

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ ГЕОФИЗИКИ им. С. И. СУББОТИНА  
ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОДИНАМИКИ ВЗРЫВА

В. А. ВАХНЕНКО

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ  
КОРОТКОВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ  
В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

ПРЕПРИНТ

КИЕВ 1991

УДК 532.59 + 517.95

Периодические коротковолновые возмущения в релаксирующей среде/

Вахненко В.А. - АН УССР. Ин-т геофизики им.С.И.Субботина, -  
Препр. - Киев, 1991. - 20 с.

В работе получено нелинейное эволюционное уравнение для релаксирующей среды. Показано, что в длинноволновом пределе оно переходит в уравнение Кортевега-де Вриза-Бургерса, а в коротковолновом при отсутствии диссипации - в уравнение Уизема с определенным ядром. Найдены точные периодические решения эволюционного уравнения, описывающего коротковолновые возмущения в релаксирующей среде.

Ил.3. Библиогр.: 20 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук

В.Ю.Королевич

Утверждено к печати Ученым советом

ОГВ ИГФ АН УССР

## ВВЕДЕНИЕ

Описание нелинейных волновых процессов, встречающихся в различных областях физики, часто удается свести к хорошо изученному уравнению Кортевега-де Вриза ( $KdV$ ) [1]. Присущие этому уравнению закономерности позволили разработать методы интегрирования нелинейных систем, например, метод обратной задачи рассеяния. Выяснилось, что длинноволновые возмущения для релаксирующих сред также подчиняются уравнению  $KdV$ . В то же время коротковолновые возмущения в среде, обладающей внутренними обменными процессами, оказались менее изучены.

В настоящей работе получено эволюционное уравнение, описывающее коротковолновые возмущения в релаксирующей среде. Показана его эквивалентность уравнению Уизема с заданным ядром. Проведен анализ волнового уравнения и найдены его точные периодические решения.

### 1. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

#### 1.1. Основные положения и определяющие уравнения.

Поведение многих сред под действием интенсивных высокоградиентных волновых возмущений не удается описывать в рамках равновесных моделей механики сплошных сред. Термодинамические характеристики в каждой точке среды правомочно вводить при установлении локального равновесия (или небольшом отклонении от него). При создании физических моделей распространения волновых возмущений в средах со сложной внутренней кинетикой перспективным оказывается подход на основе представлений, учитывающих релаксационную природу изучаемых явлений. Будем рассматривать гомогенные среды (в нашем понимании это значит, что длина волны во много раз превосходит неоднородность самой среды).

В результате быстрых возмущений, распространяющихся по среде, нарушается термодинамическое равновесие. Внутренние процессы взаимодействия стремятся вернуть систему в равновесное состояние. Параметры, характеризующие такие взаимодействия, являются внутренними в отличие от макропараметров таких как давление, массовая скорость, плотность. Изменение макропараметров течения за счет изменения внутреннего параметра — суть релаксационного процесса. Использование модели релаксирующей среды с точки зрения неравновес-

ной термодинамики является более общим по сравнению с равновесными моделями при описании эволюции волнового возмущения.

Ограничимся рассмотрением баротропной среды. Несмотря на то, что это сужает применимость результатов, однако значительно упрощает изложение, оставляя существо рассматриваемого вопроса – обусловленность волновых течений релаксационной природой этого явления.

В равновесии уравнение состояния баротропной среды однопараметрическое. В дополнение к этому, как результат релаксации, в уравнении состояния появляется внутренний параметр  $\xi$ , который определяет полноту протекания релаксации

$$p = p(\rho, \xi). \quad (I.I.I)$$

Два предельных случая соответствуют:

а) отсутствию релаксации  $\xi = 1$ ,  $p = p(\rho, 1) \equiv p_{\infty}(\rho)$ , (I.I.2a)

б) релаксация успевает пройти, наступает локальное термодинамическое равновесие  $\xi = 0$

$$p = p(\rho, 0) \equiv p_{eq}(\rho). \quad (I.I.2б)$$

Эти соотношения позволяют ввести скорости звука для быстрых процессов

$$c_{\infty}^2 = \frac{dp_{\infty}}{d\rho} \quad (I.I.3a)$$

и медленных

$$c_{eq}^2 = \frac{dp_{eq}}{d\rho}. \quad (I.I.3б)$$

Здесь понятия медленного и быстрого процессов соотносятся ко времени протекания релаксации. Тем самым, вводится понятие характерного времени релаксации  $\tau$ .

Динамическое уравнение состояния среды записывается в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\tau_p (\dot{p} - c_{\infty}^2 \dot{\rho}) + (p - p_{eq}) = 0. \quad (I.I.4)$$

Обновление такого уравнения в рамках термодинамики необратимых процессов дано в [2]. При выводе уравнения (I.I.4) не конкре-

тизируется механизм обменного (внутреннего) процесса, а в само уравнение входят только термодинамические и кинетические характеристики среды. Причем эти характеристики могут быть экспериментально определены. Отметим, что феноменологические подходы к описанию релаксационных процессов в гидродинамике разрабатывались во многих работах, в частности [3-7]. Динамическое уравнение состояния использовалось для описания распространения звука в релаксирующей жидкости [3], для учета влияния обменных процессов в средах жидкость-твердые частицы [4], для изучения волновых течений в пузырьковых средах [5-7] и грунтах [8]. В большинстве работ уравнение состояния выводится из предположения определенного внутреннего процесса. Это приводит к ограниченности этих уравнений и сложному нахождению параметров в членах, описывающих обменные процессы.

