воно є менш гладким. Така кількість збурень є достатньою щоб дослідити статистичні властивості послідовності збурень (акустичних подій).

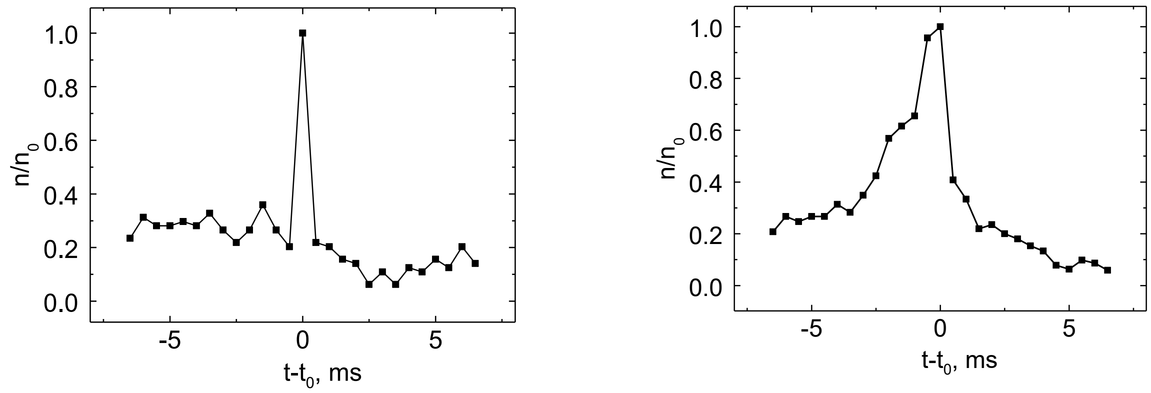
Розподіли подій за енергією наведено на рис. 6.13. Обидві залежності добре апроксимуються степеневою функцією з показником степеня $\beta = 1{,}52 \pm 0{,}07$ для випадку $V_0 = 1$ м/с та $\beta = 1{,}76 \pm 0{,}07$ для $V_0 = 0{,}2$ м/с. Ці показники близькі до середнього показника $\beta \approx 1{,}7$, властивого для землетрусів [377, 381]. Також близькі значення показника β спостерігаються для акустичних шумів, які генеруються пористими матеріалами, зразками вугілля, вулканічними породами, магнетиками, тощо [401–405].



а *б*

Рис. 6.13. Залежності кількості подій від енергії для двох швидкостей деформування $V_0 = 1$ м/с (*а*), $V_0 = 0{,}2$ м/с (*б*).

Важливим є питання щодо існування форшоків та афтершоків після великих збурень, як це має місце для землетрусів. На рис. 6.14 наведено залежності кількості подій до основної події та після неї для обох швидкостей. Як виявилось, для швидкого деформування афтершоки відсутні, при повільнішому деформуванні афтершоки вже спостерігаються.

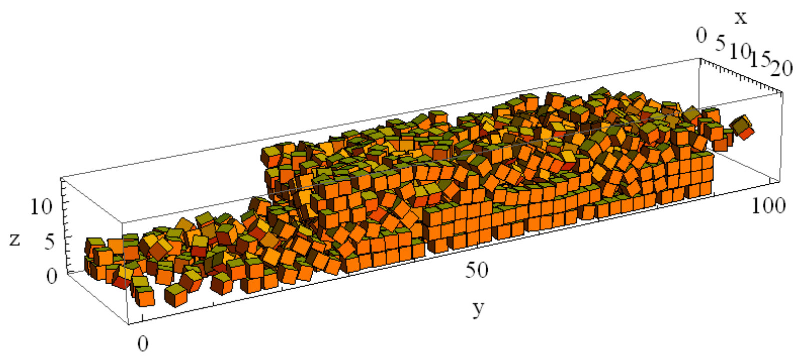


а *б*

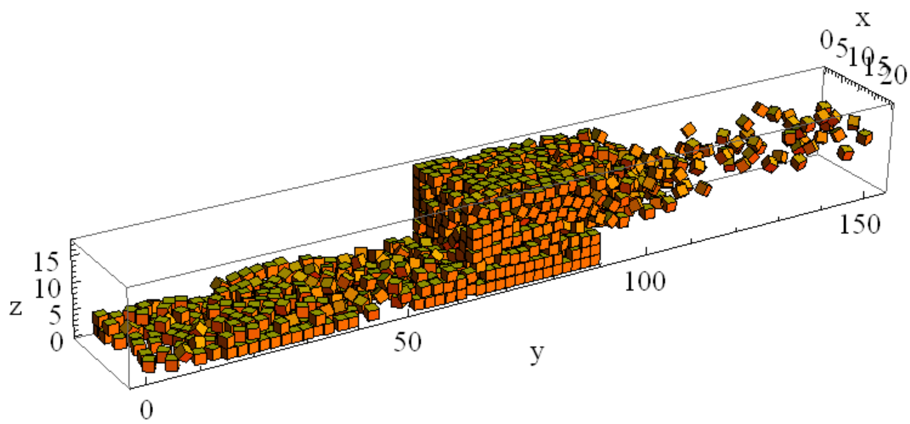
Рис. 6.14. Залежність середньої кількості акустичних збурень від часу для двох швидкостей деформування $V_0 = 1$ м/с (а), $V_0 = 0{,}2$ м/с (*б*), n_0 – кількість великих збурень.

Для дослідження впливу розмірів структурних елемнтів було проведено розрахунки зсуву для двох аналогічних швидкостях деформування, з розмірами вдвічі більшими ніж у попередніх розрахунках. Розглядається система із 1200 елементів кубічної форми, з розміром ребер $l = 20$ мм, розташованих у прямокутній ємності 20×90×50 см, яка, як і у попередньому випадку, була випадковим чином заповнена кубами. Під дією сили тяжіння куби ущільнювалися поки кінетична енергія системи не досягла величини 10^{-12} Дж.

Деформування так само здійснюється завдяки руху верхньої частини ємності зі швидкістю V_0. Кришка також має масу 14 кг і має можливість рухатися також у вертикальному напрямку. Розташування елементів у два різні моменти часу для наглядності наведено на рис. 6.15. Видно, що висота гранульованого масиву з часом зростає.



а



б

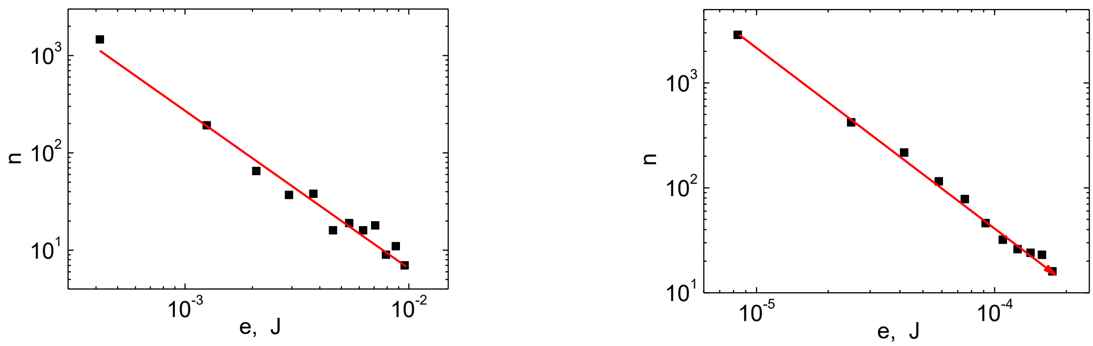
Рис. 6.15. Гранульована система в моменти часу а) $t = 0{,}27$ с та *б*) $t = 0{,}63$ с. Швидкість руху верхньої частини ємності $V_0 = 1$ м/с. Система складається із 1200 кубічних елементів розміром $l = 20$ мм.

Розподіли за стрибками кінетичної енергії для обох випадків наведено на рис. 6.15. Ці залежності добре апроксимуються степеневою функцією з показником степеня $\beta = 1{,}61 \pm 0{,}08$ для випадку $V_0 = 1$ м/с та $\beta = 1{,}70 \pm 0{,}04$ для – $V_0 = 0{,}2$ м/с, а отже ці показники степеня також досить близькі до середнього показника для землетрусів $\beta \approx 1{,}7$ [377, 378].

Розрахунки зі зсувним деформуванням гранульованого середовища з гранулами розміром $l = 20$ мм показали, що у цьому випадку мають місце як форшоки, так і афтершоки (рис. 6.16). Афтершоки в обох випадках затухають за степеневим законом, як це має місце для афтершоків великих землетрусів (закон Оморі)

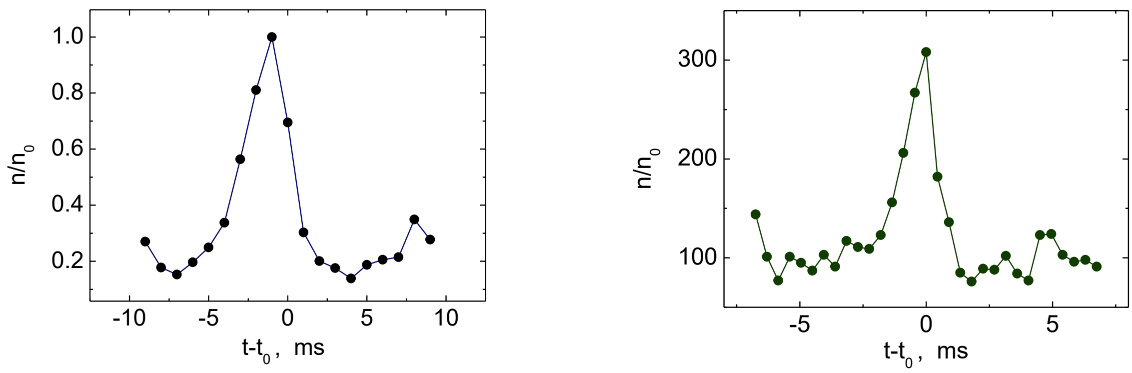
$$n = k / t^{p}, \tag{6.8}$$

з такими значеннями показника $p = 1{,}01 \pm 0{,}07$ для випадку $V_0 = 1$ м/с та $p = 0{,}93 \pm 0{,}06$ коли $V_0 = 0{,}2$ м/с (*б*). Тобто, збільшення розмірів кубів призводить до появи часових кореляцій у стрибках кінетичної енергії поршня навіть при великих швидкостях деформування.



а *б*

Рис. 6.16. Залежності кількості подій від енергії для двох швидкостей деформування $V_0 = 1$ м/с (*а*), $V_0 = 0{,}2$ м/с (*б*). Розмір елементів $l = 20$ мм.



а *б*

Рис. 6.17. Залежність середньої кількості акустичних збурень від часу для двох швидкостей деформування $V_0 = 1$ м/с (*а*), $V_0 = 0{,}2$ м/с (*б*), n_0 – кількість великих збурень, n – загальна кількість збурень. Розмір елементів $l = 20$ мм.

6.4. Флуктуації швидкостей елементів у процесі зсувного деформування

Рух тектонічних елементів на межі тектонічних плит спричинює накопичення у них пружної енергії, яка потім виділяється у вигляді послідовності землетрусів різної магнітуди. Мероз і Мед [16] детально вивчали рух тектонічних структурних елементів у Каліфорнії, в області, яка знаходиться між двома тектонічними плитами: Тихоокеанською та Північноамериканською. Ця область розбита мережею розломів на велику кількість тектонічних елементів, які в результаті руху тектонічних плит також залучені в рух. Дослідження Мероз і Мед показали, що поведінка цієї області подібна до зсувного деформування гранульованого середовища. При цьому розподіл флуктуацій швидкостей відрізняються від гауссового розподілу, виявляючи “важкі” хвости, а кореляційна функція затухає як розтягнута експонента. Ці дослідження дають підстави вважати, що граничну область між двома тектонічними плитами можна розглядати як щільно упаковане гранульоване середовище з характерними розмірами тектонічних елементів $L = 91 \pm 20$ км [16]. На рис. 6.18 показано систему розломів в області навколо розлому Сан-Андреас в Каліфорнії, поле швидкостей у цій області та усереднені швидкості як функцію від координати y. Обчислені флуктуації швидкості через усереднені швидкості

$$\delta \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i - \langle \boldsymbol{v}(y_i) \rangle, \qquad (6.9)$$

зображені на рис. 6.19, де $\boldsymbol{v}_i$ – швидкість в i-му шарі, $\langle \boldsymbol{v}(y_i) \rangle$ - усереднена швидкість в i-ій позиції. Видно, що розподіл істотно відхиляється від розподілу Гаусса.

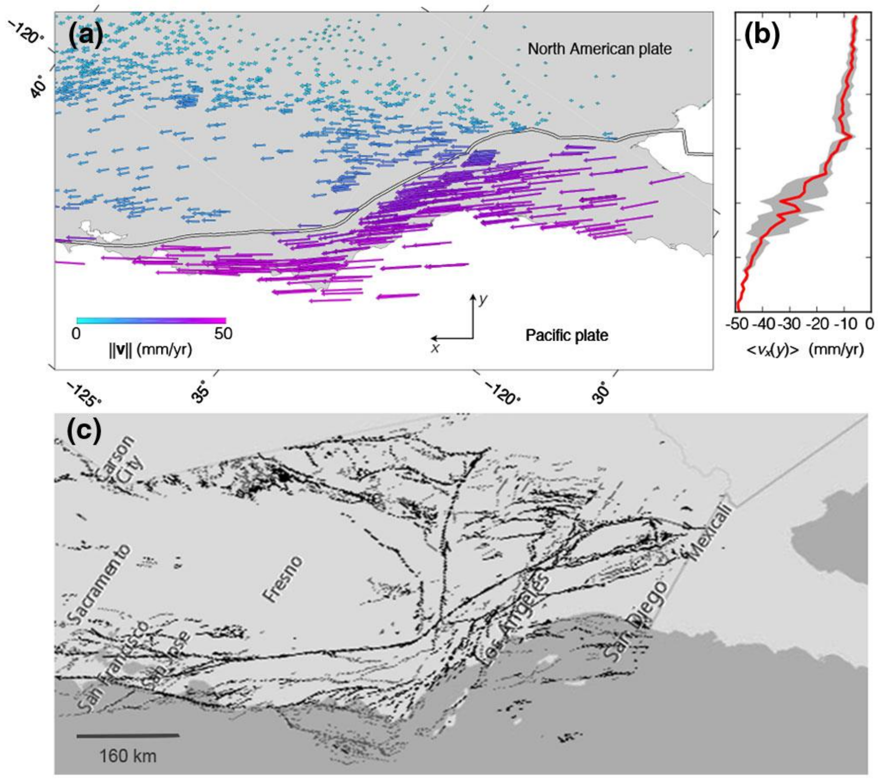


Рис. 6.18. (*a*) Векторне поле 1106 швидкостей, виміряних за допомогою GPS, вздовж межі тихоокеансько-північноамериканської плити в Каліфорнії [406]. Вісь *x* приблизно паралельна розлому Сан-Андреас, а вісь *y* проходить вздовж 565 км від Тихого океану до Північноамериканської плити. (*b*) Середній профіль швидкості як функція положення *y* на рис. (*a*). Стандартне відхилення сірого кольору. (*c*) Повна система розломів. Рисунок взято з роботи [16].

