ТОЧНІ ДВОСОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ МОДЕЛЬНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

В. О. ВАХНЕНКО, Е. Дж. ПАРКЕС[1], В. А. ДАНИЛЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І.Субботіна НАН України, відділення геодинаміки вибуху
(252054 Київ 54, вул. Б.Хмельницького, 63б),
[1]Department of Mathematics, University of Strathclyde
(Richmond Street, Glasgow G1 1XH, U.K.)

УДК 539

Для еволюційного нелінійного рівняння $(u_t + uu_x)_x + u = 0$ з використанням елементів методу оберненої задачі розсіяння (ОЗР) знайдено точні двосолітонні розв'язки.

Вступ

У цій роботі досліджується нелінійне еволюційне рівняння, що одержало назву рівняння Вахненка (VE):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u + u = 0. \tag{0.1}$$

В роботі [1] за допомогою нього було запропоновано моделювати високочастотні збурення у релаксуючому середовищі. Рівняння (0.1) розглядалося також у роботах [2 — 4]. На відміну від високочастотних збурень поширення низькочастотних збурень у релаксуючому середовищі підлягає добре відомому рівнянню KdV [2]. Це рівняння часто використовується у різних галузях фізики для опису нелінійних процесів [5]. Зазначимо, що рівняння (0.1) і рівняння KdV мають одну і ту ж саму гідродинамічну нелінійність, у них відсутні дисипативні члени, а дисперсійні — відрізняються. Певна схожість цих рівнянь наводить на думку, що під час дослідження рівняння (0.1) застосування методу ОЗР може бути успішним. Вивчення VE цікаве як застосуванням до його розв'язання методу ОЗР, так і виявленням на його основі умов формування стійких хвильових структур (солітонів).

1. Рівняння у нових координатах

Для VE у роботах [2, 3] знайдено два сімейства періодичних розв'язків. Це було зроблено прямим інтегруванням рівняння (0.1) на біжучих хвилях. В одному випадку розв'язки набувають петлеподібної форми (див. рис. 1 у [2]). Ці неоднозначні розв'язки схожі на петлеподібні солітонні розв'язки еволюційного рівняння, що описує динаміку пружної струни [6]. Петлеподібні солітони на нитковому вихорі було досліджено у роботах [7, 8].

У нашому випадку для рівняння (0.1) існують координати, де розв'язок набуває однозначної параметричної залежності. Перехід до таких координат є ключовим у вирішенні проблеми взаємодії солітонів. У перспективі такі розв'язки наблизять нас до розв'язання задачі Коши за допомогою методу ОЗР. У цій роботі знайдено точний двосолітонний розв'язок VE. На відміну від [4], де взаємодію двох солітонів вивчають прямим методом, запропонованим у [9, 10], тут використано елементи теорії ОЗР. Зауважимо, що в [2] допущено помилку і двосолітонний розв'язок не правильний.

Розглянемо нові незалежні змінні (X, T), що визначаються співвідношеннями

$$\varphi\, dT = dx - u\, dt, \quad X = t. \tag{1.1}$$

Функція φ підлягає визначенню. Вона увійде як додаткова залежна змінна у систему рівнянь, до якої зараз буде зведено початкове рівняння (0.1). Відмітимо, що для односолітонного розв'язку величина φ набуває вигляду (див. формули (12) та (14) в [2]) $\varphi = 1 - u/v$. Функції $x = x(T, X)$, $u \equiv U(T, X)$ є однозначними.

У координатах (X, T) рівняння (0.1) на змінну $U(T, X) \equiv u(x, t)$ має вигляд

$$\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial}{\partial X}U + U = 0. \tag{1.2}$$

Рівняння для φ одержуємо таким чином. Запишемо обернене до (1.1) перетворення

$$dx = \varphi\, dT + U\, dX$$

та врахуємо умову, що величина dx повинна бути повним диференціалом. Тоді отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial T}. \tag{1.3}$$

Це рівняння разом з рівнянням (1.2), переписаним у вигляді

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + U\varphi = 0, \tag{1.4}$$

утворюють основну систему рівнянь. Можна звести цю систему до одного рівняння на змінну $W_X = U$, якщо цікавитися розв'язками, що швидко спадають при $|X| \to \infty$:

$$W_{XXT} + (1 + W_T)\, W_X = 0. \tag{1.5}$$

Початкову незалежну просторову змінну x можна знайти за формулою

$$x = x_0 + T + W. \tag{1.6}$$

Тут було враховано, що $dx \approx dT$, коли $|x| \to \infty$ і $W \to 0$.