Соотношение (I.I.4) представляет собой динамическое уравнение состояния релаксирующей баротропной среды. Очевидно, что при быстрых процессах ( $\omega\tau_p \gg 1$ ) имеем соотношение (I.I.2a), а при медленных ( $\omega\tau_p \ll 1$ ) справедливо (I.I.3б). Отметим, что можно рассматривать обратный процесс, когда отклонение давления от равновесия приводит к изменению плотности. В таком случае характерное время  $\tau_p$ , описывающее релаксационное изменение, связывается с  $\tau_p$  соотношением

$$\tau_p = \tau_p \frac{c_m^2}{c_p^2}.$$

Для анализа волновых течений используем гидродинамические уравнения, выражающие закон сохранения массы

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial u}{\rho_0 \partial x} = 0 \quad (\text{I.I.5})$$

и закон сохранения импульса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\rho \partial x} = 0, \quad (\text{I.I.6})$$

где  $V = \rho^{-1}$  - удельный объем,  $u$  - массовая скорость,  $dx$  - лагранжевая пространственная координата.

Уравнения движения (I.I.5), (I.I.6) записаны в лагранжевых координатах, что связано с тем, что уравнение состояния (I.I.4) относится к элементу массы среды.

## 1.2. Объемная вязкость релаксирующей среды.

Несмотря на кажущееся отсутствие вязкостных членов в исходной системе уравнений (I.I.4) – (I.I.6), наличие уравнения состояния в виде (I.I.4) дает возможность описывать эффекты, связанные с объемной вязкостью среды.

Покажем, что для медленных процессов (а именно для них вводится понятие коэффициентов вязкости в классической гидродинамике, т.е. для процессов, учитывающих небольшие отклонения от равновесия в линейном приближении) коэффициент объемной вязкости записывается через время релаксации [3,9,10].

$$\xi = \tau_p \rho (c_{\infty}^2 - c_T^2), \quad (I.2.1)$$

Перепишем (I.I.4) в виде ряда по  $\rho$  от  $\rho$  по степеням  $\tau_p$ . Для этого продифференцируем (I.I.4) по времени и подставим вместо  $\dot{\rho}$  в это же уравнение. Прodelывая указанную процедуру необходимое количество раз, получаем ряд

$$d\rho = c_{T^2}^2 d\rho + \tau_p (c_{\infty}^2 - c_T^2) d\dot{\rho} - \tau_p^2 (c_{\infty}^2 - c_T^2) d\ddot{\rho} + \dots \quad (I.2.2)$$

Ограничимся двумя членами ряда. Величина  $c_{T^2}^2 d\rho$  соответствует приращению равновесного давления в бесконечно медленном процессе. Обозначим установившееся давление через  $p_{eq}$ , тогда  $dp_{eq} = c_{T^2}^2 d\rho$ . Далее, переменная  $\rho$  имеет более общий смысл, чем просто давление. Величина  $(-\rho)$  есть не что иное, как напряжение  $\pi_{ii}$ . По определению напряжение выражается через коэффициент объемной вязкости

$$\pi_{ii} = -p_{eq} + \xi \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Тогда легко получить из второго члена ряда (I.2.2) значение коэффициента объемной вязкости (I.2.1).

## 1.3. Малые возмущения в релаксирующей среде.

Рассмотрим малые возмущения  $\rho'$  такие, что  $\rho' \ll \rho_0$  ( $\rho_0$  — здесь начальное давление). Уравнения состояния для быстрого и медленного процессов считаются известными. Представим зависимости (I.I.2) в виде ряда по степеням  $\rho'$  с точностью  $O(\rho'^2)$

$$V_0(\rho_0 + \rho') = V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \rho' + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V_0}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} \rho'^2 + \dots \quad (\text{I.3.1})$$

$$V_\eta(\rho_0 + \rho') = V_0 + \frac{\partial V_\eta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \rho' + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V_\eta}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} \rho'^2 + \dots$$

Уравнения движения (I.I.5), (I.I.6) представим в виде одного уравнения, исключив переменную  $u$  с помощью дифференцирования по соответствующим переменным

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{I.3.2})$$

Продифференцировав дважды по времени уравнение (I.I.4) и подставив в него (I.3.2), получим уравнение относительно одной переменной

$$\tau_p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{2V_0^2} \cdot \frac{\partial^2 V_0}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial t^2} \right) + \quad (\text{I.3.3})$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_\eta^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \frac{1}{2V_\eta^2} \cdot \frac{\partial^2 V_\eta}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial t^2} \right) = 0.$$

В работе [10] получено подобное уравнение, но без нелинейных членов. Наряду с нелинейностью, характерной для гидродинамических процессов, сложный дисперсионный закон указывает на возможность существования разных решений.

Ниже будет показано, что (I.3.3) переходит в уравнение **KdVB** (Кортвега-де Вриза-Биргера) для низкочастотных возмущений. В высокочастотном пределе получается уравнение с гидродинамической нелинейностью и членами, входящими в уравнение Клейна-Гордона.