Для характеристики кінематики системи, що визначається флуктуаціями швидкості, в роботі [16] розраховувалася також кореляційна функція

$$C(r) = \frac{\left\langle \delta\mathbf{v}(r) \cdot \delta\mathbf{v}(0) \right\rangle}{\left\langle \delta\mathbf{v}^2 \right\rangle} \tag{6.10}$$

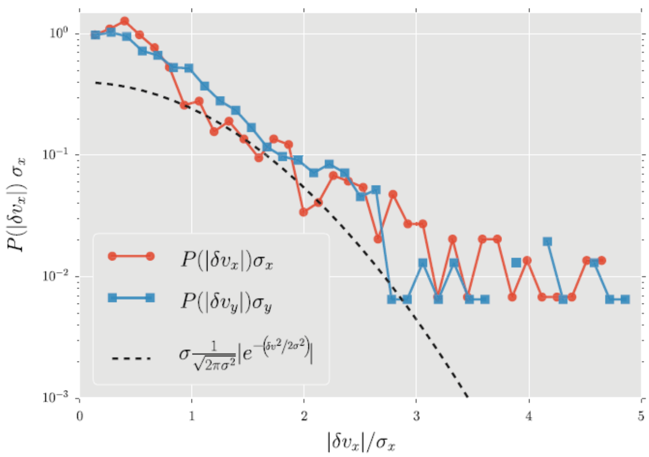


Рис. 6.19. Графік розподілу флуктуацій швидкості $P(|\delta v_x|)\sigma_x$ (червоні кола) та $P(|\delta v_y|)\sigma_y$ (сині квадрати). Для порівняння побудовано гауссівський розподіл (пунктирна лінія), виділяючи важкі хвости розподілу. Рисунок взято з роботи [16].

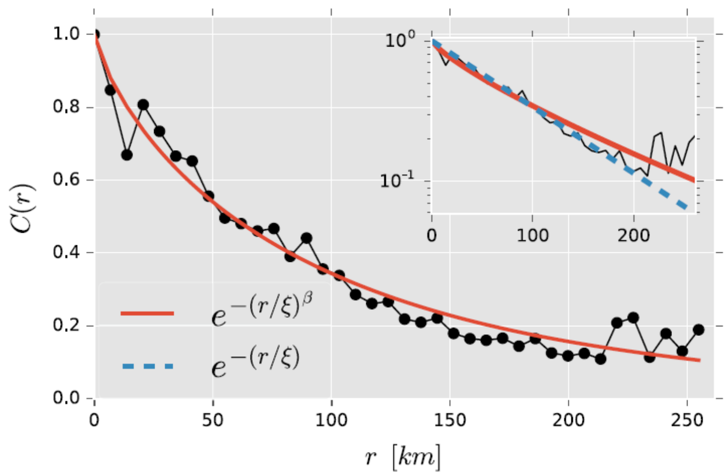


Рис. 6.20. Просторова кореляційна функція флуктуацій швидкості. Та апроксимація цієї залежності витягнутою експонентою (6.10). У вставці також для порівняння наведено апроксимацію цієї залежності експоненційною залежністю (штрихова синя лінія). Рисунок взято з роботи [16].

Залежність кореляційної функції від відстані наведено на рис. 6.20. Розрахунки показали, що найкраще кореляційна функція апроксимується витягнутою експонентою

$$C(r) = e^{-(r/\xi)^{\beta}}, \tag{6.11}$$

де значення $\beta = 0{,}75$, а $\xi = 92$ км отримані методом найменших квадратів.

У роботі [16] поле швидкостей порівнюється із двовимірним полем швидкостей, що має місце у процесі зсувного деформування гранульованого середовища із гранулами у формі куль. У цьому пункті досліджуються властивості поля швидкостей у тривимірному модельному гранульованому середовищі, утвореному кубічними елементами. Така постановка задачі є більш наближеною до реального процесу зсуву в сейсмоактивній зоні, порівняно з задачею про зсув гладких сферичних гранул, оскільки в кінематиці гранульованого середовища значну роль відіграють обертальні ступені волі. І звичайно ж, тривимірний процес зсуву більш точно відповідає природному процесу.

Чисельно моделювався процес зсувного деформування масиву 3000 кубів розміром $l = 10$ мм при постійній швидкості зсуву верхньої частини боксу $V = 1$ м/с, як це було описано вище. Спочатку обчислювалась усереднена швидкість у горизонтальних шарах. Весь об’єм був розбитий на 20 однакових горизонтальних шарів товщиною 6 мм. Залежність усередненої швидкості від координати *z* показана на рис. 6.21, *а*. Видно, що елементи на дні ємності нерухомі, а біля кришки рухаються зі швидкістю 1 м/с, як і сама верхня частина. Між цими областями існує перехідна область, де усереднена швидкість змінюється. Для цієї області, а саме для $0{,}04 < y < 0{,}10$, обчислювались флуктуації за формулою (6.9) та будувалась функція розподілу (рис. 6.21, *б*). Розрахунки показали, що розподіл є експоненційною залежністю

$$\Phi(r) = Ae^{-r/\varsigma},$$

з такими константами: $\varsigma = 0{,}13 \pm 0{,}02$, $A = 473 \pm 12$, тобто він не є гауссівським, як і у роботі [16].

Також була побудована кореляційна функція (6.10), яка наведена на рис. 6.22. Апроксимація цієї залежності функцією витягнутої експоненти (6.11) методом найменших квадратів дає такі значення констант: $\beta = 0{,}96 \pm 0{,}05$, $\xi = 0{,}014 \pm 0{,}001$.

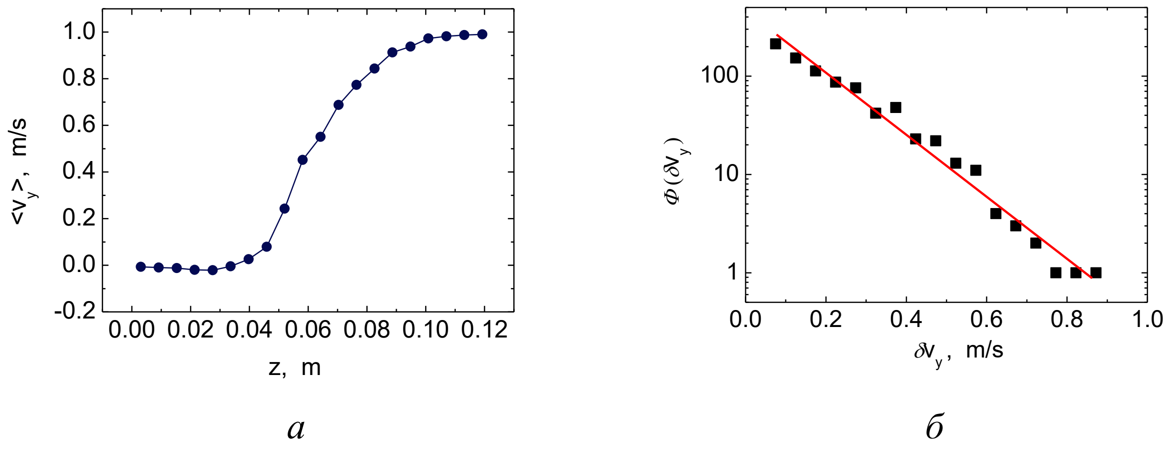


Рис. 6.21. (*а*) Залежність усередненої швидкості елементів $\langle v_y \rangle$ від висоти *z*. (*б*) Розподіл флуктуацій швидкості v_y та його апроксимація експоненційною залежністю.

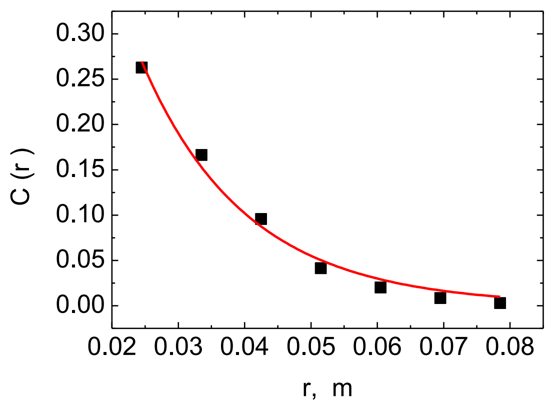


Рис. 6.22. Просторова кореляційна функція флуктуацій швидкості δv_y та апроксимація цієї залежності витягнутою експонентою (6.11).

Таким чином, поле швидкостей у зсувному деформуванні модельного гранульованого середовища має подібні властивості до поля швидкостей у межовій області, а саме, розподіл флуктуацій відносно середнього значення швидкостей має так само експоненційну залежність, а просторово кореляційна функція флуктуацій найкраще апроксимується функцією витягнутої експоненти, щоправда показник β дещо вищий за показник для перехідної зони в районі розлому Сан-Андреас.

6.5. Висновки

1. Розроблено алгоритм на основі методу дискретних елементів та написано комп'ютерну програму для розрахунку динамічних процесів у гранульованому середовищі, утвореному з елементів кубічної форми.
2. Проведено розрахунки зсувного деформування гранульованого середовища при дії постійної сили навантаження. Отримані залежності видів енергії масиву елементів від часу мають стохастичний характер, а їхні спектри є степеневими залежностями, за виключенням пружної енергії. Степеневий характер спектрів свідчить про відсутність виділених частот і про масштабну інваріантність процесу, що є характерним для систем, які перебувають у критичному стані. Ці властивості часових залежностей видів енергій не залежать від початкової упаковки упаковки масиву елементів. Методом детрендового флуктуаційного аналізу досліджено кореляційні властивості часового ряду, що являє собою сили, з якою гранульоване середовище діє на верхню частину ємності. Аналіз показав, що в даному часовому ряді мають місце далекодіючі кореляції.
3. Проведено розрахунки зсувного деформування гранульованого середовища при постійній швидкості зсуву. Для стрибків кінетичної енергії поршня, які можна розглядати, як збурення, що передаються від гранульованої системи до зовнішнього середовища, побудовані розподіли енергії та часову залежність кількості збурень до та після

великих збурень для двох швидкостей деформування та двох масивів з різними розмірами елементів. Аналіз цих залежностей вказує на те, що розподіли енергій збурень мають степеневий характер для всіх випадків, а показник степеня близький до показника степеня у законі Гутенберга-Ріхтера для землетрусів. Щодо форшоків та афтершоків, то їхнє існування залежить від швидкості деформування та розмірів елементів: при великих швидкостях і малих розмірах вони відсутні. Наявні афтершоки затухають з показником степеня близьким до 1, тобто за законом Оморі.

4. Для процесу деформування з постійною швидкістю побудовані розподіли флуктуацій швидкостей елементів та обчислено кореляцію флуктуацій швидкостей. Виявлено подібність розподілів флуктуацій швидкостей у модельному середовища і у сейсмоактивному регіоні в Каліфорнії, який включає в себе розлом Сан Андреас. Також має місце подібність кореляційних функцій: вони в обох випадках є функціями витягнутої експоненти.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі встановлено нові закономірності структурованих геосередовищ на основі розроблених моделей з урахуванням їх дискретної та ієрархічної будови.

1. Показано, що хвильові поля, які виникають у процесі поширення нелінійних збурень у гранульованих середовищах, утворених гранулами сферичної форми, можуть кардинально відрізнятися, в залежності від виду упаковки. Зокрема, при щільній упаковці структурних елементів у середовищі поширюється стійка хвильова структура. Незалежність числа Струхала від розмірів структурних елементів та амплітуд стійких хвильових утворень у масивах регулярної структури дає можливість діагностувати розміри структурних елементів цих масивів за хвильовими швидкостями та спектральними характеристиками хвильових структур.

2. Доведено існування вихрових хвильових структур у процесі поширення хвилі стиснення в шарі гранульованого середовища зі сферичними гранулами, що знаходиться в полі сили тяжіння. На основі кореляційного аналізу визначено місце, момент утворення та тривалість існування цих хвильових структур. Якщо шар перебуває у напруженому стані, то хвильові структури не утворюються, а згасання хвилі стає значно повільнішим. Для процесу поширення хвилі в шарі гранульованої середовища з несферичними гранулами характерним є різке згасання її амплітуди, відсутність хвильових структур, а також суттєва чутливість до початкового напруженого стану. Ці результати отримані за допомогою двовимірних та тривимірних числових розрахунків.

3. За допомогою числового моделювання показано, що деформаційні властивості гранульованих середовищ з пружною, пружнов’язкою та

пружно-пластичною міжгранульною взаємодією при динамічному навантаженні залежать від швидкості деформування, від щільності упаковки та від розмірів гранул. Характерною особливістю діаграм деформування для всіх видів взаємодії структурних елементів є нелінійність та наявність гістерезису. Такі характерні деформаційні властивості є типовими для ряду структурованих гірських порід: пісковиків, вапняків, тощо. Також виявлено прояви колективної поведінки структурних елементів, що виражається у збільшенні деформівності дискретного середовища.

4. Експериментально встановлено, що при збільшенні кратності навантаження гранульованого середовища має місце поступове його ущільнення і після 4-5 навантажень діаграма деформування залишається незмінною. Проведене експериментальне дослідження з деформування дисперсного гранульованого середовища, утвореного елементами двох розмірів при різних співвідношеннях кількості елементів одного розміру, показало, що у всіх випадках діаграми деформування також мають гістерезисний характер, а залишкова деформація залежить від пропорцій кількості різних елементів.

5. Розроблено експериментальну методику вимірювання сили, що діє на окремі гранули на дні гранульованого зразка. В результаті експериментальних та комп'ютерних досліджень встановлено, що розподіл максимального значення сил, з якими гранули діють на дно циліндра в гранульованому середовищі, утвореному сферичними гранулами, при імпульсному навантаженні мають експоненційно згасаючий характер в дапазоні великих сил. Крім того, числове моделювання показало, що експоненційний розподіл сил має місце у всьому зразку і таким чином підтверджується наявність кореляцій міжгранульних сил у процесі його динамічного навантаження. Отримані в розрахунках часові залежності координаційного числа,

параметра орієнтаційного порядку, радіусу кореляції та розподілу сил чітко продемонстрували нерівноважний характер процесу деформування в гранульованому середовищі при імпульсному навантаженні.

6. Розроблено модель ієрархічного структурованого середовища як системи вкладених ангармонічних осциляторів, рівняння руху яких отримано в рамках гамільтонового формалізму. Встановлено, що модель з трьома ієрархічними рівнями має періодичні, квазіперіодичні та хаотичні розв’язки. Коливальні процеси у багаторівневій системі значною мірою визначаються структурним параметром системи. Зокрема, знайдено умови, при яких амплітуда коливань на першому та останньому ієрархічному рівнях можуть бути одного порядку. Серед розв’язків дисипативної моделі трирівневої ієрархічної системи, коли найвищий структурний рівень зазнає дії гармонічної сили, існують стаціонарні режими, для яких розроблено методики амплітудно-частотних кривих. Аналіз амплітудно-частотних кривих показав, що ієрархічна структура в околі резонансів веде себе як суттєво нелінійна система та нелінійний підсилювач сигналу, прикладеного до найвищого рівня ієрархії. Це дозволяє зрозуміти механізм накопичення та перерозподілу пружної енергії у складних геосистемах при сейсмічних подіях. Представлені дослідження також важливі для вивчення сейсмічних процесів у областях зі складною структурою та для забезпечення сейсмічної безпеки складних промислових та цивільних об’єктів.