Що можна сказати про систему (1.3), (1.4)? По-перше, впадає у вічі, що рівняння (1.4) пов'язане з рівнянням Шредінгера

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - Q\psi = \lambda\, \psi$$

з власним числом (енергією) рівним нулю $\lambda = 0$ та потенціалом $Q = -U$. Рівняння (1.4) визначає залежність від координати X, а час T входить в нього як параметр. Натомість часова залежність задається рівнянням (1.3). По-друге, відомий односолітонний розв'язок подається у вигляді [2, 3]

$$U = \frac{3}{2} v \operatorname{sech}^2 \frac{T - vX}{2\sqrt{v}}. \tag{1.7}$$

У тих випадках, коли це не зазначено окремо, для зручності покладемо $v = 4$, $T = 0$, тоді (1.7) перетвориться на

$$U = 6 \operatorname{sech}^2 X. \tag{1.8}$$

Розв'язок (1.8) так само, як і односолітонний розв'язок для KdV-рівняння (див. рівняння (2.4) з $\eta = 1$), пропорційний $U \sim \operatorname{sech}^2 X$.

2. Односолітонний розв'язок

Метод ОЗР виявився досить успішним для знаходження розв'язків багатьох нелінійних рівнянь. З огляду на рівняння (1.4) цікавими можуть виявитися рівняння, в яких задача розсіяння пов'язується з рівнянням Шредінгера. До таких рівнянь належить KdV-рівняння

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{2.1}$$

яке асоціюється з системою рівнянь

$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\, \psi, \tag{2.2}$$

$$\psi_t + 3\lambda\, \psi_x + \psi_{xxx} + 3u\psi_x = 0. \tag{2.3}$$

Система рівнянь (2.2), (2.3) складає суть методу ОЗР, започаткованого у класичній роботі [11].

Систему рівнянь, яка була б аналогічною системі (2.2), (2.3) і з якою асоціювалося б рівняння (1.5), ще не знайдено. Але з огляду на те, що рівняння (1.4) є рівнянням Шредінгера з $\lambda = 0$, ми будемо використовувати елементи методу ОЗР, розвинутого, зокрема, для KdV-рівняння.

Спочатку відмітимо важливий факт. Відомий односолітонний розв'язок для KdV-рівняння (2.1) має вигляд (поки що залежність від часу нас не цікавить)

$$u = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta x. \tag{2.4}$$

Для спрощення записів покладемо $\eta = 1$, що відповідає спрощенню (1.7), (1.8). Важливим фактом є те, що потенціали як $u = 2\operatorname{sech}^2 x$ (2.4), так і $U = 6\operatorname{sech}^2 X$ (1.8) належать до безвідбивних потенціалів, які в загальному випадку мають вигляд (див. [5, розд. 2.4]):

$$u = m(m+1) \operatorname{sech}^2 x. \tag{2.5}$$

Потенціалу (2.4) відповідає $m = 1$, а потенціалу (1.8) — $m = 2$. Для інтегровних нелінійних рівнянь, як відомо [5, 12], безвідбивні потенціали дають солітонні розв'язки (у загальному випадку N-солітонні розв'язки).

Розглянемо односолітонні розв'язки системи (1.3), (1.4) з урахуванням ОЗР. Для цього проаналізуємо рівняння Шредінгера з потенціалом $Q \equiv -U = -6\operatorname{sech}^2 X$ (T — параметр):

$$\frac{d^2 \psi}{dX^2} - Q\,\psi = -k^2 \psi, \quad k^2 = -\lambda. \tag{2.6}$$

Для задачі розсіяння розв'язок (2.6) повинен задовольняти краєві умови

$$\psi(X, k) = \begin{cases} e^{-ikX}, & X \to -\infty, \\ b(k)\, e^{ikX} + a(k)\, e^{-ikX}, & X \to +\infty, \end{cases} \qquad (2.7)$$

де $b(k)$ та $a(k)$ — коефіцієнти відбивання та проходження відповідно.

У роботі [5, розд. 2.4] викладено витончений метод визначення хвильових функцій ψ та власних значень для безвідбивних потенціалів $Q_m = -m(m+1)\,\mathrm{sech}^2 X$. Загальний розв'язок рівняння (2.6) y_m для потенціалу Q_m пов'язаний із загальним розв'язком Y_0 для $Q_0 = 0$ співвідношенням

$$y_m(X, k) = \prod_{m'=1}^{m} \left(m' \tanh X - \frac{d}{dX} \right) Y_0(X, k), \qquad (2.8)$$

тоді

$$a(k) = \prod_{m'=1}^{m} (ik + m')\,/\,(ik - m'), \quad b(k) = 0. \qquad (2.9)$$

У нашому випадку ($m = 2$) рівняння (2.6) має два зв'язані стани

$$-ik_1 \equiv \varkappa_1 = 1, \quad \psi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh X \,\mathrm{sech}\, X,$$

$$-ik_2 \equiv \varkappa_2 = 2, \quad \psi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{sech}^2 X. \qquad (2.10)$$

Функції ψ_i нормовані $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_i|^2 dX = 1$ у відповідності до вимог методу ОЗР.