#### I.4. Дисперсионное соотношение, закон загужания малых колебаний.

Среда, описываемая уравнением (I.3.3), обладает дисперсионными свойствами. С этой целью проанализируем соответствующее этому уравнению дисперсионное соотношение. Оно легко получается из (I.3.3) подстановкой бесконечно малого возмущения вида

$$p' \sim \exp(i(kx - \omega t))$$

$$-i\omega\tau_p \frac{c_p^2}{c_m^2} (\omega^2 - c_m^2 k^2) + (\omega^2 - c_p^2 k^2) = 0. \quad (I.4.1)$$

Из этого выражения находим зависимость  $k = k(\omega)$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_m^2} \frac{\tau_p \omega^2}{1 + \tau_p^2 \omega^2} \left( 1 - \frac{i}{\tau_p \omega} \cdot \frac{c_m^2 - c_p^2}{c_p^2} + \frac{1}{\tau_p^2 \omega^2} \cdot \frac{c_m^2}{c_p^2} \right). \quad (I.4.2)$$

Извлекая квадратный корень, представим  $k = k' + ik''$ . Очевидно, что  $k'' > 0$  отвечает скорости затухания волны с расстоянием [9]. Величину  $c = \omega/k'$  можно соотносить со скоростью распространения возмущения. Выражения для  $k'$  и  $k''$  имеют вид

$$k' = a_1 ((a_2^2 + a_3^2)^{1/2} + a_2)^{1/2}; \quad k'' = a_2 ((a_2^2 + a_3^2)^{1/2} - a_2)^{1/2},$$

$$a_1 = \frac{\tau_p \omega^2}{\sqrt{2} c_m \sqrt{1 + \tau_p^2 \omega^2}}; \quad a_2 = 1 + \frac{c_m^2}{\tau_p^2 \omega^2 c_p^2};$$

$$a_3 = \frac{c_m^2 - c_p^2}{\omega \tau_p c_p^2}.$$

В качестве примера на рис. I показаны зависимости величин  $c$  и  $k''$  от  $\omega\tau_p$  для водонасыщенного грунта с концентрацией воздуха 0,1%. В такой среде  $c_m = 1620$  м/с и  $c_p = 260$  м/с [8]. Скорость  $c$  монотонно возрастает от  $c_p$  до  $c_m$  при увеличении  $\omega\tau_p$ . В то же время зависимость  $k'' \sim \omega$  указывает, что при  $\omega \rightarrow 0$  диссипации нет, а для высокочастотных возмущений величина  $k''$  становится постоянной и не зависит от  $\omega$  (см. рис. I). Причем предельная величина составляет значение  $\tau_p k'' = (c_m^2 - c_p^2) / 2c_m^2 c_p^2$ . Энергия высокочастотного возмущения всегда диссипирует. Для таких возмущений снижение давления одинаково на одном и том же расстоянии и не зависит от частоты.

### I.5. Уравнения движения для низкочастотных и высокочастотных возмущений

Общим уравнением, которое в дальнейшем будет анализироваться является уравнение (I.3.3). Это уравнение нелинейное, кроме того сложней дисперсионный закон (см. разд. I.4) указывает на на-



личие дисперсионных и диссипативных эффектов.

Применим для анализа уравнения (I.3.3) асимптотический метод разложения [II, I2]. Малым (большим) параметром задачи выбирается величина  $\epsilon = \tau_p \omega$ . Величине  $\omega$  можно дать физическую интерпретацию, как характерная частота рассматриваемого волнового возмущения. Для удобства перепишем уравнение (I.3.3), опуская штрих в  $\rho'$

$$\begin{aligned} \tau_p \omega \frac{\partial}{\partial t \omega} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial (x \omega)^2} - \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial (t \omega)^2} + \alpha_\infty \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial (t \omega)^2} \right) + \\ + \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial (x \omega)^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial (t \omega)^2} + \alpha_0 \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial (t \omega)^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (I.5.I)$$

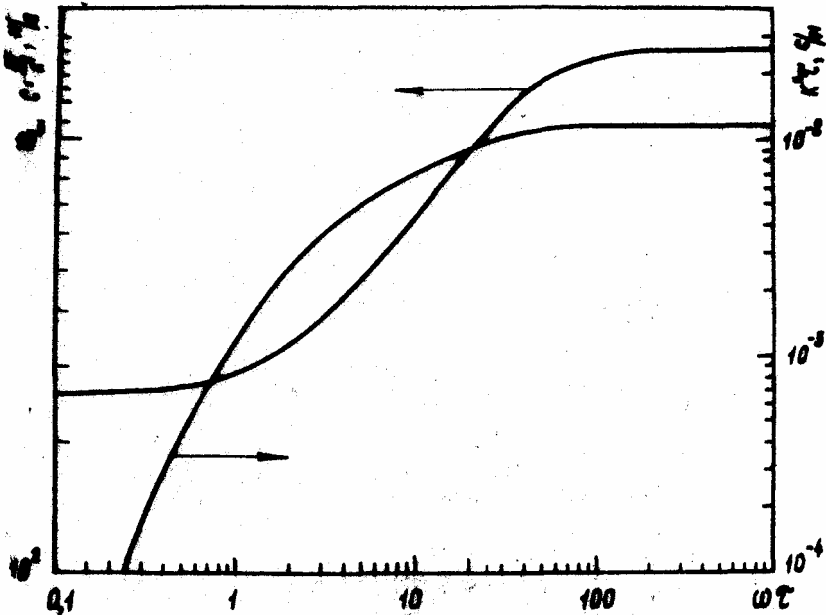


Рис. I. Зависимость скорости звука  $c'$  и коэффициента затухания  $k''$  от частоты  $\omega$ .