7. Розроблено модель землетрусів, яка базується на двох фундаментальних принципах: ієрархічній структурі сейсмоактивних областей та концепції самоорганізованої критичності. Модель відтворює основні емпіричні властивості сейсмічних процесів: скейлінгове співвідношення частота-енергія (закон Гутенберга-

Ріхтера), закон Оморі для інтенсивності згасання афтершоків, закон про продуктивність афтершоків, закон Бетта про середнє значення відносної різниці у магнітуді між основним землетрусом і його найбільшим афтершоком, фрактальні розподіли гіпоцентрів (епіцентрів) з степеневими залежностями кількості подій від відстані між гіпоцентрами (епіцентрами) і, нарешті, γ-розподіл для часу очікування. Перевага цієї моделі полягає в тому, що немає необхідності вводити допоміжну неоднорідність для отримання просторового фрактального розподілу землетрусів, як це було зроблено в інших моделях: модель вже враховує природну ієрархічну структуру сейсмічної зони. У моделі керуючими є всього три параметри. Крім того, опис поведінки сейсмічної зони після сильного землетрусу фізично обґрунтовується.

8. Експериментальні дослідження зсувного деформування гранульованого середовища, сформованого з елементів кубічної форми, показали, що для акустичних збурень, які випромінює гранульоване середовище в процесі зсувного деформування, показник степеня в розподілі збурень за енергією (закон Гутенберга-Ріхтера) знаходиться в межах, які характерні для землетрусів. Крім того, для великих акустичних збурень спостерігаються форшоки і афтершоки. Афтершоки затухають за степеневим законом з показником близьким до 1, як у законі Оморі для сейсмічного процесу. Опромінювання гранульованого середовища періодичними хвилями з різними частотами в процесі його деформування продемонструвало, що слабкі збурення впливають на цей процес та існує частота, при якій ефект є максимальним. Розроблено алгоритм управління процесами зсувної деформації гранульованого середовища за допомогою зовнішніх імпульсних збурень, який забезпечує уникнення великих напружень.

9. Розрахунки зсувного деформування гранульованого середовища з гранулами кубічної форми як при дії постійної сили навантаження так і при постійній швидкості показали, що залежності видів енергії масиву елементів від часу мають стохастичний характер, а їхні Фур'є спектри є степеневими залежностями. Степеневий характер спектрів свідчить про відсутність виділених частот і про масштабну інваріантність процесу, що є характерним для систем, які перебувають у критичному стані. Для стрибків кінетичної енергії поршня побудовано розподіли енергії та часову залежність кількості збурень до та після великих збурень. Аналіз цих залежностей вказує на те, що розподіли енергій збурень мають степеневий характер, а показник степеня близький до показника степеня у законі Гутенберга-Ріхтера для землетрусів. Щодо форшоків та афтершоків, то їхнє існування залежить від швидкості деформування та розмірів елементів: при великих швидкостях і малих розмірах вони відсутні. Наявні афтершоки затухають з показником степеня близьким до 1, тобто за законом Оморі. Також виявлено подібність розподілів флуктуацій швидкостей та кореляційних функцій у модельному гранульованому середовищі та у сейсмоактивному регіоні в Каліфорнії, який включає в себе розлом Сан Андреас.

Результати, отримані в дисертаційній роботі, висвітлюють деякі аспекти динамічної поведінки структурованих середовищ, зокрема пояснюють такі властивості як нелінійність, залежність деформаційних властивостей від швидкості деформування, гістерезисний характер діаграм деформування, можливість утворення хвильових структур, тощо. Експерименти та розрахунки зсувного деформування гранульованого середовища продемонстрували статистичну подібність до процесів, що відбуваються у сейсмічно активних регіонах і це відкриває перспективи для подальшого дослідження поведінки такого модельного середовища з метою прогнозування потужних землетрусів та можливостей контрольованого впливу на сейсмоактивне середовище для запобігання виникнення руйнівних наслідків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alexeevskaya, M., Gabrielov, A., Gvishiani, A., Gel’fand, I., Ya, E.: Formal morphostructural zoning of mountain territories. J. Geoph. **43**, 227–233 (1977).
2. Садовский, М.А.: О естественной кусковатости горных пород. Докл. АН СССР. **247**(4), 829–831 (1979).
3. Садовский, М.А., Болховитинов, Л.Г., Писаренко В.Ф.: О свойстве дискретности горных пород. Изв. АН СССР. Физика Земли **12**, 3–18 (1982).
4. Садовский, М.А., Голубева, Т.В., Писаренко В.Ф., Шнирман М.Г.: Характерные размеры горной порды и иерархические свойства сейсмичности. Изв. АН СССР. Физика Земли **2**, 3–15 (1984).
5. Садовский, М.А., Болховитинов, Л.Г., Писаренко, В.Ф.: Деформирование среды и сейсмический процесс. Наука, Москва (1987).
6. Keilis-Borok**,** V.I.**:** The lithosphere of the Earth as a nonlinear system with implications for earthquake prediction**.** Rev**.** of Geoph**. 8(**2), 19–34 (1990)
7. Keilis-Borok, V.I., Soloviev, A.A.: Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction. Springer, Berlin (2003).
8. Ben-Zion, Y. Collective behavior of earthquakes and faults: Continuum–discrete transitions, progressive evolutionary changes, and different dynamic regimes. Rev. Geophys. **46**, RG4006 (2008).
9. Садовский, М.А.: О значении и смысле дискретности в геофизике: В сб.: Дискретные свойства геофизической среды, сс. 5–14. Наука, Москва (1989).
10. Meade, B.J., Hager, B.H., King, R.W.: Block models of present day deformation in Southern California constrained by geodetic measurements Proceedings and Abstracts of SCEC Annual Meeting, p. 96. Oxnard, CA, USA (2002).

11. Billi, A., Salvini, F., Storti, F.: Fractal distribution of particle size in carbonate cataclastic rocks from the core of a regional strike–slip fault zone. J. Structural Geology **25**, 1779–1794 (2003).
12. Billi, A., Storti, F.: Fractal distribution of particle size in carbonate cataclastic rocks from the core of a regional strike–slip fault zone. Tectonophysics **384**, 115–128 (2004).
13. McCaffrey, R.: Block kinematics of the Pacific-North America plate boundary in the southwestern United States from inversion of GPS, seismological, and geologic data, J. Geophys. Res. **110**, B07401 (2005).
14. Becker, T.W., Hardebeck, J.L., Anderson, G.: Constraints on fault slip rates of the southern California plate boundary from GPS velocity and stress inversions Geophys. J. Int. **160**, 634–650 (2005).
15. Loveless, J.P., Meade, B.J.: Stress Modulation on the San Andreas Fault by Interseismic Fault System Interactions. Geology **39**(11), 1035–1038 (2011).
16. Meroz, Y., Meade, B.J.: Intermittent Granular Dynamics at a Seismogenic Plate Boundary. Phys. Rev. Lett. **119**, 138501 (2017).
17. Асан-Джалалов, А.Г., Кузнецов, В.В., Киссин, И.Г., Николаев, А.В., Николаевский В.Н., Урдуханов, Р.И.: Способ разработки обводненного нефтяного месторождения. Описание изобретения к авторскому свидетельству SU №1459301, кл. Е 2 В 43/00 (1986).
18. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. Недра, Москва (1996).
19. Вильчинская, Н.А.: Волна переупаковки песков и акустическая эмиссия. Докл.АН СССР **262**(5), 569–572 (1982).
20. Вильчинская, Н.А., Николаевский, В.Н.: Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов. Изв. АН СССР. Физика Земли **5**, 91–100 (1984).
21. Gilcrist, L.E., Baker, G.S., Sen, S.: Preferred frequencies for three unconsolidated earth materials. Appl. Phys. Lett. **91**, 254103 (2007).

22. Кочарян, Г.Г., Спивак, А.А.: Динамика деформирования блочных массивов горных пород. ИКЦ Академкнига, Москва (2003).
23. Гарнов, В.В., Спивак, А.А.: Деформирование блочной среды при подземных ядерных взрывах. ФГВ. **40**(6), 58–65 (2004).
24. Кочарян Г.Г.: Геомеханика разломов. ГЕОС, Москва (2016).
25. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Моделювання динаміки дискретного середовища. Доповіді НАН України. 7, 113-116 (1999).
26. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості нелінійних збурень, що виникають в блокових середовищах різної структури під дією імпульсних навантажень. Доповіді НАН України. 5, 138-142 (2002).
27. **Микуляк, С.В.**, Даниленко, В.А.: Особливості поширення нелінійних хвиль в структурованих середовищах та використання їх для оцінки параметрів структури. Геофізичний журнал. **26**(3), 70-76 (2004).
28. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**, Скуратівський С.І.: Побудова моделі дискретного ієрархічного геофізичного середовища з урахуванням нелінійної взаємодії між елементами структури. Доповіді НАН України. 3, 110-116 (2006).
29. **Микуляк, С.В.**: Построение одномерных дискретных иерархических моделей геофизической среды и их исследование. Физическая мезомеханика. **9**(5), 63-67 (2006).
30. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості утворення та поширення солітонів в пружно-пластичному структурованому середовищі. Доповіді НАН України. 12, 102-105 (2006).
31. **Микуляк, С.В.**: Моделирование процессов динамического деформирования дискретной среды под воздействием импульсной нагрузки. Физическая мезомеханика **10**(6), 69-74 (2007).
32. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп’ютерне моделювання процесів динамічного деформування структурованого геофізичного середовища. Доповіді НАН України. 2, 123-129 (2008).

33. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп’ютерне моделювання процесів деформування структурованого геофізичного середовища з пружнов’язкою взаємодією між елементами структури. Доповіді НАН України. 6, 113-118 (2009).

34. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп’ютерне моделювання двовимірного процесу деформування структурованого геофізичного середовища з пружнопластичною взаємодією між елементами структури. Доповіді НАН України. 8, 96-100 (2009).

35. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Моделювання процесів динамічного деформування структурованого геофізичного середовища з пружнопластичною взаємодією елементів структури. Геофізичний журнал. **32**(3), 60-65 (2010).

36. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Розподіл сил у структурованому середовищі в полі сили тяжіння. Доповіді НАН України. 11, 96-99 (2011).

37. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості поширення нелінійних хвиль у сипкому середовищі. Доповіді НАН України. 2. 95-98 (2012).

38. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**, Поляковський В.О.: Експериментальне дослідження динамічного деформування структурованого геофізичного середовища. Доповіді НАН України. 10, 109-115 (2013).

39. **Mykulyak, S.V.**: Features of nonlinear wave propagation in a layer of granular medium. Phys. Mesomech. **17**(2) 157-162 (2014).

40. **Микуляк, С.В.**, Поляковський В.О.: Експериментальне дослідження динамічного деформування структурованого середовища під дією імпульсного навантаження. Геофізичний журнал. **36**(2), 120-126 (2014).

41. Danylenko, V.A., **Mykulyak, S.V.**, Skurativskyi, S.I.: Energy redistribution in hierarchical systems of oscillators. Eur. Phys. J. B. **88**, 143 (2015).

42. Danylenko, V.A., **Mykulyak, S.V.**, Polyakovskyi, V.O., Kulich, V.V., Oleynik, I.I.: Force distribution in a granular medium under dynamic loading. Phys. Rev. E. 96, 012906 (2017).

43. **Mykulyak, S.V.**, Skurativska, I.A., Skurativskyi, S.I.: Forced nonlinear vibrations in hierarchically constructed media. Intern. J. Non-Lin. Mech. 98, 51–57 (2017).

44. **Mykulyak, S.V.**: Hierarchical block model for earthquakes. Phys. Rev. E. **97**, 062130 (2018).

45. **Mykulyak, S.**, Kulich, V., Skurativskyi, S.: Simulation of shear motion of angular grains massif via the discrete element method. In: Hu, Z., Petoukhov, S., Dychka, I., He, M. (eds.) Advances in Intelligent Systems and Computing, pp. 74–81. Springer, (2019).

46. **Микуляк С.В.**: Блоково-ієрархічна модель сейсмічних процесів. Доповіді НАН України. 11, 55-62 (2018).

47. **Mykulyak S.V.**, Polyakovskyi V.O., Skurativskyi S.I.: Statistical properties of shear deformation of model block media and analogies with natural seismic processes. arXiv: submit/2444622 [physics.geo-ph] 24 Oct 2018.

48. **Mykulyak, S.V.**, Danylenko, V.A., Vakhnenko, V.O.: The wave spectral evolution in a discrete medium with nonlinearity. Proceedings of Tenth International Congress on Sound and Vibration, vol.6, pp.3573-3579. Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003.

49. **Микуляк, С.В.**: Компьютерное моделирование динамического деформирования гранулированной среды под действием импульсной нагрузки. В: Физика импульсных разрядов в конденсированных средах, Материалы XII Международной научной школы семинара, с.177. Николаев, 22 –26 августа 2005.

50. **Микуляк, С.В.**: Компьютерное моделирование процессов динамического деформирования структурированных геоматериалов. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы

XVII Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича, с.с.195-197. ИИПТ НАН Украины, Николаев, 21-25 августа 2007.

51. **Микуляк, С.В.**: Зависимость деформационных свойств структурированных геоматериалов от характера взаимодействия между элементами структуры. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XVIII Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича, с.214-216. Алушта, 17-23 сентября 2007.
52. **Микуляк, С.В.**: Распространение волн сжатия в структурированной среде. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XIX Международной научной школы им.акад. С.А. Христиановича, с.228. Алушта, 21-27 сентября 2009.
53. **Mykulyak, S.V.**: Computer modeling of nonlinear dynamic processes in structured geophysical media. In: Geodynamical Phenomena: From Observations and Experiments to Theory and Modelling. Proceedings of International Conference, p.p.115-117. Kiev, September 20-24 2010.
54. **Микуляк, С.В.**: Нелинейные волны в сыпучей среде. Компьютерное моделирование. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XXI Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича, с.с.252-254. Алушта, 19-25 сентября 2011.
55. **Микуляк, С.В.**, Поляковський, В.О.: Експериментальне дослідження поведінки гранульованого середовища під дією імпульсного навантаження. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XXII Международной научной школы им.акад. С.А. Христиановича, с.с.240-242. Алушта, 21-27 сентября 2012.
56. **Mykulyak S.V**., Skurativskyi S.I.: Peculiarities of dynamical phenomena in hierarchical systems of oscillators. In: Nonlinear analysis and applications.

Proceedings of 3th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery S. Melnik, p.43. Kyiv, Ukraine, 1–3 April 2015.

57. **Mykulyak, S.**, Skurativskyi, S.: Nonlinear dynamics of the system of hierarchically coupled oscillators with power law interactions. In: Book of Abstracts. International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPhA-2017), c.c.42-43. Cherkasy, Ukraine, 17-19 October 2017.

58. **Микуляк, С.В.**, Куліч, В.В.: Статистичні властивості процесу зсувного деформування гранульованого середовища. В: Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Матеріали Всеукраїнської наукової конференції. с.с. 22-23. Ворохта, 27лютого-2 березня (2018).

59. Kulich, V., **Mykulyak, S.**: Simulation of shear deformation in granular massif. In: Nonlinear analysis and applications. Proceedings of 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery S. Melnik, p.43. Kyiv, Ukraine, 4–6 April 2018.