Ось тут виникає основна складність і відмінність від відомих інтегровних нелінійних рівнянь. Пов'язано це з тим, що для відомих рівнянь, які асоціюються із ізоспектральним рівнянням Шредінгера (див., наприклад, (2.1)), існує тільки один зв'язаний стан, у той час як рівняння (0.1), що досліджується, має два зв'язані стани. Дійсно, для відомих нелінійних рівнянь потенціал, що відповідає односолітонному розв'язку, має таку залежність від просторової координати (див. формулу (4.3.9) у [5]):

$$u(x) = 2\eta^2 \,\mathrm{sech}^2\, \eta x. \qquad (2.11)$$

Легко помітити, що це відповідає $m = 1$ у формулі (2.5), тобто спостерігається тільки один зв'язаний стан

$$\psi = \sqrt{\eta/2}\,\mathrm{sech}\,\eta x, \quad \psi \to c\sqrt{\eta}\, \exp(-\eta x),$$

$$c = \sqrt{2}, \quad \text{коли } x \to +\infty. \qquad (2.12)$$

Маючи на увазі неповну адекватність нашої задачі до вже відомих, зробимо спробу відтворити потенціал (розв'язок нашої задачі) за даними розсіяння та визначити потім їх часову залежність.

Як відомо [5, 12], щоб відтворити потенціал у рівнянні Шредінгера (2.6), достатньо знати дані розсіяння при $X \to \infty$. Із співвідношень (2.10) одержуємо

$$\psi_1 \to c_1 e^{-\varkappa_1 X}, \quad c_1 = \sqrt{6}, \quad \varkappa_1 = 1,$$

$$\psi_2 \to c_2 e^{-\varkappa_2 X}, \quad c_2 = \sqrt{12}, \quad \varkappa_2 = 2. \qquad (2.13)$$

Зрозуміло, що випадок $\varkappa_1 = \frac{1}{2}\varkappa_2 = 1$ відповідає спрощенню (1.7), (1.8), а також (2.4). Ми відмовимося від цієї умови, тобто $v = 0$ у (1.7), коли будемо записувати кінцевий результат у загальному вигляді.

Для зручності відтворимо загальновідому процедуру побудови потенціалу. За даними розсіяння будується функція (T — параметр)

$$B(X; T) = \sum_{m=1}^{n} c_m^2(t)\, e^{-\varkappa_m X} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b(k, T)\, e^{ikX} dk.$$

Потім розв'язується лінійне інтегральне рівняння Марченка — Гельфанда — Левітана [13] відносно $K(X, y; T)$:

$$K(X, y; T) + B(X + y; T) + $$

$$+ \int\limits_{X}^{+\infty} B(y + z; T)\, K(X, z; T)\, dz = 0. \qquad (2.14)$$

Потенціал врешті-решт знаходиться за формулою

$$-U = Q = -2 \frac{d}{dX} K(X, X; T). \qquad (2.15)$$

Для безвідбивного потенціалу $b(k) = 0$ (2.9) розв'язок шукається у вигляді

$$K(X, y; T) = -\sum_{m=1}^{N} c_m(T)\, \psi_m(X; T)\, e^{-\varkappa_m y}, \qquad (2.16)$$

що приводить, як відомо, до лінійної системи рівнянь відносно ψ_m:

$$\mathrm{A}\Psi = \mathrm{C}, \qquad (2.17)$$

де матриця $A = [a_{mn}]$, $a_{mn} = \delta_{mn} + c_n(T) \times$ $\times c_m(T) \frac{e^{-X(\varkappa_m+\varkappa_n)}}{\varkappa_m + \varkappa_n}$, вектор-стовпець $\Psi = [\psi_m]$, вектор-стовпець $C = [c_m(T) e^{-\varkappa_m X}]$. У формулах (2.14) — (2.17) T — параметр, більш того, ми вважали $T = 0$. Але ми зберегли змінну T у цих формулах, щоб скористатися ними, коли будемо знаходити часову залежність даних розсіяння.