Вводятся новые независимые переменные

$$\tau_0 = t\omega, \quad X_0 = x\omega, \quad \tau_1 = t\omega/\varepsilon, \quad X_1 = x\omega/\varepsilon^2 \quad (\text{I.5.2})$$

Искомая величина  $P$  является функцией  $\tau_0, X_0, \tau_1, X_1$  т.е.  $P = P(\tau_0, X_0, \tau_1, X_1)$ . Имевшиеся производные в (I.5.1) представляются через независимые переменные

$$\frac{\partial}{\partial x\omega} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial X_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial t\omega} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau_1},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (x\omega)^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} + 2\varepsilon^{-2} \frac{\partial^2}{\partial X_0 \partial X_1} + \varepsilon^{-4} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (t\omega)^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} + 2\varepsilon^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial (t\omega)^3} = \frac{\partial^3}{\partial \tau_0^3} + 3\varepsilon^{-1} \frac{\partial^3}{\partial \tau_0^2 \partial \tau_1} + 3\varepsilon^{-2} \frac{\partial^3}{\partial \tau_0 \partial \tau_1^2} + \varepsilon^{-3} \frac{\partial^3}{\partial \tau_1^3},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial (t\omega) \partial (x\omega)^2} = & \frac{\partial^3}{\partial X_0^2 \partial \tau_0} + \varepsilon^{-2} \left( \frac{\partial^3}{\partial \tau_1 \partial X_0^2} + 2 \frac{\partial^3}{\partial \tau_0 \partial X_0 \partial X_1} \right) + \\ & + \varepsilon^{-4} \left( \frac{\partial^3}{\partial \tau_0 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^3}{\partial \tau_1 \partial X_0 \partial X_1} \right) + \varepsilon^{-6} \frac{\partial^3}{\partial \tau_1 \partial X_1^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (I.5.1) и в соответствии с асимптотическим методом приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$  к нулю, имеем:

$$O(\varepsilon^{-1}): \quad \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial X_1^2} - \frac{1}{c_{11}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau_1^2} + \alpha_{11} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau_1^2} \right) = 0,$$

$$O(\varepsilon^0): \quad \frac{\partial^2 P}{\partial X_0^2} - \frac{1}{c_{00}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau_0^2} + \alpha_{00} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau_0^2} = 0,$$

$$O(\varepsilon^{-1}): \left( \frac{\partial^3}{\partial \tau_0 \partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^3}{\partial \tau_0 \partial x_0 \partial x_{-1}} \right) P - \frac{3}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^3 P}{\partial \tau_0^2 \partial \tau_{-1}} + \\ + 3\alpha_{\infty} \frac{\partial^3 P^2}{\partial \tau_0^2 \partial \tau_{-1}} = 0,$$

$$O(\varepsilon^2): \frac{\partial^2 P}{\partial x_0 \partial x_{-1}} - \frac{1}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau_0 \partial \tau_{-1}} + \alpha_{\infty} \frac{\partial^2 P^2}{\partial \tau_0 \partial \tau_{-1}} = 0,$$

$$O(\varepsilon^3): \left( \frac{\partial^3}{\partial \tau_0 \partial x_{-1}^2} + 2 \frac{\partial^3}{\partial \tau_0 \partial x_{-1} \partial x_0} \right) P - \frac{3}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^3 P}{\partial \tau_0^2 \partial \tau_{-1}^2} + \\ + 3\alpha_{\infty} \frac{\partial^3 P^2}{\partial \tau_0^2 \partial \tau_{-1}^2} = 0,$$

$$O(\varepsilon^4): \frac{\partial^2 P}{\partial x_{-1}^2} - \frac{1}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau_{-1}^2} + \alpha_{\infty} \frac{\partial^2 P^2}{\partial \tau_{-1}^2} = 0,$$

$$O(\varepsilon^5): \frac{\partial}{\partial \tau_{-1}} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x_{-1}^2} - \frac{1}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau_{-1}^2} + \alpha_{\infty} \frac{\partial^2 P^2}{\partial \tau_{-1}^2} \right) = 0.$$

Получилось семь уравнений, причем первые два и последние два уравнения зависят от  $X_0$ ,  $T_0$  и  $X_{-1}$ ,  $T_{-1}$ , соответственно. Следовательно, первыми двумя из них будут описываться низкочастотные возмущения, а последними — высокочастотные. Взаимодействие между этими возмущениями выражается тремя средними уравнениями.

Выпишем уравнения движения для низкочастотных и высокочастотных возмущений в первоначальных независимых переменных  $x$  и  $t$ . При этом учитываем, что нелинейные члены представляет собой малую величину порядка  $\varepsilon$  по сравнению с остальными в данном уравнении.<sup>2</sup> Объединяя два последних уравнения (I.5.3), имеем уравнение для высокочастотного возмущения.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \alpha_{\infty} \frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2} + \beta_{\infty} \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma_{\infty} P = 0, \quad (\text{I.5.4})$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2v_0^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \Big|_{pp}; \quad \beta_0 = \frac{c_0^2 - c_0^2}{c_0^2 c_0^2}; \quad \gamma_0 = \frac{(c_0^2 - c_0^2)}{2c_0^2 c_0^2}.$$

Кроме нелинейного члена с коэффициентом  $\alpha_0$ , имеется диссипативный  $\beta_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$  и дисперсионный  $\gamma_0 p$ . Если  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ , то это линейное уравнение Клейна-Гордона. Для него известны функции Грина [13, 14], что позволяет отыскать решение по крайней мере в квадратурах. Численное решение уравнений Клейна-Гордона, применительно к описанию распространения коротковолновых возмущений в пузырьковых средах приведены в [14]. В общем случае уравнение (I.5.4) менее изучено.

Представляет несомненный интерес анализ и отыскание частных решений полученного уравнения. Этому посвящена вторая глава. Будет показано, что имеются периодические стационарные решения, в частности в виде уединенных волн.