60. Нагорний В.П., Микуляк С.В., Венгрович Д.Б., Скуратівський С.І., Бєлінський І.В., Денисюк, І.І., Куліч, В.В., Шеремет, Г.П. Динамічні процеси в геофізичних середовищах: теорія, експеримент, технології. НАН України, Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна, Київ (2016).

61. Садовский М.А., Писаренко В.Ф., Родионов В.Н. От сейсмологии к геомеханике. О модели геофизической среды // Вестник АН СССР. 1983. Вып. 1. – С. 82–88.

62. Seers, T.D., Hodgetts D.: Probabilistic constraints on structural lineament best fit plane precision obtained through numerical analysis. J. Struct. Geol. **82**, 37–47 (2016).

63. Barton, C.C.: Fractal analysis of scaling and spatial clustering of fractures In: Barton, C.C., La Pointe, P.R. (eds.) Fractals in the Earth sciences, pp.141–178. Springer, Science+Business Media, New York (1995).

64. Meade, B.J., Hager, B.H.: Block models of crustal motion in southern California constrained by GPS measurements. J. Geoph. Res. **110**, B03403 (2005).

65. Габриелов А.И., Кейлис-Борок В.И., Левшина Т.А., Шапошников В.А.: Блоковая модель динамики литосферы. Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М., Наука, 168–178 (1986).

66. Gabrielov, A.M., Levshina, T.A., Rotwain, I.M.: Block model of earthquake sequence. Physics of the Earth and Planetary Interiors **61**, 18–28 (1990).

67. Gabrielov, A.M., Keilis-Borok, V.I., Pinsky, V., Podvigina, O.M., Shapira, A., Zheligovsky, V.A.: Fluids migration and dynamics of a blocks–and–faults system. Tectonophysics **429**, 229–251 (2007).

68. Keilis-Borok, V.I., Rotwain, I.M., Soloviev, A.A.: Numerical modeling of block structure dynamics: dependence of a synthetic earthquake flow on the structure separateness and boundary movements. J. Seismol. **1** (2), 151–160 (1997).

69. Rozenberg, V., Soloviev, A.: Considering 3D Movements of Blocks in the Model of Block Structure Dynamics. In: Fourth Workshop on Non-Linear Dynamics and Earthquake Prediction, H4.SMR/1011–3. ICTP, Trieste, 6–24 October 1997.

70. Gabrielov, A., Soloviev, A.: Modelling of Block Structure Dynamics. In: Fourth Workshop on Non-Linear Dynamics and Earthquake Prediction, ICTP, H4.SMR/1011–1. ICTP, Trieste, 6–24 October 1997.

71. Soloviev, A.A.: Model of Block Structure Dynamics and its Application to Study Lithosphere Block Dynamics and Seismicity. In: Sixth Workshop on Non–Linear Dynamics and Earthquake Prediction, ICTP, H4.SMR/1330–3. ICTP, Trieste, 15–24 October 2001.

72. Panza, G.F., Soloviev, A.A., Vorobieva, I.A.: Numerical modelling of block–structure dynamics: application to the Vrancea region. Pure Appl. Geophys. **149**, 313–336 (1997).

73. Soloviev, A.A., Vorobieva, I.A., Panza, G.F.: Modelling of block–structure dynamics: parametric study for Vrancea region. Pure Appl. Geophys. **156**, 395–420 (1999).
74. Rundquist, D.V., Soloviev, A.A.: Numerical modeling of block structure dynamics: an arc subduction zone. Phys. Earth Planet. Inter. **111**, 241–252 (1999).
75. Ismail–Zadeh, A.T., Keilis-Borok, V.I., Soloviev, A.A.: Numerical modelling of earthquake flow in the southeastern Carpathians: effect of a sinking slab. Phys. Earth Planet. Inter. **111**, 267–274 (1999).
76. Starostenko, V.I., Danylenko, V.A., Vengrovich, D.B., Kutas, R.I., Stephenson, R.A., Stovba, J.N., Kharitonov, O.M.: A new geodynamical–thermal model of rift evolution, with application to the Dnieper-Donets Basin, Ukraine. Tectonophysics. **313**, 29–40 (1999).
77. Любушин, А.А: Модель сейсмического процесса в блоковой среде. В: Современные методы интерпретации сейсмологических данных. Вычислительная сейсмология, выпуск 24, сс. 50–61. Наука, Москва (1991).
78. Беляков, В.Г., Леонтьев, А.В., Мирошниченко, Н.А., Рубцова, Е.В., Ярославцев, А.Ф.: Система вероятностно-временных моделей динамики блочного массива. ФТПРПИ **3**, 42–53 (2000).
79. Blanter, E.M., Shnirman, M.G., Le Mouel, J.L., Allegre, C.J.: Scaling laws in blocks dynamics and dynamic self-organized criticality. Phys. Earth. Planet. Int. **99**, 295–307 (1997).
80. Blanter, E.M., Shnirman, M.G., Le Mouel, J.L.: Hierarchical model of seismicity: Scaling and predictability. Phys. Earth Planet. Int. **103,** 135–150 (1998).
81. Blanter, E.M., Shnirman, M.G.: Mixed hierarchical model of seismicity: Scaling and prediction. Phys. Earth Planet. Int. **111**, 295–303 (1999).
82. Blanter, E.M., Shnirman, M.G.: Simple hierarchical systems: Stability, SOC and catastrophic behavior. Phys. Rev. E **55**, 6397–6403 (1997).

83. Blanter, E.M., Shnirman, M.G., Le Mouel, J.L.: Temporal variation of predictability in a hierarchical model of dynamical self-organized criticality. Phys. Earth Planet. Int. **111**: 317–327 (1999).

84. Gabrielov, A. M., Keilis-Borok, V.I., Zaliapin, I. V., Newman, W. I.: Critical transitions in colliding cascades. Phys. Rev. E **62**, 237–249 (2000).

85. Gabrielov, A.M., Zaliapin, I.V., Newman, W.I., Keilis-Borok, V.I.: Colliding cascade model for earthquake prediction. Geophys. J. Int. **143**(2), 427–437 (2000).

86. Vere–Jones, D.: A branching model for crack propagation. Pure Appl. Geoph. **114**, 711–725 (1976).

87. Vere–Jones, D.: Statistical theory of crack propagation. Math. Geology **9**(5), 455–481 (1977).

88. Kagan, Y.Y.: Stochastic model of earthquake fault geometry. Geophys. J. R. astr. Soc. **71**, 659–691 (1982).

89. Burridge, R., Knopoff, L. Model and theoretical seismicity. Bulletin of Seismol. Soc. Am. **57**, 341–371(1967).

90. Carlson, J.M., Langer, J.S.: Mechanical model of an earthquake fault. Phys. Rev. A **40**(11), 6470–6484 (1989).

91. Carlson, J.M., Langer, J.S.: Properties of Earthquakes Generated by Fault Dynamics. Phys. Rev. Lett. **62**(22), 2632–2635 (1989).

92. Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K.: Self-organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise. Physical Review Letters. **59**(4), 381–384 (1987).

93. Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K.: Self-organized criticality. Phys. Rev. A. **38**(1), 364–374 (1988).

94. Tang, C., Bak P.: Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena, Phys. Rev. Lett. **60**, 2347 (1988).

95. Jensen, H.J.: Self-organized criticality. Cambridge University Press, Cambridge (1998).

96. Pruessner, G.: Self-organized criticality. Theory, Models and Characterization. Cambridge University Press, Cambridge (2012).

97. Sornette, A., Sornette, D.: Self-organized Criticality and Earthquakes. Europhys. Lett. **9**(3), 197–202 (1989).
98. Feder, H.J.S., Feder, J.: Self-organized Criticality in a Stick–Slip Process. Geophys Rev. Lett. **66**(20), 271–2672 (1991).
99. Bak, P., Tang, C.: Earthquakes as a self-organized critical phenomenon. J. Geoph. Res. **94**(B11), 15635–15637 (1989).
100. Rundle, J.B., Turcotte, D.L., Shcherbakov, R, Klein, W., Sammis, C.: Statistical physics approach to understanding the multiscale dynamics of earthquake fault systems. Rev. Geophys. **41**(4), 1019(30) (2003).
101. Bhattacharya, K., Manna, S.S.: Self-organized critical models of earthquakes. Physica A **384**, 15–20 (2007).
102. Shcherbakov, R., Turcotte, D.L., Rundle, J.B.: Kanamori, H. (ed.) Complexity and Earthquakes in Treatise on Geophysics, 2nd ed., Vol. 4, pp. 627–653. Elsevier, Amsterdam (2015).
103. Rundle, J.B., Jackson, D.D.: Numerical simulation of earthquake sequences. Bull. Seismol. Soc. Am. **67**(5), 271–1377 (1977).
104. Brown, S.R., Scholz, C.H., Rundle, J.B.: A simplified spring-block model of earthquakes. Geophys. Res. Lett. **18**(2), 271–218 (1991).
105. Rundle, J.B., Brown, S.R.: Origin of Rate Dependence in Frictional Sliding. J. Stat. Phys. **65**(1/2), 403–412 (1991).
106. Nakanishi, H.: Cellular–automaton model of earthquakes with deterministic dynamics. Phys. Rev. A **41**, 7086–7089 (1990).
107. Nakanishi, H.: Statistical properties of the cellular-automaton model for earthquakes. Phys. Rev. A **43**, 6613–6621 (1991).
108. Olami, Z., Feder, H.J.S., Christensen K.: Self-Organized Criticality in a Continuous, Nonconservative Cellular Automaton Modeling Earthquakes. Phys. Rev. Lett. **68**(8), 1244–1247 (1992).
109. Christensen, K., Olami, Z.: Variation of the Gutenberg-Richter b values and non–trivial temporal correlations in a spring-block model for earthquakes. J. Geophys. Res. **97**, 8729–8735 (1992).

110. Olami, Z., Christensen, K.: Temporal correlations, universality and multifractality in a spring–block model of earthquakes. Phys. Rev. A **46**, 1720–1723 (1992).

111. Barriere, B., Turcotte, D.L.: A scale–invariant cellular-automata model for distribited seismicity. Geophys. Res. Lett. **18**(11), 2011–2014 (1991).

112. Barriere, B., Turcotte, D.L.: Seismicity and self-organized criticality. Phys. Rev. E **49**(2), 1151–1160 (1994).

113. Huang, Y., Saleur, H., Sammis, C., Sornette, D.: Precursors, aftershocks, criticality and self-organized criticality. Europhys. Lett. **41**(1), 43–48 (1998).

114. Ito, K., Matsuzaki, M.: Earthquakes as Self-organized Critical Phenomena. J. Geoph. Res. **95**(B5), 6853–6860 (1990).

115. Ito, K.: Towards a new view of earthquake phenomena. Pure Appl. Geophys. **138**, 531–548 (1992).

116. Vasconcelos, G.L., Vieira, M.D., Nagel, S.R.: Phase-transitions in a spring block model of earthquake. Physica A **191**, 69–74 (1992).

117. Huang, J., Narkounskaya, G., Turcotte, D.L.: A cellular automata, slider-block model for earthquakes. Demonstration of self-organized criticality for a 2D system. Geophys. J. Res. Int. **111**, 259–269 (1992).

118. Huang, J., Turcotte, D.L:. Chaotic seismic faulting with a mass-spring model and velocity-weakening friction. Pure and Appl. Geophys. **138**(4), 569–589 (1992).

119. Narkounskaya, G., Huang, J., Turcotte, D.L.: Chaotic and selforganized critical behavior of a generalized slider-block model. J. Stat. Phys. **67**, 1151–1183 (1992).

120. Wissel, F., Drossel, B.: Transient and stationary behavior of the Olami-Feder-Christensen model. Phys. Rev. E **74**(6): 066109 (2006)

121. Abaimov, S.G., Turcotte, D.L., Rundle, J.B.: Recurrence-time and frequency-slip statistics of slip events on the creeping section of the San

Andreas Fault in central California. Geophys. J. Intern. **170**(3), 1289–1299 (2007).

122. Abaimov, S.G., Turcotte, D.L., Shcherbakov, R., Rundle, J.B., Yakovlev, G., Goltz, C., Newman, W. I.: Earthquakes: Recurrence and interoccurrence times. Pure Appl. Geophys. **165**(3–4), 777–795 (2008).
123. Abaimov, S.G., Tiampo, K.F., Turcotte, D.L., Rundle, J.B.: Recurrent frequency-size distribution of characteristic events. Nonlin. Proc. Geophys. **16**(2), 333–350 (2009).
124. Baiesi, M.: Correlated earthquakes in a self-organized model. Nonlin. Proc. Geophys. **16**, 233–240 (2009).
125. Ceva, H.: Influence of defects in a coupled map lattice modeling earthquakes. Phys. Rev. E **52**, No.1, 154–158 (1995)
126. Bach, B., Wissel, F., Drossel, B. Olami-Feder-Christensen model with quenched disorder. Phys. Rev. E **77**, 067101 (2008).
127. Serino, C.A., Tiampo, K.F., Klein, W.: New approach to Gutenberg-Richter scaling. Phys. Rev. Lett. **106**, 108501 (2011).
128. Dominguez, R., Tiampo, K.F., Serino, C.A., Klein, W.: Scaling of earthquake models with inhomogeneous stress dissipation. Phys. Rev. E **87**, 022809 (2013).
129. Kazemian, J., Tiampo, K. F., Klein, W., Dominguez, R. Foreshock and aftershocks in simple earthquake models. Phys. Rev. Lett., **114**, 088501 (2015).
130. Ramos, O., Altshuler, E., Maløy, K.J.: Quasiperiodic events in an earthquake model. Phys. Rev. Lett. **96**, 098501 (2006).
131. Jagla, E.A.: Realistic spatial and temporal earthquake distributions in a modified Olami-Feder-Christensen model. Phys. Rev. E **81** (2010).
132. Howell D., Behringer, R.P., Veje, C.: Stress Fluctuations in a 2D Granular Couette Experiment: A Continuous Transition. Phys. Rev. Lett. **82**(26), 5241–5244 (1999).

133. Blair, D.L., Mueggenburg, N.W., Marshall, A.H., Jaeger, H.M., Nagel, S.R.: Force distributions in three-dimensional granular assemblies: Effects of packing order and interparticle friction. Phys. Rev. E. **63**, 041304 (2001).

134. Erikson, J.M., Mueggenburg, N.W., Jaeger, H.M., Nagel, S.R.: Force distributions in three-dimensional compressible granular packs. Phys. Rev. E **66**, 040301 (2002).

135. Andreotti, B., Forterre, Y., Pouliquen, O.: Granular Media Between Fluid and Solid. Cambridge University Press, Cambridge (2013).

136. Liu, C.–h., Nagel, S.R., Schecter, D.A., Coppersmith, S.N., Majumdar, S., Narayan, O., Witten, T.A.: Force Fluctuations in Bead Packs. Science **269**, 513–515 (1995).

137. Duran, J.: Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials. Springer, New York (2000).

138. Behringer, R.P., Howell, D., Kondic, L., Tennakoon, S., Veje, C.: Predictability and granular materials. Physica D **133**, 1–17 (1999).

139. Majmudar, T. S. and Behringer, R. P.: Contact force measurements and stress–induced anisotropy in granular materials. Nature **435**, 1079–1082 (2005).