Відомо [5, 12], що для безвідбивного потенціалу достатньо знати детермінант матриці $\Delta = \det [a_{mn}]$, тоді (2.15) переходить у

$$K(X, X; T) = \frac{d \ln |\Delta|}{dX}, \quad -U = -2 \frac{d^2 \ln |\Delta|}{dX^2}. \qquad (2.18)$$

Для нашого випадку односолітонного розв'язку рівняння (0.1) дані розсіяння (2.13) і $b(k) = 0$ визначають детермінант

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{c_1^2}{2} e^{-2X} & \frac{c_1 c_2}{3} e^{-3X} \\ \frac{c_1 c_2}{3} e^{-3X} & 1 + \frac{c_2^2}{4} e^{-4X} \end{bmatrix} =$$

$$= (1 + e^{-2X})^3 \qquad (2.19)$$

і тоді потенціал

$$-U = 12 \frac{d}{dX} \frac{e^{-2X}}{1 + e^{-2X}} = -6 \operatorname{sech}^2 X.$$

Таким чином, проведено стандартну процедуру відтворення потенціалу за даними розсіяння (поки що без часової залежності). Зауважимо, що детермінант для односолітонного розв'язку KdV-рівняння (2.1) набуває вигляду

$$\Delta = 1 + e^{-2x}, \quad u = 2 \operatorname{sech}^2 x. \qquad (2.20)$$

З $U = W_X$ та (2.18) зрозуміло, що $W = 2K(X, X; T)$.

Ми звертаємо увагу на вираз (2.19). В елементах матриці фігурує два стани з $q_1 = e^{-X}$ та $q_2 = e^{-2X}$. Часова залежність для кожного стану, звичайно, своя, але ці залежності повинні мати між собою певний зв'язок, тобто зв'язок між $c_1(T)$ та $c_2(T)$. Останній вираз (2.19) вказує, що цей зв'язок не може бути довільним, більше того, якщо один із станів визначено однозначно, повинен існувати і другий стан з відповідною часовою залежністю.

До цього часу ми розглядали залежність потенціалу від просторової координати, а час вважали параметром. Зараз простежимо залежність даних розсіяння від часу. Як відмічалось, ми не маємо повної системи рівнянь, яка асоціювалася б з рівнянням (0.1), що аналізується. Тому, розглядаючи часову залежність даних розсіяння, зробимо спробу відтворити часову залежність потенціалу (1.7) та за допомогою нього знайти функціональні залежності $c_1(T)$, $c_2(T)$. Скористаємось залежністю

(див. формулу (22) в [12, гл. 1, розд. 2])

$$\psi(X, k; T) = e^{-ikX} + \int_X^{+\infty} K(X, y; T) e^{-iky} dy. \qquad (2.21)$$

З цієї формули випливає, що існує лінійний оператор, який переводить розв'язок рівняння Шредінгера з нульовим потенціалом (e^{-ikX}) у розв'зок цього рівняння з потенціалом $U(X)$. Функція $K(X, y; T)$ — ядро оператора перетворення.

Запишемо рівняння (2.21) для $k = 0$. (Це можна зробити, і відповідну теорему доведено (див. [5, розд. 3.3]):

$$\psi(X, k = 0; T) = 1 + \int_X^{+\infty} K(X, y; T) dy. \qquad (2.22)$$

Ясно, що $\psi(X, k = 0; T) = \varphi(X, T)$, де $\varphi(X, T)$ задовольняє систему рівнянь (1.3), (1.4), що досліджується. Враховуючи (2.22), співвідношення (1.3) перепишемо так:

$$1 + \int_X^{+\infty} K(X, y; T) dy = 2 \frac{\partial K(X, X; T)}{\partial T} + C. \qquad (2.23)$$

Оскільки це рівняння повинно виконуватися для будь-яких X, то знаючи, що на асимптотиці $|X| \to \infty$ функція $K(X, y; T)$ швидко спадає, визначимо константу інтегрування $C = 1$. Знову ж запишемо $K(X, y; T)$ у вигляді (2.16), оскільки потенціал безвідбивний, та одержуємо

$$\sum_{m=1}^{2} \frac{c_m(T)}{\varkappa_m} \psi_m(X; T) e^{-\varkappa_m X} =$$

$$= 2 \sum_{m=1}^{2} \frac{\partial c_m(T) \psi_m(X; T)}{\partial T} e^{-\varkappa_m X}. \qquad (2.24)$$