В другом предельном случае, привлекая два первых уравнения (I.5.3), получаем уравнение для низкочастотных возмущений. Ограничиваясь распространением волн в одну сторону, полагая  $\frac{\partial}{\partial x} - c_0^2 \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial x}$  (факторизация) окончательно имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_0 p \frac{\partial p}{\partial x} - \beta_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \gamma_0 \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = 0, \quad (\text{I.5.5})$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{v_0^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \Big|_{pp}; \quad \beta_0 = \frac{c_0^2 c_0^2}{2c_0^2} (c_0^2 - c_0^2); \quad \gamma_0 = \frac{1}{8} \frac{c_0^2 - c_0^2}{c_0^2} (c_0^2 + 3c_0^2) c_0^2 c_0^2.$$

Это известное уравнение  $KdVB$ . Оно встречается во многих областях физики при описании нестационарных нелинейных процессов. Математики уделяют большое внимание изучению поведения решений этого уравнения. Уравнение  $KdV$  ( $\beta_0 = 0$ ) относится к тем нелинейным уравнениям, которые удалось проинтегрировать.

### I.6. Солитонные решения для низкочастотных возмущений.

Как было показано в п. I.5 распространение низкочастотных возмущений в релаксирующей однородной среде описываются уравнением  $KdVB$ . Большие успехи в интегрировании нелинейных уравнений связано с исследованием уравнений  $KdV$ . Это уравнение

## II

обладает удивительными свойствами. И в первую очередь это интегрируемость, например, с помощью метода обратной задачи рассеяния. Отправляя к монографиям [1, 15-18] за подробным описанием замечательных особенностей, присущих уравнению, отметим одно из значительных свойств - наличие солитонных решений. Это не просто частное решение, с ним связаны так или иначе метод обратной задачи рассеяния, преобразование Миуры, метод Хироты, преобразование Бэклунда для этого уравнения. В связи с этим отыскание солитонных решений для других нелинейных уравнений представляет особый интерес.

Выпишем односолитонные решения для уравнения (I.5.5) в отсутствие диссипации ( $\lambda = 0$ )

$$\rho = A \alpha_0^{-1} \operatorname{ch}^{-2} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{3\alpha_0}} (x - c_0 t - \frac{1}{3} t) \right). \quad (\text{I.6.I})$$

Солитон с большей амплитудой  $A$  имеет большую скорость. Известно, что после взаимодействия двух солитонов, они имеют неизменную форму, однако приобретает сдвиг по фазе.

В случае диссипации  $\lambda \neq 0$  также удается найти точные стационарные решения [19].

### 2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

В настоящей главе изучается эволюционное уравнение (I.5.4). Существенно то, что оно нелинейное. Вид нелинейности характерен для гидродинамических эволюционных уравнений. Кроме того имеются члены ответственные за диссипацию и дисперсию. На первом этапе целесообразно исследовать уравнение без диссипации  $\lambda = 0$ . К каким решениям могут приводить взаимодействие нелинейности и дисперсии в этом уравнении? Имея здесь в виду некоторую аналогию с уравнением  $KdV$ , в котором такое взаимодействие может приводить к солитонным решениям. А такие решения могут быть полезны для разработки методов исследования изучаемого уравнения (I.5.4).

2.1. Эволюционное уравнение в форме уравнения Уизема.

Представим уравнение (I.5.4) без диссипации

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t_1^2} + \alpha_0 \frac{\partial^3 \rho^2}{\partial t_1^3} + \gamma \rho = 0 \quad (\text{2.I.I})$$

в форме уравнения Уизема. В силу того, что нелинейный и дисперсионный члены считаются малыми по сравнению с остальными, удобно перейти к новым переменным. Ограничимся рассмотрением волны только в одну сторону. С этой точностью

$$\frac{\partial}{\partial x} - c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial x}$$

и тогда в нелинейном члене производную по времени можно заменить на производную по пространству. Переходим в систему координат, движущуюся со скоростью  $c$ . В переменных

$$\xi = \sqrt{c} (x - ct), \quad t = \sqrt{c} ct, \quad u = a_0 c^{-1} \sqrt{c} p \quad (2.1.2)$$

уравнение (2.1.1) имеет вид

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \xi} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial \xi^2} + u = 0. \quad (2.1.3)$$

Дисперсионное соотношение для линеаризованного уравнения (2.1.3) легко определить

$$\omega = -\frac{1}{2k}. \quad (2.1.4)$$

Собственно, это та часть дисперсионного соотношения линеаризованного уравнения (2.1.1), которая отвечает за дисперсионное размывание волны.

Теперь обратимся к уравнению Уизема, общая запись которого имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \int_{-\infty}^{\infty} K'(\xi - s) \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} ds = 0. \quad (2.1.5)$$

С одной стороны, это уравнение содержит нелинейность, характерную для гидродинамических течений, с другой, — известно [18, 20], что всегда можно подобрать ядро  $K'(\xi)$  такое, чтобы получить нужную дисперсию. Так дисперсионное соотношение  $c(k) = \omega(k)/k$  и ядро  $K'(\xi)$  связываются через преобразование Фурье

$$c(k) = F[K'(\xi)],$$

$$K'(\xi) = F^{-1}[c(k)].$$

Следовательно, дисперсионному соотношению (2.1.4) соответствует ядро

$$K(\xi) = F^{-1} \left[ \frac{\omega}{k} \right] = \frac{1}{4} |\xi|. \quad (2.1.6)$$

Таким образом уравнение (2.1.3) сводится к уравнению Уизема, имеющему вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi - s| \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0. \quad (2.1.7)$$

Отметим, что уравнение Уизема обладает интересными свойствами, в частности, описывает устойчивые волновые образования типа уединенных волн, имеет периодические решения, объясняет существование предельной амплитуды [20]. Важными свойствами является наличие законов сохранения для волн быстро убывающих на бесконечности. Укажем некоторые из них

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u d\xi = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\xi = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{u^3}{3} + \hat{K}u \right) d\xi = 0.$$

По определению  $\hat{K}u = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi - s) u(s, t) ds$ .