140. Zuriguel, I., Mullin, T.: The role of particle shape on the stress distribution in a sandpile. Proc. R. Soc. A, Math. Phys. Eng. Sci. **464**, 99–116 (2008)

141. Zhang, J**,** Majmudar, T.S.**,** Tordesillas, A.**,** Behringer, R.P.**:** Statistical properties of a 2D granular material subjected to cyclic shear**.** Granul. Matter **12**(2), 159–172 (2010).

142. Zhang, L., Wang, Y., Zhang, J.: Force-chain distributions in granular systems. Phys. Rev. E **89**, 012203 (2014).

143. Radjai, F., Jean, M., Moreau, J.J., Roux S.: Force Distributions in Dense Two-dimensional Granular Systems. Phys. Rev. Lett. **77**(2), 274–277 (1996).

144. Radjai, F., Roux, S., Moreau, J.J.: Contact forces in a granular packing. Chaos **9**(3), 544–550 (1999).

145. Snoeijer, J.H., Hecke, M., Somfai, E., Saarloos W.: Force and weight distributions in granular media: Effects of contact geometry. Physical Review E **67**, 030302 (2003).

146. Lemaitre, L.A., Carlson, J. M.: Spatial force correlations in granular shear flow. I. Numerical evidence. Phys. Rev. E **76**, 021302 (2007).

147. Mueth, D.M., Jaeger, H.M., Nagel, S.R.: Force distribution in a granular medium. Physical review E **57**(3), 3164–3169 (1998).

148. Lovoll, G., Maloy, K.J., Flekko E.G.: Force measurements on static granular materials. Phys. Rev. E **60**(5), 5872–5878 (1999).

149. Miller, B., O'Hem, C., Behringer, R.P.: Stress Fluctuations for Continuously Sheared Granular Materials. Phys. Rev. Let. **77**(15), 3110–3113 (1996).

150. Antony, S.J.: Evolution of force distribution in three-dimensional granular media. Phys. Rev. E **63**, 011302 (2001).

151. Makse, H.A., Gland, N., Johnson, D.L., Schwartz, L.M.: Why Effective Medium Theory Fails in Granular Materials. Phys. Rev. Lett. **83**(24), 5070–5073 (1999).

152. Silbert, L.E., Grest, G.S., Landry J.W.: Statistics of the contact network in frictional and frictionless granular packings. Phys. Rev. E **66**, 061303 (2002).

153. Radjai, F., Wolf, D.E., Jean, M., Moreau, J.J.: Bimodal Character of Stress Transmission in Granular Packings. Phys. Rev. Lett. **80**(1), 61–64 (1998).

154. Lois, G., Lemaître, A., Carlson J. M.: Spatial force correlations in granular shear flow. I. Numerical evidence. Phys. Rev. E **76**, 021302 (2007).

155. Iikawa, N., Bandi, M.M., Katsuragi, H.: Force-chain evolution in a two-dimensional granular packing compacted by vertical tappings. Phys. Rev. Lett. **116**, 032901 (2016).

156. Zhou, Y., Wildman, R.D., Huntley, J.M.: Measurement of the mechanical properties of granular packs by wavelength–scanning interferometryProc. R. Soc. London, Ser. A **466**, 789–808 (2010).

157. Ciamarra, M.P., Lara, A.H., Lee, A.T., Goldman, D.I., Vishik, I., Swinney H.L.: Dynamics of Drag and Force Distributions for Projectile Impact in a Granular Medium. Phys. Rev. Lett. **92**(19), 194301 (2004).

158. Hurley, R.C.**,** Lim, K.W., Andrade, J.E. Grain–scale measurements during low velocity impact. In: Iskander, M., Bless, S., Omidvar, M. (eds.) Granular Media. Rapid Penetration into Granular Media: Visualizing the Fundamental Physics of Rapid Earth Penetration, pp. 201–318. Elsevier, Amsterdam (2015).

159. Brujic, J., Edwards, S.F., Hopkinson, I., Makse, H.A.: 3D bulk measurements of the force distribution in a compressed emulsion system. Physica A **327**, 207–220 (2003).

160. Zhou, J., Long, S., Wang, Q., Dinsmore, A. D.: Measurement of Forces Inside a Three-dimensional Pile of Frictionless Droplets. Science **312**, 1631–1633 (2006).

161. Mukhopadhyay, S., Peixinho, J.: Packings of deformable spheres. Phys. Rev. E **84**, 011302 (2011).

162. Brodu, N., Dijksman, J.A., Behringer, R.P.: Spanning the scales of granular materials through microscopic force imaging. Nat. Commun. **6**, 6361 (2015).

163. Saadatfar, M., Sheppard, A.P., Senden, T.J., Kabla, A.J.: Mapping forces in a 3D elastic assembly of grains. J. Mech. Phys. Solids **60**, 55 (2012).

164. Hurley, R. C., Hall, S.A. Andrade, J.E., Wright, J.: Phys. Rev. Lett. **117**, 098005 (2016).

165. Liu, C., Nagel, S.R.: Sound in Sand. Phys. Rev. Lett. **68**(15), 2301–2304 (1992).

166. Liu, C., Nagel S.R.: Sound in a granular material: Disorder and nonlinearity. Physical Review B **48**(21), 15646–15650 (1993).

167. Liu, C., Nagel, S.R.: Sound and vibration in granular materials. J. Phys.: Condens. Matter **6**, A433–A436 (1994).

168. Jia, X., Caroli, C., Velicky, B.: Ultrasound Propagation in Externally Stressed Granular Media. Phys. Rev. Lett. **82**(9), 1863–1866 (1999).

169. Owens, E.T., Daniels, K.E.: Sound propagation and force chains in granular materials, Europhys. Lett. **94**(5), 54005 (2011).

170. Hostler, S.R, Brennen, C.E.: Pressure wave propagation in a granular bed. Phys. Rev. E **72**(3) 031303 (2005).

171. Anfosso, J., Gibiat V.: Elastic wave propagation in a three-dimensional periodic granular medium. Europhys. Lett. **67**(3), 376–382 (2004).

172. Jia. X.: Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media. Phys. Rev. Lett. **93**(15), 154303 (2004)

173. Somfai, E., Roux, J. N., Snoeijer, J.H., Hecke, M., and Saarloos, W.: Elastic wave propagation in confined granular systems. Phys. Rev. E **72**(2), 021301 (2005)

174. Вильчинская, Н.А.: Волна переупаковки песков и акустическая эмиссия. ДАН СССР **262**(3), 568–572 (1982).

175. Вильчинская, Н.А., Николаевский, В.Н.: Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов. Изв. АН СССР. Физика Земли **5**, 91–100 (1984).

176. Sen, S., Sinkovits, R.S.: Sound propagation in impure granular columns. Phys. Rev. E **54**(6), 6857–6865 (1996).

177. Velicky, B., Caroli, C.: Pressure dependence of the sound velocity in a two-dimensional lattice of Hertz-Mindlin balls: Mean–field description. Phys. Rev. E **65**, 021307–1–021307–14 (2002).

178. Makse, H.A., Gland, N., Johnson, D.L., Schwartz, L.: Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics. Phys. Rev. E **70**(6), 061302 (2004).

179. Mouraille, O., Mulder, W.A., Luding, S.: Sound wave acceleration in granular materials. J. Stat. Mech. **7**,P07023 (2006).

180. Mouraille, O. and Luding, S.: Sound wave propagation in weakly polydisperse granular materials, Ultrasonics **48**(6–7), 498–505 (2008).

181. Nesterenko, V.F.: Dynamics of Heterogenous Materials (Shock Wave and High Pressure Phenomena). Springer, New York (2001).

182. Job, S., Melo, F., Sokolow, A., Sen, S.: Solitary wave trains in granular chains: experiments, theory and simulations. Granul. Matter **10**(1), 13–20 (2007).

183. Sen, S., Manciu, M., Sinkovits, R.S., Hurd, A.J.: Nonlinear acoustics in granular assemblies. Granul. Matter **3**, 33–39 (2001).

184. Awasthi, A.P., Smith, K.J., Geubelle, P.H., Lambros J.: Propagation of solitary waves in 2D granular media: A numerical study. Mech. Materials **54**, 100–112 (2012).

185. Leonard, A., Fraternali F., Daraio C.: Directional wave propagation in a highly nonlinear square packing of spheres. Experim. Mech. **53**(3), 327–337 (2013).

186. Manjunath, M., Awasthi, A., Geubelle, P.: Wave propagation in 2D random granular media. Phys. D **266**(1), 42–48 (2014).

187. Awasthi, A., Wang, Z., Broadhurst, N., Geubelle, P.: Plane wave propagation in 2D and 3D monodisperse periodic granular media. Granul. Matter **17**(1), 21–31 (2015).

188. Evesque, P., Rajchenbach, J.: Instability in a Sand Heap. Phys. Rev. Lett. **62**(1), 44–46 (1989).

189. Laroche, C., Douady, S., Fauve, S.: Convective flow of granular masses under vertical vibrations. J. Phys. France **50**(7), 699–706 (1989).

190. Knight, J.B., Ehrichs, E.E., Kuperman, V.Yu., Flint J.K., Jaeger H.M., Nagel, S.R.: Experimental study of granular convection. Phys. Rev. E **54**(5), 5726–5738 (1996).

191. Wassgren C.R., Vibration of granular materials. Ph.D. thesis. California Institute of Technology (1997).

192. Balescu, R.: Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto (1975).

193. Gell–Mann, M., Tsallis, C.: Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications. Oxford University Press, Oxford (2004).

194. Олемской, А.И.: Синергетика сложных систем: Феноменология и статистическая теория. КРАСАНД, Москва (2009).

195. Brilliantov, N.V., Pöschel, T.: Kinetic Theory of Granular Gases. Oxford University Press, Oxford (2004).

196. Mehta, A.: Granular Physics. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, San Paulo (2007).

197. Umbanhowar, P.B., Melo, F., and Swinney, H.L.: Localized excitations in a vertically vibrated layer. Nature **382**, 793–796 (1996).

198. Falcon, E., Wunenburger, R., Evesque, P., Fauve, S., Chabot, C., Garrabos, Y., Beysens, D.: Cluster formation in a granular medium fluidized by vibrations in low gravity. Phys. Rev. Lett. **83**(2), 440—443 (1999).

199. Medved, M., Dawson, D., Jaeger, H.M., Nagel, S.R.: Convection in horizontally vibrated granular material. Chaos **9**(3), 691–648 (1999).

200. Painter, B. and Behringer, R.P.: Substrate interactions, effects of symmetry breaking, and convection in a 2D horizontally shaken granular system. Phys. Rev.Lett. **85**(16), 3396–3399 (2000).

201. Aranson, I.S., Meerson, B., Sasorov, P.V., Vinokur, V.M.: Phase separation and coarsening in electrostatically driven granular media. Phys. Rev. Lett. **88**(20), 204301 (2002).

202. Goldhirsch, I.: Rapid granular flows. Ann. Rev. Fluid Mech. **35**, 267–293 (2003).

203. Goldhirsch, I., van Noije, T. P. C.: Green-Kubo relations for granular fluids. Phys. Rev. E **61**(3) 3241–3244 (2000).

204. Dufty, J. W., Brey, J. J.: Green-Kubo expressions for a granular gas. J.Stat. Phys. **109**(3–4), 433–448 (2002).

205. Goldshtein, A. and Shapiro, M.: Mechanics of collisional motion of granular materials, Part I: General hydrodynamic equations. J. Fluid Mech. **282**, 75–114 (1995).

206. Sela, N., Goldhirsch, I.: Hydrodynamic equations for rapid flows of smooth inelastic spheres. J. Fluid Mech. **361**, 41–74 (1998).
207. Brey, J.J., Dufty, J.W., Kim, C.S., Santos, A.: Hydrodynamics for granular flow at low density. Phys. Rev. E **58**(4), 4638–4653 (1998).
208. van Noije, T.P.C., Ernst, M.H., Brito R.: Ring kinetic theory for an idealized granular gas. Physica A **251**, 266–283 (1998).
209. Ben–Naim, E., Krapivsky, P.L.: The Inelastic Maxwell Model. In: Hinrichsen, H., Wolf, D.E. (ed.). The Physics of Granular Media, pp. 89–115. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KgaA, Weinheim, Germany (2005).
210. Edwards, S.F., Oakeshott, R.B.S.: Theory of powders. Physica A **157**, 1080–1090 (1989).
211. Mehta, A., Edwards, S.F.: Statistical mechanics of powder mixtures. Physica A **157**, 1091–1100(1989).
212. Edwards, S.F.: The mathematics of powders. IMA Bulletin **25**, 94–96 (1989).
213. Blumenfeld, R., Edwards, S.F.: Granular statistical mechanics – a personal perspective. Eur. Phys. J. Special Topics **223**, 2189–2204 (2014).
214. Henkes, S., O’Hern, C.S., Chakraborty, B.: Entropy and temperature of a Static Granular Assembly: An Ab Initio Approach. Phys. Rev. Lett. **99**, 038002 (2007).
215. Blumenfeld, R., Jordan, J. F., Edwards, S.F.: Interdependence of the volume and stress ensembles and equipartition in statistical mechanics of granular systems. Phys. Rev. Lett. **109**, 238001 (2012).
216. Berg, J., Mehta, A.: On random graphs and the statistical mechanicsof granular matter. Europhys. Lett. **56** (6), 784–790 (2001).
217. Berg, J., Mehta, A: Glassy dynamics in granular compaction: Sand on random graphs. Phys. Rev. E **65**, 03130590 (2002)
218. Hayakawa, H., Hong, D.C.: Thermodynamic Theory of Weakly Excited Granular Systems. Phys. Rev. Lett. **78**, 2764 (1997).

219. Coppersmith, S.N., Liu, C.h., Majumdar, S., Narayan, O., Witten, T.A.: Model for force fluctuations in bead packs. Phys. Rev. E **53**(5), 4673–4685 (1996).

220. Claudin, P., Bouchaud, J.P.: Static Avalanches and Giant Stress Fluctuations in Silos. Phys. Rev. Lett. **78**(2), 231–234 (1997).

221. Claudin, P., Bouchaud, J.P., Cates, M.E., Wittmer, J.P.: Models of stress fluctuations in granular media. Phys. Rev. E **57**(4), 4441–4457 (1998).

222. Bouchaud, J.–P., Claudin, P., Levine, D., Otto, M.: Force chain splitting in granular materials: A mechanism for large-scale pseudo-elastic behavior. Eur. Phys. J. E **4**, 451–457 (2001).

223. Socolar, J.E.S., Schaeffer, D.G., Claudin, P.: Directed force chain networks and stress response in static granular materials. The Eur. Phys. J. E **7**, 353–370 (2002).

224. Shimizu, Y., Hart, R.D., Cundall, P.A. (eds.): Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods. Itasca Consulting Group, Inc., Minneapolis, MN, USA (2004).

225. Pöschel, T., Schwager, T.: Computational Granular Dynamics. Models and Algorithms. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2005).

226. O'Hern, C.S.: Computational Methods. In: Franklin, S.V., Shattuck, M.D. (eds.) Handbook of Granular Materials, pp.199–154. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York (2015).

227. Cundall, P.A.: A computer model for simulating progressive large–scale movements in blocky rock systems. In: Proceedings of International Symposium Rock Fracture, pp. 2–8. ISRM, Nancy (1971).

228. Cundall, P.A., Strack, O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies. Geotechnique **29**(1), 281–65 (1979).

229. Thornton, C., Yin, K.K.: Impact of elastic spheres with and without adhesion. Powder Technol. **65**, 153–166 (1991).

230. Thornton, C.: Coefficient of restitution for collinear collisions of elactic–perfectly plastic spheres. J. Appl.Mech. **64**(2), 383–386 (1997).

231. Schifer, J., Dippel, S., Wolf, D.E.: Force Schemes in Simulations of Granular Materials J. Phys. I France **6,** 5–20 (1996).

232. Walton, O.R., Braun, R.L.: Viscosity, granular temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks. J. Rheol., **30**, 949–989 (1986).

233. Haff, P.K., Werner, B.T.: Computer simulation of the mechanical sorting of grains. Powder Techn. **48**, 239–245 (1986).

234. Cundall, P.A.: Numerical experiments on localization in frictional materials. Ingenieur–Archiv **59**,148–159 (1989).

235. Bardet, J.P., Proubet, J.: A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media. Geotechnique **41**(4), 599–613 (1991).

236. Bardet, J.P.: Observations on the effects of particle rotations on the failure of idealized granular materials. Mech. of Mat. **18**, 159–182 (1994).

237. Goldhirsch, I., Tan, M-L., Zanetti, G.: A molecular dynamical study of granular fluids I: The unforced granular gas in two–dimensions. J. Sci. Comput. **8(**1), 1–40 (1993).

238. Gallas, J.A.C., Herrmann, H.J., Sokolowski, S.: Convection cells in vibrating granular media. Phys. Rev. Lett. **69**(9), 1371–1374 (1992).

239. Melin, S.: Wave propagation in granular assemblies. Phys. Rev. E **49**(3), 2353–2361 (1994).

240. Watanabe, R., Hashimoto, H., Lee, G.G.: Computer simulation of milling ball Motion in mechanical alloying. Materials Transaction, JIM 36(2), 102–109, (1995).

241. Gallas, J.A.C., Herrmann, H.J., Pöschel, T., Sokolowski, S.: Molecular dynamics simulation of size segregation in three dimensions. J. Stat. Phys. **82**, 443 (1996).

242. Antony S.J.: Evolution of force distribution in three-dimensional granular media. Phys. Rev. E **63**, 011302 (2000).

243. Thornton, C.: Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media. Géotechnique **50**(1), 43–53 (2000).

244. Makse, H.A., Johnson, D.L., Schwartz L.M.: Packing of compressible granular materials. Phys. Rev. Lett. **84**(18) 4160–4163 (2000).

245. Mouraille, O., Luding, S.: Acoustic waves in granular materials. In: Proceedings of the International Congress on Ultrasonics, pp. 1–4. Vienna, April 9–13 (2007).

246. Potyondya, D.O., Cundall, P.A.: A bonded–particle model for rock. Intern. J. of Rock Mech. & Min. Sci. **41**, 1329–1364 (2004).

247. Wang, L., Park, J.–Y., Fu, Y.: Representation of real particles for DEM simulation using X-ray tomography. Construction and Building Materials **21**, 338–346 (2007).

248. Liu, Y., You, Z.: Discrete-element modeling: Impacts of aggregate sphericity, orientation, and angularity on creep stiffness of idealized asphalt mixtures. J. Eng. Mech. **137**, 294–303 (2011).

249. Fu, Y., Wang, L., Zhouc, C.: 3D clustering DEM simulation and non-invasive experimental verification of shear localisation in irregular particle assemblies. Int. J. of Pavement Engin. **11**(5), 355–365 (2010).

250. Zhao, T., Dai, F., Xu, N.W., Liu, Y., Xu, Y.: A composite particle model for non–spherical particles in DEM Simulations. Granul. Matter **17**, 763–774 (2015).

251. Džiugys, A., Peters, B.: An approach to simulate the motion of spherical and non–spherical fuel particles in combustion chambers. Granul. Matter **3**, 231–265 (2001).

252. Mailman, M., Schreck, C.F., Chakraborty, B., O'Hern, C.S.: Jamming in systems composed of frictionless ellipse–shaped particles. Phys. Rev. Lett., **102**, 255501 (2009).

253. Schreck, C.F., O'Hern, C.S.: Computational methods to study jammed systems. In: Olafsen, J.S. (ed.) Experimental and Computational Techniques

in Soft Condensed Matter Physics, pp. 25–61. Cambridge University Press, New York, 2010.

254. Schreck, C.F., Mailman, M., Chakraborty, B., O'Hern, C.S.: Constraints and vibrations in static packings of ellipsoidal particles. Phys. Rev. E **85**, 061305 (2012).
255. Baram, R.M., Lind, P.G.: Deposition of general ellipsoidal particles. Phys. Rev. E **85**, 041301 (2012).
256. Gan, J.Q., Zhou, Z.Y., Yu, A.B.: Interparticle force analysis on the packing of fine ellipsoids Powder Technology **320**, 610–624 (2017).
257. Mirghasemi, A.A., Rothenburg, L., Matyas, E.L.: Influence of particle shape on engineering properties of assemblies of two-dimensional polygon-shaped particles. Geotechnique **52**, 209–217 (2002).
258. Kohring, G.A., Melin, S., Puhl, H., Tillemans, H.J., Vermöhlen, W.: Computer simulations of critical, non-stationary granular flow through a hopper, Comput. Method. Appl. M. 124, 273–281 (1995).
259. Ghaboussi, J., Barbosa, R.: Three-dimensional discrete element method for granular materials. Intern. J. Num. Anal. Meth. Geomech. **14**, 451–472 (1990).
260. Cundall, P.A.: Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part I: a scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. Int. J. of Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. **25**(3) 107–116. (1988).
261. Cundall, P.A.: Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part II: mechanical calculations formotion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks. Int. J. of Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. **25**(3) 117–125. (1988).
262. Zhao, D., Nezami, E.G., Hashash, Y.M.A., Ghaboussi, J.: Three-dimensional discrete element simulation for granular materials. Eng. Computation **23**, 749–770 (2006).

263. Nezami, E.G., Hashashn, Y.M.A., Zhao, D., Ghaboussi, J.: Shortest link method for contact detection in discrete element method. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. **30**, 783–801 (2006).

264. Shimizu, Y., Hart, R.D., Cundall, P.A. (eds.): Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods. Itasca Consulting Group, Inc., Minneapolis, MN, USA (2004).

265. Pöschel, T., Schwager, T.: Computational Granular Dynamics. Models and Algorithms. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2005).

266. Chen, J., Schinner, A., Matuttis H.G.: Discrete element simulation for polyhedral granular particles. Theor. and Appl. Mech. Japan **59**, 335–346 (2011).

267. Nassauer, B., Liedke, T., Kuna, M.: Polyhedral particles for the discrete element method: Geometry representation, contact detection and particle generation. Granul. Matter **15**, 85–93 (2013).

268. Nassauer, B., Kuna, M.: Contact forces of polyhedral particles in discrete element method. Granul. Matter **15**, 349–355 (2013).

269. Zhao, S., Zhou, X., Liu, W.: Discrete element simulations of direct shear tests with particle angularity effect. Granul. Matter **17**(6), 793–806 (2015).

270. Boon, C.W., Houlsby, G.T., Utili, S.: A new algorithm for contact detection between convex polygonal and polyhedral particles in the discrete element method. Computers and Geotechnics **44**, 73–82 (2012).

271. Wachs, A., Girolami, L., Vinay, G., Ferrer, G.: Grains3D, a flexible DEM approach for particles of arbitrary convex shape – Part I: Numerical model and validations Powder Technology **224**, 374–389 (2012).

272. Gilbert, E.G., Johnson, D.W., Keerthi, S.S.: A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space, IEEE J. of Robotics and Automat. **4** (2), 193–203 (1988).

273. Dong, K., Wang, C., Yu, A.: A novel method based on orientation discretization for discrete element modeling of non-spherical particles. Chem. Engin. Sci. **126**, 500–516 (2015).

274. Fraige, F.Y., Langston, P.A., Chen, G.Z.: Distinct element modelling of cubic particle packing and flow. Powder Technol. **186**, 224–240 (2008).

275. Azema, E., Radjai, F., Peyroux, R., Richefeu, V., Saussine, G.: Short-time dynamics of a packing of polyhedral grains under horizontal vibrations. Eur. Phys. J. E. Soft Matter **26**, 327–335 (2008).

276. De Pellegrin, D.V., Stachowiak, G.W.: Simulation of three-dimensional abrasive particles. Wear **258**, 208–216 (2005).

277. Muth, B., Eberhard, P., Luding, S.: Contact simulation for many particles considering adhesion. Mech. Based Design of Structures and Machines **31**(3), 433–457 (2003).

278. Richefeu, V., Mollon, G., Daudon, D., Villard, P.: Dissipative contacts and realistic block shapes for modeling rock avalanches. Engineering Geology **149–150**, 78–92 (2012).

279. Hopkins, M.A.: Polyhedra faster than spheres. Eng. Comput. **31**, 567–583 (2014).

280. Nezamabadia, S., Radjaia, F., Aversenga, J., Delenneb, J.-Y.: Implicit frictional-contact model for soft particle systems. J. Mech. Phys. Solids **83**, 72–87 (2015).

281. Rojek, J., Zubelewicz, A., Madan, N., Nosewicz, S.: The discrete element method with deformable particles. Int. J. Numer. Methods Eng. **114**(8), 1–33 (2018).

282. Nguyen, D.–H., Azéma, E., Sornay, P., Radjai, F.: Bonded-cell model for particle fracture. Phys. Rev. E **91**, 022203 (2015).

283. Nguyen, D.–H., Azéma, E., Sornay, P., Radjai, F.: Rheology of granular materials composed of crushable particles. Eur. Phys. J. E **41**, 50 (2018).

284. Gladkyy, A., Kuna, M.: DEM simulation of polyhedral particle cracking using a combined Mohr-Coulomb-Weibull failure criterion. Granul. Matter **19**, 41 (2017).

285. Herrmann, H.J., Luding, S.: Modeling granular media on the computer. Continuum Mech. Thermodyn. **10**, 189–231 (1998).

286. Lu, G., Third, J.R., Müller, C.R.: Discrete element models for non-spherical particle systems: From theoretical developments to applications. Chem. Engin. Sci. **4**, 425–465 (2015).

287. Zhong, W. Yu, A., Liu1, X., Tong, Z., Zhang, H.: DEM/CFD–DEM Modelling of non–spherical particulate systems: Theoretical developments and applications. Powder Technology **302**, 108–152 (2016).

288. Bird, G. A.: Molecular Gas Dynamics. Clarendon Press, Oxford (1976).

289. Brey, J.J., Cubero, D., Ruiz-Montero, M.J.: High energy tail in the velocity distribution of a granular gas. Phys. Rev. E **59**(1) 1256 (1999).

290. Brey, J.J., Ruiz-Montero, M.J.: Direct Monte Carlo simulation of dilute granular flow. Comp. Phys. Communic. **121–122**, 278–283 (1999).

291. Rjasanov, S., Wagner, W. Simulation of rare events by the stochastic weigthed particle method for the Boltzmann equation. Math. Comp. Modell. **33**, 907 (2000).

292. Soppe, W.: Computer simulations of random packings of hard spheres. Powder Technology **62**, 189–197 (1990).

293. Mehta, A. Barker, G. C.: Vibrated powders: a microscopic approach. Phys. Rev. Lett. **67**, 394–397 (1991).

294. Barker, G. C. and Mehta, Аю: Vibrated powders: structure, correlations, and dynamics. Phys. Rev. A **45**, 3435– 3446 (1992).

295. Dhar, D., Majumdar, S. N.: Abelian sandpile model on the Bethe lattice. J. Phys. A: Math. Gen. **23**(19), 4333–4350 (1990).

296. Zhang, Y.–C.: Scaling theory of self-organized criticality. Phys. Rev. Lett. **63**(5), 470–473 (1989).

297. Henley, C. L.: Self-organized percolation: a simpler model. Bull. Am. Phys. Soc. **34**(3), 838 (1989).

298. Bak, P., Chen, K., Tang, C.: A forest-fire model and some thoughts on turbulence. Phys. Lett. A **147**(5–6), 297–300 (1990).

299. Drossel, B., Schwabl, F.: Self-organized critical forest-fire model, Phys. Rev. Lett. **69**(11), 1629–1632 (1992).

300. Bak, P., Sneppen, K.: Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. Phys. Rev. Lett. **71**(24), 4083–4086 (1993).

301. Manna, S.S.: Two–state model of self-organized criticality. J. Phys. A: Math. Gen.**24**(7), L363 (1991).

302. Christensen, K., Corral, A., Frette, V., Feder, J., Jøssang, T.: Tracer dispersion in a self-organized critical system. Phys. Rev. Lett. **77**(1), 107–110 (1996).

303. Nishimori, H., Ouchi, N.: Computational models for sand ripple and sand dune formation. Int. J. of Mod. Phys. B **7**, 2025–2034 (1993).

304. Nishimori, H., Ouchi, N.: Formation of ripple patterns and dunes by wind–blown sand. Phys. Rev. Lett. **71**, 197–200 (1993).

305. Ouchi, N., Nishimori, H.: Modeling of wind-blown sand using cellular automata. Phys. Rev. E **52**, 5877–5880 (1995).

306. Caps, H., Vandewalle, N.: Labyrinthic granular landscapes. Phys. Rev. E **64**, 052301 (2001).

307. Strassburger, G., Betat, A., Scherer, M.A., Rehberg, I.: Pattern formation by horizontal vibration of granular material. In: Wolf, D.E., Schreckenberg, M., Bachem, A. (eds) Traffic and Granular Flow, p. 329–331. World Scientific, Singapore (1996).

308. Frisch, U., Hasslacher, B., Pomeau, Y.: Lattice-gas automata for the Navier–Stokes equation. Phys. Rev. Lett. **56**, 1505–1508 (1986).

309. Peng, G., Herrmann, H.J.: Density waves of granular flow in a pipe using lattice–gas automata. Phys. Rev. E **49**, 1796–1979 (1994).

310. Peng, G., Herrmann, H.J.: Density waves and 1/f density fluctuations in granular flow. Phys. Rev. E, **51**, 1745–1756 (1995).

311. Peng, G., Ohta, T.: Velocity and density profiles of granular flow in channels using a lattice gas automaton. Phys. Rev. E, **55**, 6811–6820 (1997).

312. Ландау А.Д., Лифшиц Е.М.: Теория упругости. Наука, Москва (1987).

313. Andersen, H.C.: Molecular dynamics simulation at constant pressure and/or temperature. J. Chem. Res. **72**(4), 2384–2393 (1980).