## 2.2. Периодические решения.

Остановимся на уравнении (2.1.6) и найдем решения типа бегущих волн. Решение ищется в виде

$$u(\xi, t) = u(\xi - vt). \quad (2.2.1)$$

Тем самым переходим от двух независимых переменных к одной. Величина  $v$  является параметром. Подставляя (2.2.1) в уравнение (2.1.7), после однократного интегрирования имеем

$$-vu + \frac{1}{2}u^2 + \hat{K}u + c = 0. \quad (2.2.2)$$

Воспользуемся тем обстоятельством, что функция  $|\xi|$  является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} |z| = \delta(z),$$

т.е. справедливо соотношение

$$2 \frac{d^2}{dz^2} K u = u.$$

Применяя к (2.2.2) оператор  $D^2 \equiv \frac{d^2}{dz^2}$ , получаем

$$\frac{d^2}{dz^2} (u-v)^2 + u = 0.$$

Это же уравнение получается также из (2.1.3) после подстановки в него (2.2.1). Далее заменой

$$z = u - v \tag{2.2.3}$$

приводим последнее уравнение к виду

$$2 \frac{d}{dz} z z' + (z + v) = 0,$$

которое после умножения на  $z z'$  интегрируется

$$(z z')^2 = -\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} v z^2 + C_1. \tag{2.2.4}$$

Как обычно штрих обозначает производную. Трехчлен в правой стороне удобно представить через корни  $a, b, c$  уравнения, образованного из этого трехчлена

$$(z z')^2 = -\frac{1}{3} (z-a)(z-b)(z-c). \tag{2.2.5}$$

Легко проверить, что если будут комплексные корни, то значение  $z$  стремится к  $-\infty$ , что противоречит физической постановке задачи. Действительно, если будет только один действительный корень, то график функции

$$f(z) = -\frac{1}{3} (z-a)(z-b)(z-c), \tag{2.2.6}$$

составленный из правой части уравнения (2.2.5), один раз пересекает ось абсцисс. Следовательно, при  $z \rightarrow +\infty$  будет  $f \rightarrow -\infty$  и нао-



борот при  $z \rightarrow -\infty$ ,  $f \rightarrow +\infty$ . Но в силу того, что трехчлен в области интегрирования всегда должен быть положителен, как следует из левой части уравнения (2.2.5), то эта область по  $z$  распространяется от минус бесконечности до значения единственного действительного корня. Итак, все корни трехчлена должны быть действительными. Это требует выполнения условия, чтобы значение  $c_2$  располагалось между  $-\frac{1}{2}v^2$  и 0. Для определенности будем считать, что  $c = \delta < \alpha$ . Корни связаны формулами через  $v$ .

$$\begin{cases} \delta \\ c \end{cases} = \frac{-\varphi z \sqrt{z^2 - 4\alpha\varphi}}{2}, \quad \varphi = \frac{1}{2}v + \alpha.$$

Причем всегда корень  $\alpha \in [0, 0,5]$  для  $v > 0$  или  $\alpha \in [-v, -1,5v]$  для  $v < 0$ . Тогда из последней формулы следует, что всегда  $c < 0$ , а корень  $\delta$  меняет знак в зависимости от знака  $v$ .

Интересны два случая. Первый, когда волна движется со скоростью, превышающей скорость звука  $c_0$ , тогда  $v > 0$  и  $\delta < 0$ , и второй случай, когда  $v < 0$ , тогда  $\delta > 0$ .

Область интегрирования уравнения (2.2.5) отрезок  $[\delta, \alpha]$ . В точках  $z = \delta$  и  $z = \alpha$  производные  $z'$  равны нулю. Интегрируем уравнение (2.2.5).

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sqrt{z}} + c_2 &= \int_z^{\alpha} \frac{z dz}{\sqrt{(a-z)(z-\delta)(z-c)}} = \\ &= \frac{2c}{\sqrt{a-c}} F(\varphi, \kappa_1) + 2\sqrt{a-c} E(\varphi, \kappa_1). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Здесь  $F(\varphi, \kappa_1)$ ,  $E(\varphi, \kappa_1)$  — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно,  $\kappa_1 = \sqrt{\frac{a-\delta}{a-c}}$  и

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{z-\delta}{a-\delta}}. \quad (2.2.8)$$

Константа  $c_2$  определяется начальной фазой волнового профиля, без потери общности ее можно считать равной нулю. Соотношение (2.2.7) и (2.2.8) дают параметрическую зависимость искомой функции  $z = z(\varphi)$  от  $f = \frac{z}{\sqrt{z}}(\varphi)$ .

Для волны, движущейся со скоростью, превышающей скорость звука высокочастотных возмущений, имеется особенность. А именно.