314. Swope, W.C., Andersen, H.C., Berens, P.H., Wilson, K.R.: A computer simulation method for the calculation of equilibrium constants for the formation of physical clusters of molecules: Application to small water wlusters, J. Chem. Phys. **76**(1), 637–649 (1982).
315. Johnson, P.A., McCall, K.R.: Observation and implications of nonlinear wave response in rock. Geoph. Res. Lett. **21**(3), 165–168 (1994).
316. Гольдсмит В.: Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Изд–во л–ры построительству, Москва (1965).
317. Ostrovsky, L.A., Johnson, P.A.: Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials. Rivista del nuovo cimento **24**(7), 1–46 (2001).
318. Guyer, R.A., Johnson, P.A.: Nonlinear Mesoscopic Elasticity: The Complex Behaviour of Granular Media including Rocks and Soil Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim (2009).
319. Darling, T.W., TenCate, J.A., Brown, D.W., Clausen, B., Vogel, S.C.: Neutron diffraction study of the contribution of grain contacts to nonlinear stress–strain behavior. Geophys. Res. Lett. **31**(1), 1–4 (2004).
320. Писаренко, В.Ф., Примаков, И.М., Шнирман, М.Г.: Поведение деформируемого массива подвижных элементов. В: Садовский М.А. (ред.) Дискретные свойства геофизической среды, сс.76–84. Москва, (1989).
321. Гольдсмит В.: Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Москва, Изд-во л-ры по строительству (1965).
322. Ляхов, Г.М.: Определение вязких свойств грунта. ПМТФ **4**, 68–71 (1968).
323. Рыков, Г.В., Скобеев, А.М.: Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. Москва, Наука (1978).
324. Брагов, А.М., Ломунов, А.К., Деменко, П.В.: Исследование физико–механических свойств мягких грунтов при ударе. В: Труды VI Забабахинских научных чтений, сс.1–21. Снежинск (2001).

325. Докукин А.В., Трумбачев В.Ф., Славин О.К. и др.: Исследование массива горных пород методами фотомеханики. Москва, Наука (1982).

326. Losert, W., Bosquet, L., Lubensky, T.C., Gollub J.P.: Particle dynamics in shared granular matter. Phys. Rev. Let. **85**(7), 1428– 1431 (2000).

327. Vensrich, C.M., Kisi, E.H., Zhang J.F.: Measurement and analysis of the stress distribution during die compaction using neutron diffraction. Granul. Matter **14**(6), 671–680 (2012).

328. Desrues, J., Chambon, R., Mokni, M., Mazerolle F.: Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computed tomography. Geotechnique **46**(3), 629–546 (1996).

329. Fu, Y.: Experimental quantification and DEM simulation of micro–macro behaviors of granular materials using X-Ray tomography imaging. Doctoral Dissertations. Lousiana State University (2005).

330. Даниленко, В.А., Бєлінський, І.В., Венгрович, Д.Б., Гржибовський, В.В., Лемешко, В.А.: Особливості хвильових процесів у геофізичному середовищі при врахуванні їх структури. Доповіді НАН України **12**, 124–129 (1996).

331. Vanel, L., Howell, D., Clark, D., Behringer, R. P., Clement, E.: Memories in sand: experimental tests of construction history on stress distributions unde sandpiles. Phys. Rev. E **60**, R5040 (1999)

332. Antony, S. J., Kuhn, M. R., Barton, D.C. Bland, R.: Strength and signature of force networks in axially compacted sphere and non-sphere granular media: micromechanical investigations. J. Phys. D: Appl. Phys. **38,** 3944–3952 (2005).

333. Snoeiger, J.H., Hecke, M., Somfai, E., Saarloos, W.: Packing geometry and statistics of force networks in granular media. Phys. Rev. E **70**, 011301 (2004).

334. Alevaro, R., Zuriguel, I., Trevijano, S.A. Maza, D.: Third order loops of contacts in a granular force network. Int. J. of Bifurcation and Chaos **20**(3), 897–903 (2010).

335. Mishnaevsky, L.: Micromechanics of hierarchical materials: a brief overview. Rev. Adv. Mater. Sci. **30**, 60–72 (2012).

336. Baer, E., Hiltner, A., Keith, H.D.: Hierarchical structure in polymeric materials. Science **235** (4792), 1015–1022. (1987).

337. Joshi, S.P., Ramesh, K.T.: An enriched continuum model for the design of a hierarchical composite. Scr. Mater. **57**, 877–880 (2007).

338. Pugno, N.M., Carpinteri, A.: Design of micro-nanoscale bio–inspired hierarchical materials. Phil. Mag. Lett. **88** (6), 397–405 (2008).

339. Carpinteri, A., Paggi, M.: A top-down approach for the prediction of hardness and toughness of hierarchical materials. Chaos Solitons Fractals **42**, 2546–2552 (2009).

340. Guo, N., Zhao, J.: A coupled FEM/DEM approach for hierarchical multiscale modelling of granular media. Internat. J. Numer. Methods Engrg. **99**, 789–818 (2014).

341. Guo, N., Zhao, J.D.: Parallel hierarchical multiscale modelling of hydro–mechanical problems for saturated granular soils. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **305**, 37–61 (2016).

342. Guo, N., Zhao, J.D.: 3D multiscale modeling of strain localization in granular media. Comput. Geotech. **80**, 360–372 (2016).

343. Kaneko, K., Terada, K., Kyoya, T., Kishino, Y.: Global-local analysis of granular media in quasi-static equilibrium. Int. J. Solids Struct. **40**, 4043–4069 (2003).

344. Meier, H.A., Steinmann, O., Kuhl, E.: Towards multiscale computation of confined granular media-contact forces, stresses and tangent operators, Tech. Mech. **28**(1), 32–42 (2008).

345. Andrade, J.E., Avila, C.F., Hall, S.A., Lenoir, N., Viggiani, G.: Multiscale modeling and characterization of granular matter: From grain kinematics to continuum mechanics. J. Mech. Phys. Solids **59**, 237–250 (2011).

346. Курленя, М.В.: Новые технологии добычи полезных ископаемых. ФТПРПИ **2**, 63–67 (2000).

347. Садовский, М.А., Писаренко, В.Ф.: Сейсмический процесс в блоковой среде. Наука, Москва (1991).

348. Курленя М.В., Опарин В.Н. Проблемы нелинейной геомеханики. Ч.1. ФТПРПИ **3**, 12–26 (1999).

349. Kuramoto, Y.: Self–entrainment of a Population of Coupled Nonlinear Oscillators. In: Araki H. (ed) International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, p. 420. Springer, New York (1975).

350. Kuramoto, Y.: Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer, New York (1984).

351. Acebron, J.A., Bonilla, L.L., Perez Vicente C.J., Ritort, F., Spigler, R.: The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena. Rev. Mod. Phys. **77**, 137 (2005).

352. Arenas, A., Diaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., Zhou, C.: Synchronization in complex networks. Phys. Rep. 469, **93** (2008).

353. Ott, E., Antonsen, T.M.: Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators Chaos **18**, 037113 (2008).

354. Zhuo, Z., Cai, S.–M., Fu, Z.-Q., Zhang, J.: Hierarchical organization of brain functional networks during visual tasks. Phys. Rev. E **84**,031923 (2011).

355. Prignano, L., Diaz-Guilera, A.: Extracting topological features from dynamical measures in networks of Kuramoto oscillators. Phys. Rev. E **85**, 036112 (2012).

356. Skardal, P.S., Restrepo, J.G.: Hierarchical synchrony of phase oscillators in modular networks. Phys. Rev. E **85**, 016208 (2012).

357. Villegas, P., Moretti, P., Munoz, M.A.: Frustrated hierarchical synchronization and emergent complexity in the human connectome network. Sci. Rep. **4**, 5990 (2014).

358. Holodniok, M., Klić, A., Kubićek, M., Marek, M.: Methods of Analysis of Nonlinear Dynamical Models. World Publishing House, Moscow (1991).

359. Steeb, W.–H.: The Nonlinear Workbook. World Scientific Publishing, Singapore (2005).

360. Hairer, E., Nursett, S.P., Wanner, G.: Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Springer-Verlag, Berlin (2008).

361. Ott, E.: Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, Cambridge (1994)

362. Percival, D.B.: Walden, A.T.: Spectral Analysis for Physical Applications. Cambridge University Press, Cambridge (1993).

363. Brown, R.G., Hwang, P.Y.C.: Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering. JohnWiley & Sons (2012).

364. Nayfeh, A.H., Mook, D.T.: Nonlinear Oscillations. Wiley-VCH, New York (1995).

365. Plaksiy, K.Yu., Mikhlin, Yu.V.: Free and forced resonance vibrations of two–DOF nonlinear dissipative systems. Int. J. Non-Linear Mech. **94**, 281–291 (2017).

366. Kovacic, I.: On the response of purely nonlinear oscillators: An Ateb–type solution for motion and an Ateb-type external excitation. Int. J. Non–Linear Mech. **92**, 15–24 (2017).

367. Mickens, R.E.: Truly Nonlinear Oscillators. An Introduction to Harmonic Balance, Parameter Expansion, Iteration, and Averaging Methods. World Scientific, Singapore, 2010.

368. Cveticanin, L.: Strongly Nonlinear Oscillators: Analytical Solutions, Springer, 2014.

369. Andrianov, I.V., Awrejcewicz, J.: Asymptotic approaches to strongly nonlinear dynamical systems, J. Syst. Anal. Modell. Simul. **43**, 255–268 (2003).

370. Falconi, M., Lacomba, E.A., Vidal, C.: Dynamics of mechanical systems with polynomial potentials, J. Dynam. Differential Equations **26** (3) 707–722 (2014).

371. Zhou, S., Song, G., Sun, M., Ren, Z.: Nonlinear dynamic analysis of a quarter vehicle system with external periodic excitation. Int. J. Non-Linear Mech. **84**, 82–93 (2016).

372. Пановко, Я.Г.: Основы прикладной теории колебаний и удара, Машиностроение, Ленинград (1976).
373. Даниленко, В.А., Скуратівський, С.І.: Резонансні режими поширення нелінійних хвильових полів в середовищах з осцилюючими включеннями. ДАН Укр. 11, 108–112 (2008).
374. Londoco, J.M. Neild, S.A. Cooper, J.E.: Identification of backbone curves of nonlinear systems from resonance decay responses. J. Sound Vib. **348**, 224–238 (2015).
375. Mathieson, A., Cardoni, A., Cerisola, N., Lucas, M.: Understanding nonlinear vibration behaviours in high-power ultrasonic surgical devices. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **471**, 20140906 (2015).
376. Turcotte, D.L.: Fractals and Chaos in Geology and Geophysics. Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1997).
377. Utsu, T.: Aftershocks and Earthquake Statistics (I). J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. 7. **3**(3), 129–195 (1969).
378. Utsu, T.: Aftershocks and Earthquake Statistics (II). J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. 7. **3**(4), 197–266 (1970).
379. Båth, M.: Lateral inhomogeneities of the upper mantle. Tectonophysics **2**(6), 483–514 (1965).
380. Helmstetter, A., Sornette, D.: Båth law derived from the Gutenberg-Richter law and from aftershock properties. Geophys.Res. Lett. **30**(20), 2069 (2003).
381. Kagan, Y.Y., Knopoff, L.: Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function. Geophys. J. R. astr. Soc. 62, 303–320 (1980).
382. Bak, P., Christensen, K., Danon, L., Scanlon T.: Unified Scaling Law for Earthquakes. Phys. Rev. Lett. **88**(17), 178501 (2002).
383. Harte, D.: Dimension Estimates of Earthquake Epicentres and Hypocentres. J. Nonlinear Sci. **8**, 581–618 (1998).
384. Kagan, Y. Y.: Earthquake spatial distribution: the correlation dimension. Geophys. J. Int. **168**. P. 1175–1194 (2007).

385. Grassberger, P., Procaccia, I.: Measuring the strangeness of strange attractors. Physica D **9**, 189–208 (1983).
386. Corral, A.: Local distributions and rate fluctuations in a unified scaling law for earthquakes. Phys. Rev. E **68**, 035102 (2003).
387. Corral, A.: Universal local versus unified global scaling laws in the statistics of seismicity. Physica A **340**, 590–597 (2004).
388. Corral, A.: Long-term clustering, scaling, and universality in the temporal occurrence of earthquakes. Phys. Rev. Lett. **92**, 108501 (2004).
389. Журавлев В.Ф.: Основы теоретической механики. Изд-во физ-мат. лит., Москва (2001).
390. Павловский М. А., Путята Т.В.: Теоретическая механика. Висшая шк. Гг. изд–во., Киев (1985).
391. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.: Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Наука, Москва (1973).
392. Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А. Квартернионы в релятивистской физике. Эдиториал УРСС, Москва (2003).
393. Beeman, D.: Some multistep methods for use in molecular dynamics calculations. J. Comput. Phys. **20**(2), 130–139 (1976).
394. Lee, Y., Fang, C., Tsou, Y.-R., Lu, L.-S., Yang, C.-T.: A packing algorithm for threedimensional convex particles. Granul. Matter **11**(5), 307–315 (2009).
395. Nassauer, B., Liedke, T., Kuna, M.: Polyhedral particles for the discrete element method. Granul. Matter **15**(1), 85–93 (2013).
396. Shakarji, C.V.: Least–squares fitting algorithms of the NIST algorithm testing system. J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **103**(6), 633–641 (1998).
397. Forsythe, G.E., Malcolm, M.A., Moler, C.B.: Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs (1977).
398. Peng, C.-K., Boldyrev, S.V., Halvin, S., Simons, M., Stanley, H.E., Golderberger, A.L.: Mosaic organization of DNA nucleotides. Phys. Rev. E **49**(2), 1685–1689 (1994).

399. Kantelhardt, J.V., Koscielny-Bunde, E., Rego, H.H.A., Halvin, S., Bunde A.: Detecting long-range correlation with detrended fluctuation analysis Physica A **251**, 441–454 (2001).

400. Taqqu, M.S., Teverovsky, V., Willinger, W.: Estimators for long–range dependence: an empirical study. Fractals. **3**(4), 785–798 (1995).

401. Diodati, P., Marchesoni, F., Piazza, S. Acoustic emission from volcanic rocks: An example of self-organized criticality. Phys. Rev. Lett. **67**, 2239 (1991).

402. Sethna, J.P., Dahmen, K.A., Myers, C.R.: Crackling noise. Nature **410**, 242–250 (2001).

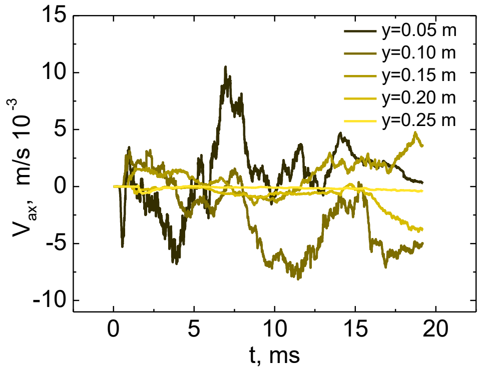
403. Salje, E.K., Dahmen, K.A.: Crackling Noise in Disordered Materials Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **5**, 233 (2014).

404. Mäkinen, T.**,** Miksic, A.**,** Ovaska, M.**,** Alava, M. J.**:** Avalanches in Wood Compression**.** Phys. Rev. Lett. **115**, 055501 (2015).

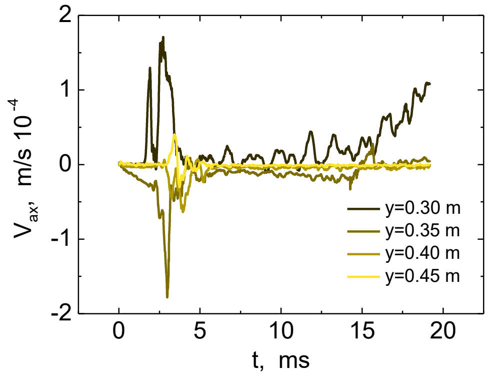
405. Ribeiro, H.V., Costa, L.S., Alves, L.G.A., Santoro, P.A., Picoli, S., Lenzi, E.K., Mendes, R.S.: Analogies between the Cracking Noise of Ethanol–Dampened Charcoal and Earthquakes. Phys. Rev. Lett. **115**, 025503 (2015).