при  $z = 0$  (а эта точка входит в область интегрирования  $\delta_{1,2} < \alpha$  производные  $z'$  уходят в бесконечность. В окрестности  $z = 0$  решение подчиняется уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} (z^2 + \delta z^2) = 0.$$

То есть интегральная кривая проходит по эллипсу, центр которого лежит на линии  $u = v$ . На рис. 2 приведены графики амплитуды  $u$  от координаты  $z$ . В силу многозначности эллиптических интегралов решения будут периодичны и, как видно из рис. 2, неоднозначны. Кривые имеют вид периодически повторяющихся петель. Из физической постановки задачи ясно, что решение должно быть непрерывным и однозначным. Отбрасывая ту часть, которая обозначена на рисунке пунктирной линией, получаем требуемые решения. Сплошные кривые имеют точки заострения. В обобщенном смысле они являются решением дифференциального уравнения (2.1.3).

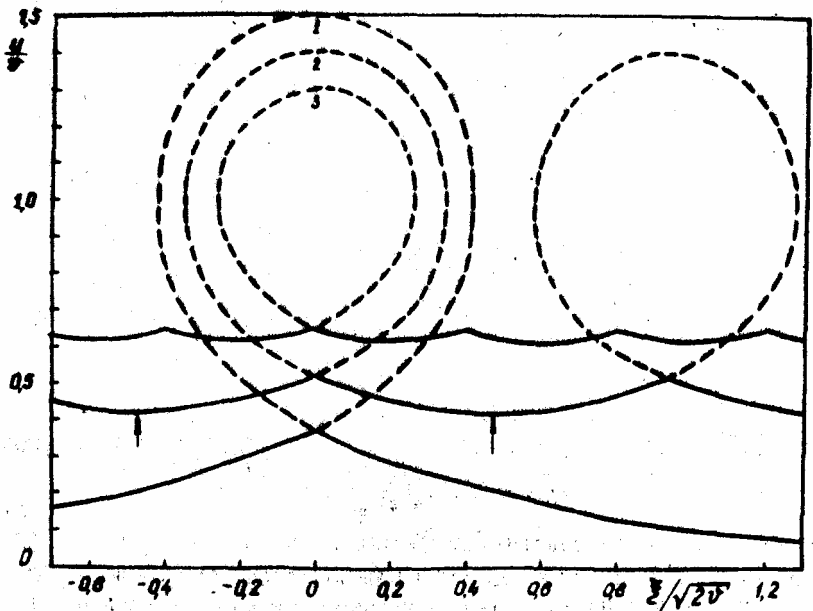


Рис. 2. Стационарные волны при  $v > 0$ .

Отмечая, что уравнение (2.1.3) эквивалентно уравнению Уизема (2.1.7) с определенным ядром (2.1.6), вспомним [20], что решения уравнения Уизема с ядром  $e^{-|U|}$  могут иметь точки заострения. Для предельной амплитуды  $u_{max} = 1,5v$  (тогда  $c_1 = \frac{1}{2}v^2$ ) периодическая волна вырождается в уединенную волну (кривая I на рис.2).

В случае, когда волна движется со скоростью меньшей скорости звука  $c_{\infty}$ , т.е.  $v < 0$ , точка  $z = 0$  не попадает в интервал  $(\beta, \alpha)$ . Профили волны для различных максимальных амплитуд приведены на рис.3. При малых амплитудах  $u_{max} \rightarrow 0$  волна переходит в синусоидальную с периодом  $2\pi\sqrt{2|v|}$ . При увеличении максимальной амплитуды период незначительно уменьшается. Профиль волны гладкий, если не достигнута предельная максимальная амплитуда. Для волны с предельной амплитудой  $u_{max} = 0,5|v|$  характер профиля меняется.

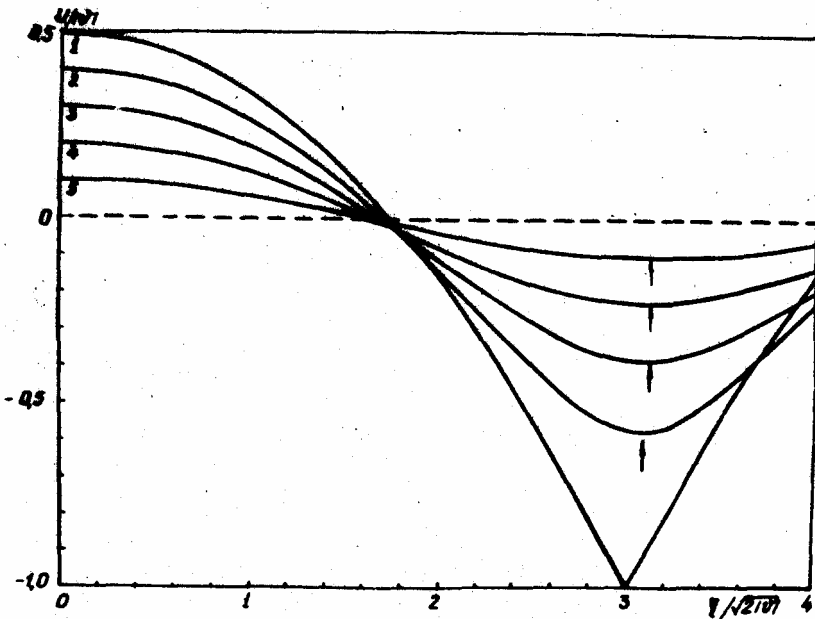


Рис.3. Периодические волны при  $v < 0$ .

Кривая I, соответствующая этому случаю, состоит из парабол. При  $\xi = 3\sqrt{2|v|}$  (это полупериод) имеется точка заострения, здесь производная  $\frac{du}{d\xi} = -\sqrt{2|v|}$  меняет знак на противоположный. Заметим, что периодические решения существуют и для случая, когда не накладывается ограничение  $v \ll 1$ . Напомним, что это условие позволило в некоторых членах исходного уравнения (I.5.4) перейти от производных по времени к производным по координате. Тогда результат будет следующий. Профили волн будут иметь тот же вид, что на рис.2 и рис.3 с той же числовой сеткой только по оси абсцисс откладывается  $\xi/\sqrt{|v(2+v)|}$ , а по оси ординат  $-u \cdot |2(v+v)|/v(v+2)$ . Однако, изучение взаимодействия уединенных волн со скоростями  $v \sim 1$ , вероятно, представит более сложную задачу.

### 2.3. Уединенные волны.

Уединенные волны существуют только в случае  $v > 0$ . На рис. 2 она показана кривой I. Формулы, выражающие параметрическую зависимость  $u$  от  $\xi$  (2.2.3), (2.2.8) в данном случае упрощаются. С учетом (2.2.1) решение для уединенных волн записывается

$$u = \frac{3}{2} v ch^{-2} \frac{\xi}{2}, \quad (2.3.1)$$

$$\xi - vt = \sqrt{2v} \left( \chi - 3 \ln \frac{\chi}{2} \right).$$

Параметром в этих зависимостях выступает величина  $\chi$ . Представляет несомненный интерес изучение взаимодействия уединенных волн. Такая задача позволила бы ответить на ряд вопросов, связанных со свойствами уединенных волн, и, возможно, дало бы ключ к решению нелинейных эволюционных уравнений вида (I.5.4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Додд Р., Эйлбен Дж., Гиббон Дж. и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. - М.: Мир, 1988. - 694 с.
2. Владимиров В.А., Даниленко В.А., Королевич В.Ю. Нелинейные модели многокомпонентных релаксирующих сред. Динамика волновых структур и качественный анализ. I. - Киев, 1990. - 40с. - (Препринт/АН УССР. М-т геофизики).
3. Мандельштам Л.М., Леонтович М.А. К теории поглощения звука в жидкостях // ДЭФ. - 1937. - Вып. 3, № 7. - С. 438-449.
4. Ясников Г.П., Белоусов В.С. Эффективные термодинамические функции газа с твердыми частицами // Инжен.-физ. журнал. - 1978. - 34, № 6. - С. 1085-1089.
5. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. - Новосибир.: Наука, 1984. - 304 с.
6. Накоряков В.Е., Соболев В.В., Шрейбер И.Г. Волны конечной амплитуды в двухфазных системах // Волновые процессы в двухфазных системах. - Новосиб.: ИТФ СО АН СССР, - 1975. - с. 5-53.
7. Накоряков В.Е., Шрейбер И.В., Гасенко В.Г. Волны умеренной интенсивности в жидкости с пузырьками газа // Волновые процессы в двухфазных средах. - Новосиб.: ИТФ СО АН СССР. - 1980. - с. 5-19.
8. Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. - М.: Наука, 1982. - 288 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986. - 736с.
10. Clarke J.E. Lectures on plane waves in reacting gases // Ann. Phys. Fr. - 1984. - 9, № 2. - P. 211-306.
11. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. - Киев: Наук. думка, 1971. - 327 с.
12. Найфе А.Х. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976, 1976. - 456 с.
13. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1971. - 512 с.
14. Малых К.В., Огородников И.Л. О применении уравнений Клейна-Гордона для описания структуры импульса сжатия в жидкости с пузырьками газа // Динамика сплошных сред. - 1977. - Вып. 29. - С. 143-148.
15. Захаров В.Е., Манакон С.В., Новиков А.П., Питаевский А.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980. - 320 с.
16. Абловитц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. - М.: Мир, 1987. - 480 с.
17. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. - М.: Мир, 1989. - 325 с.
18. Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. - М.: Изд-во МГУ, 1988. - 176 с.
19. Чудряшов Н.А. Точные решения уравнения  $N$ -го порядка с нелинейностью Бургерса-Кортевега-де Вриза // Матем. моделирование. - 1989. - I, № 3. - С. 57-65.
20. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. - 622 с.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение . . . . .	I
1. Эволюционные уравнения для релаксирующей среды . .	I
1.1. Основные положения и определяющие уравнения . . .	I
1.2. Объемная вязкость релаксирующей среды . . . . .	4
1.3. Малые возмущения в релаксирующей среде . . . . .	4
1.4. Дисперсионное соотношение, закон затухания малых колебаний . . . . .	5
1.5. Уравнения движения для низкочастотных и высоко- частотных возмущений . . . . .	6
1.6. Солитонные решения для низкочастотных возмущений .	10
2. Точные решения одного эволюционного уравнения волновой динамики . . . . .	II
2.1. Эволюционное уравнение в форме уравнения Уизема .	II
2.2. Периодические решения . . . . .	13
2.3. Уединенные волны . . . . .	18
Список литературы . . . . .	19

Научное издание

ВАХНЕНКО Вячеслав Алексеевич

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОРОТКОВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ  
В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ответственный за выпуск Д.М.Бондарева

Подп. к печ. 28.12.90. Формат 60 x 84/16. Бум. офс. Офс.печ.  
Усл.печ.л. 1,16. Усл.кр.-отт. 1,4. Уч.- изд.л.1,25.  
Тираж 120 экз. Заказ 124. Цена 15 к.

---

Участок роталпринтной печати ОНТИ ИПП АН УССР  
252014 Киев 14, ул.Тимирязевская,2.