406. Kreemer, C., Blewitt, G., Klein, E.C.: A geodetic plate motion and Global Strain Rate Model. Geochem. Geophys. Geosyst. **15**, 3849–3889 (2014).

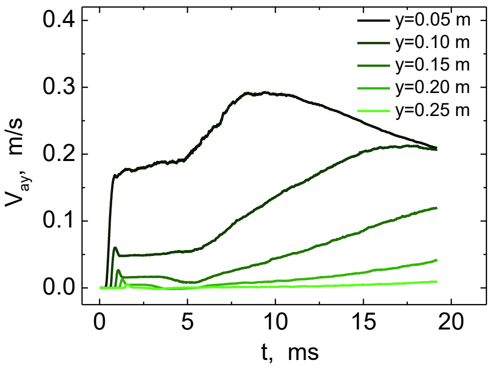
Додаток 1.



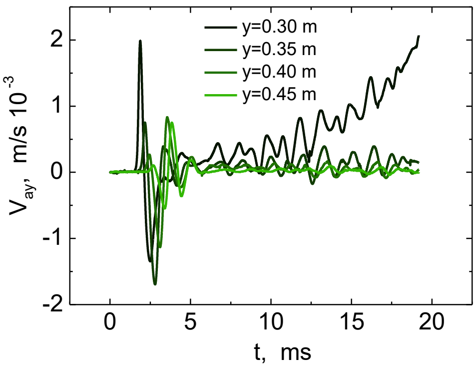
а



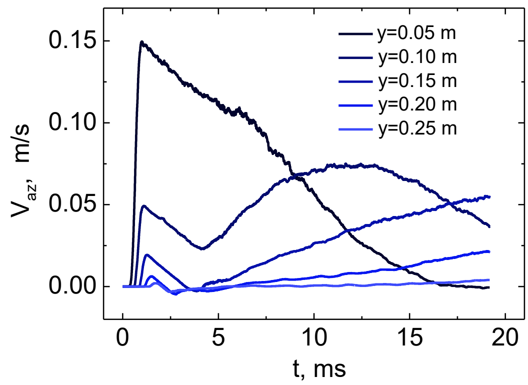
б



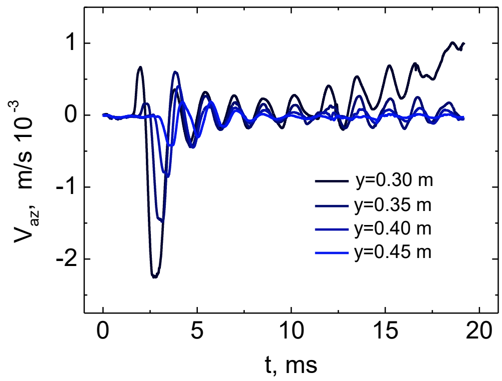
в



г

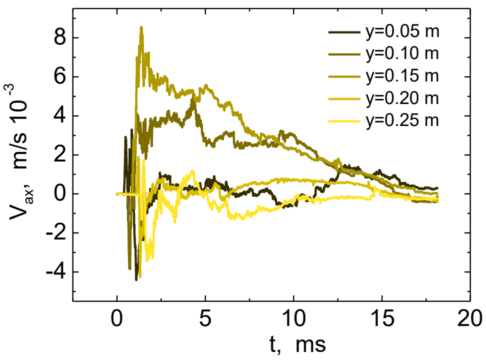


д

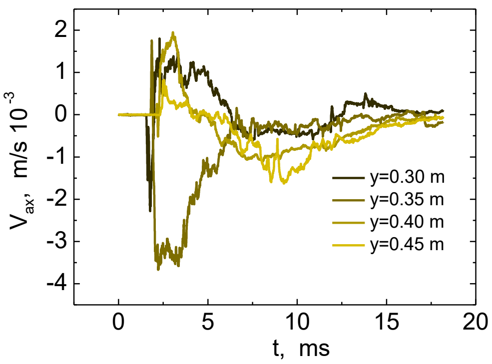


е

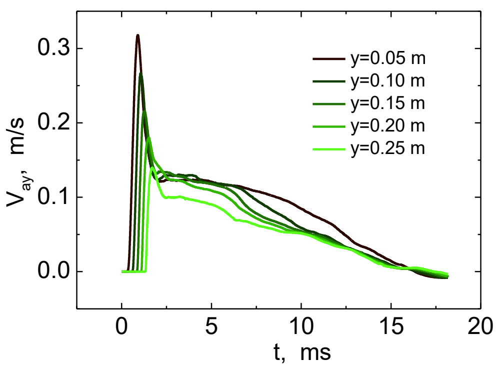
Рис. 2.42. Залежності компонент усередненої швидкості від часу: V_{ax} (*а*,*б*); V_{ay} (*в*,*г*); V_{az} (*д*,*е*). Верхня стінка розташована на висоті $z = 72{,}9$ мм (середовище нестиснуте).



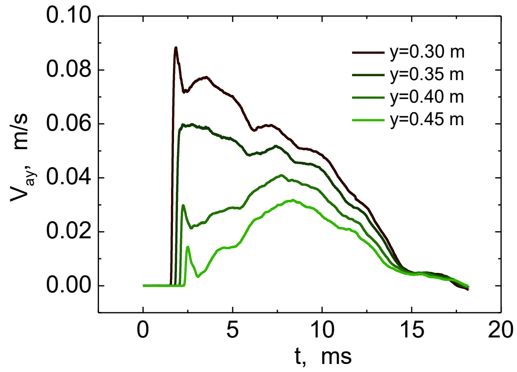
а



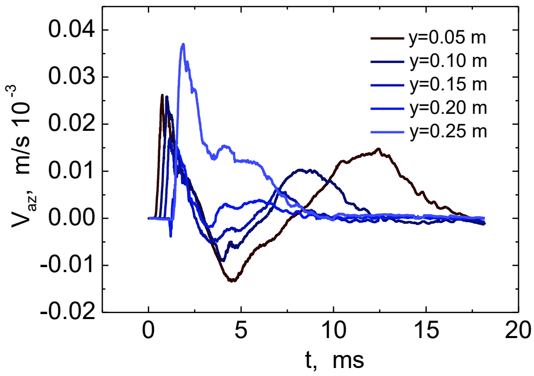
б



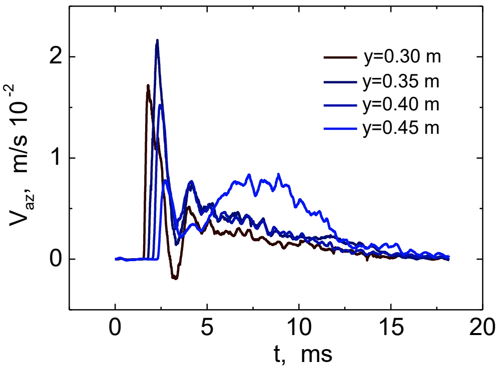
в



г



д



е

Рис. 2.43. Залежності компонент усередненої швидкості від часу: V_{az} (*а*,*б*); V_{az} (*в*,*г*); V_{az} (*д*,*е*). Верхня стінка розташована на висоті $z = 70{,}7$ мм (середовище стиснуте).

Додаток 2.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

***Статті в наукових виданнях*:**

1. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Моделювання динаміки дискретного середовища. Доповіді НАН України. 7, 113-116 (1999).
2. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості нелінійних збурень, що виникають в блокових середовищах різної структури під дією імпульсних навантажень. Доповіді НАН України. 5, 138-142 (2002).
3. **Микуляк, С.В.**, Даниленко, В.А.: Особливості поширення нелінійних хвиль в структуро-ваних середовищах та використання їх для оцінки параметрів структури. Геофізичний журнал. **26**(3), 70-76 (2004).
4. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**, Скуратівський С.І.: Побудова моделі дискретного ієрархічного геофізичного середовища з урахуванням нелінійної взаємодії між елементами структури. Доповіді НАН України. 3, 110-116 (2006).
5. **Микуляк, С.В.**: Построение одномерных дискретных иерархических моделей геофизической среды и их исследование. Физическая мезомеханика. **9**(5), 63-67 (2006).
6. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості утворення та поширення солітонів в пружно-пластичному структурованому середовищі. Доповіді НАН України. 12, 102-105 (2006).
7. **Микуляк, С.В.**: Моделирование процессов динамического деформирования дискретной среды под воздействием импульсной нагрузки. Физическая мезомеханика **10**(6), 69-74 (2007).
8. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп’ютерне моделювання процесів динамічного деформування структурованого геофізичного середовища. Доповіді НАН України. 2, 123-129 (2008).
9. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп’ютерне моделювання процесів деформування структурованого геофізичного середовища з

в’язкопружною взаємодією між елементами структури. Доповіді НАН України. 6, 113-118 (2009).

10. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Комп’ютерне моделювання двовимірного процесу деформування структурованого геофізичного середовища з пружнопластичною взаємодією між елементами структури. Доповіді НАН України. 8, 96-100 (2009).
11. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Моделювання процесів динамічного деформування структурованого геофізичного середовища з пружнопластичною взаємодією елементів структури. Геофізичний журнал. **32**(3), 60-65 (2010).
12. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Розподіл сил у структурованому середовищі в полі сили тяжіння. Доповіді НАН України. 11, 96-99 (2011).
13. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**: Особливості поширення нелінійних хвиль у сипкому середовищі. Доповіді НАН України. 2. 95-98 (2012).
14. **Mykulyak, S.V.**: Features of nonlinear wave propagation in a layer of granular medium. Physical Mesomechanics. **17**(2) 157-162 (2014).
15. Даниленко, В.А., **Микуляк, С.В.**, Поляковський В.О.: Експериментальне дослідження динамічного деформування структурованого геофізичного середовища. Доповіді НАН України. 10, 109-115 (2013).
16. **Микуляк, С.В.**, Поляковський В.О.: Експериментальне дослідження динамічного деформування структурованого середовища під дією імпульсного навантаження. Геофізичний журнал. **36**(2), 120-126 (2014).
17. Danylenko,V.A., **Mykulyak, S.V.**, Skurativskyi, S.I.: Energy redistribution in hierarchical systems of oscillators. Eur. Phys. J. B. **88**, 143 (2015).
18. Danylenko,V.A., **Mykulyak, S.V.**, Polyakovskyi, V.O., Kulich, V.V., Oleynik, I.I.: Force distribution in a granular medium under dynamic loading. Phys. Rev. E. 96, 012906 (2017).

19. **Mykulyak, S.V.**, Skurativska, I.A., Skurativskyi, S.I.: Forced nonlinear vibrations in hierarchically constructed media. International Journal of Non-Linear Mechanics. 98, 51–57 (2017).
20. **Mykulyak, S.V.**: Hierarchical block model for earthquakes. Physical Review E. **97**, 062130 (2018).
21. **Mykulyak, S.**, Kulich, V., Skurativskyi, S.: Simulation of shear motion of angular grains massif via the discrete element method. In: Hu, Z., Petoukhov, S., Dychka, I., He, M. (eds.) Advances in Intelligent Systems and Computing, pp. 74–81. Springer, (2019).
22. **Микуляк С.В.**: Блоково-ієрархічна модель сейсмічних процесів. ДАН України. 11, 55-62 (2018).
23. **Mykulyak S.V.**, Polyakovskyi V.O., Skurativskyi S.I.: Statistical properties of shear deformation of model block media and analogies with natural seismic processes. arXiv: submit/2444622 [physics.geo-ph] 24 Oct 2018.

Тези доповідей і матеріали конференцій:

1. **Mykulyak, S.V.**, Danylenko, V.A., Vakhnenko, V.O.: The wave spectral evolution in a discrete medium with nonlinearity. Proceedings of Tenth International Congress on Sound and Vibration, vol.6, pp.3573-3579. Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003, (усна доповідь).
2. **Микуляк, С.В.**: Компьютерное моделирование динамического деформирования гранулированной среды под действием импульсной нагрузки. В: Физика импульсных разрядов в конденсированных средах, Материалы XII Международной научной школы семинара, с.177. Николаев, 22 –26 августа 2005, (усна доповідь).
3. **Микуляк, С.В.**: Компьютерное моделирование процессов динамического деформирования структурированных геоматериалов. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XVII Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича,

с.с.195-197. ИИПТ НАН Украины, Николаев, 21-25 августа 2007, (усна доповідь).

4. **Микуляк, С.В.**: Зависимость деформационных свойств структурированных геоматериалов от характера взаимодействия между элементами структуры. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XVIII Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича, с.214-216. Алушта, 17-23 сентября 2007, (усна доповідь).
5. **Микуляк, С.В.**: Распространение волн сжатия в структурированной среде. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XIX Международной научной школы им.акад. С.А. Христиановича, с.228. Алушта, 21-27 сентября 2009, (усна доповідь).
6. **Mykulyak, S.V.**: Computer modeling of nonlinear dynamic processes in structured geophysical media. In: Geodynamical Phenomena: From Observations and Experiments to Theory and Modelling. Proceedings of International Conference, p.p.115-117. Kiev, September 20-24 2010, (усна доповідь).
7. **Микуляк, С.В.**: Нелинейные волны в сыпучей среде. Компьютерное моделирование. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XXI Международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича, с.с.252-254. Алушта, 19-25 сентября 2011, (усна доповідь).
8. **Микуляк, С.В.**, Поляковський, В.О.: Експериментальне дослідження поведінки гранульованого середовища під дією імпульсного навантаження. В: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XXII Международной научной школы им.акад. С.А.

Христиановича, с.с.240-242. Алушта, 21-27 сентября 2012, (усна доповідь).

9. **Mykulyak, S.V**., Skurativskyi S.I.: Peculiarities of dynamical phenomena in hierarchical systems of oscillators. In: Nonlinear analysis and applications. Proceedings of 3th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery S. Melnik, p.43. Kyiv, Ukraine, 1–3 April 2015, (усна доповідь).
10. **Mykulyak, S.**, Skurativskyi, S.: Nonlinear dynamics of the system of hierarchically coupled oscillators with power law interactions. In: Book of Abstracts. International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPhA-2017), c.c.42-43. Cherkasy, Ukraine, 17-19 October 2017, (усна доповідь).
11. **Микуляк, С.В.**, Куліч, В.В.: Статистичні властивості процесу зсувного деформування гранульованого середовища. В: Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Матеріали Всеукраїнської наукової конференції. с.с. 22-23. Ворохта, 27лютого-2 березня (2018), (усна доповідь).
12. Kulich, V., **Mykulyak, S.**: Simulation of shear deformation in granular massif. In: Nonlinear analysis and applications. Proceedings of 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery S. Melnik, p.43. Kyiv, Ukraine, 4–6 April 2018, (усна доповідь).

Монографії:

1. Нагорний В.П., Микуляк С.В., Венгрович Д.Б., Скуратівський С.І., Бєлінський І.В., Денисюк, І.І., Куліч, В.В., Шеремет, Г.П. Динамічні процеси в геофізичних середовищах: теорія, експеримент, технології. НАН України, Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна, Київ (2016).