У це рівняння потрібно підставити значення ψ_m, які є розв'язком системи (2.17), при цьому вважати, що величини $c_m = c_m(T)$. Запишемо для прикладу

$$\psi_1 = \Delta^{-1}\left(c_1 e^{-\varkappa_1 X} + \frac{c_1 c_2^2}{2\varkappa_2} e^{-(\varkappa_1+2\varkappa_2)X} - \right.$$

$$\left. - \frac{c_1 c_2^2}{\varkappa_1+\varkappa_2} e^{-(\varkappa_1+2\varkappa_2)X}\right). \qquad (2.25)$$

Тут Δ — детермінант (2.19), у якому збережено залежність $c_m = c_m(T)$. Обчислимо потрібні для (2.24) члени ($\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 2$):

$$\sum_{m=1}^{2} \frac{c_m(T)}{\varkappa_m} \psi_m(X;T)\, e^{-\varkappa_m X} =$$

$$= \Delta^{-1}\left(c_1^2 e^{-2X} + \frac{1}{2} c_2^2 e^{-4X}\right),$$

$$\sum_{m=1}^{2} c_m(T)\, \psi_m(X;T)\, e^{-\varkappa_m X} =$$

$$= \Delta^{-1}\left(c_1^2 e^{-2X} + c_2^2 e^{-4X} + \frac{1}{12} c_1^2 c_2^2 e^{-6X}\right). \qquad (2.26)$$

Тоді, підставляючи (2.26) у (2.24) та прирівнюючи до нуля коефіцієнти біля однакових степенів e^{-2jX} ($j = 1...6$), отримаємо систему диференціальних рівнянь на коефіцієнти $c_m(T)$ ($m = 1, 2$):

$$e^{-2X}: (c_1^2)' = \frac{1}{2} c_1^2,$$

$$e^{-4X}: (c_2^2)' = \frac{1}{4}(c_2^2 + c_1^4),$$

$$e^{-6X}: \frac{1}{3}(c_1^2 c_2^2)' + c_1^2 (c_2^2)' - c_2^2 (c_1^2)' = c_1^2 c_2^2,$$

$$e^{-8X}: c_1^2 (c_1^2 c_2^2)' - c_1^2 c_2^2 (c_1^2)' = \frac{1}{4}(c_1^4 c_2^2 + 9 c_2^4),$$

$$e^{-10X}: c_2^2 (c_1^2 c_2^2)' - c_1^2 c_2^2 (c_2^2)' = \frac{1}{2} c_1^2 c_2^4,$$

$$e^{-12X}: c_1^2 c_2^2 (c_1^2 c_2^2)' = c_1^2 c_2^2 (c_1^2 c_2^2)'. \qquad (2.27)$$

Тут штрихом позначено похідну за часом T.

Завдяки природі явища система рівнянь (2.27) не перевизначена — тільки два перші рівняння незалежні. Тому розв'язуємо два перші рівняння з початковими умовами $c_1^2(0) = 6$, $c_2^2(0) = 12$. Випишемо спочатку загальний розв'язок цієї системи

$$c_1^2(T) = r_1 e^{T/2}, \quad c_2^2(T) = r_2 e^{T/4} + \frac{1}{3} r_1^2 e^T, \qquad (2.28)$$

де r_1, r_2 — довільні константи. Тобто у загальному випадку два стани мають різну часову залежність. І тільки завдяки конкретному співвідношенню між $c_1(0)$ та $c_2(0)$ маємо $r_2 \equiv 0$, і тому

$$c_1^2(T) = c_1^2(0)\, e^{T/2} = 6e^{T/2},$$

$$c_2^2(T) = \frac{1}{3} c_1^4(0)\, e^T = 12e^T. \qquad (2.29)$$

Таким чином, часова залежність відповідає вимозі $c_1^2(T) / c_2(T) = \mathrm{const}$. Дійсно, тільки при такій часовій залежності детермінант (2.19) вдається записати як куб деякої величини, а саме

$$\Delta = (1 + e^{-2(X - T/4)})^3. \qquad (2.30)$$

Для зручності викладок було покладено $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 2$. Тепер, залишаючи один вільний параметр $\varkappa_1$, ($\varkappa_2 = 2\varkappa_1$) та перепозначаючи його як $\alpha = \varkappa_1$, будемо мати

$$\Delta = \left\{1 + \exp\left[-2\alpha\left(X - \frac{T}{4\alpha^2}\right)\right]\right\}^3. \qquad (2.31)$$

Потенціал односолітонного розв'язку легко знайти за формулою (2.18):

$$U = 2\frac{d^2 \ln|\Delta|}{dX^2} = 6\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \Theta,$$

$$\Theta = \alpha\left(X - X_0 - \frac{T}{4\alpha^2}\right). \qquad (2.32)$$

Для довідки випишемо повністю формули для знаходження розв'язку рівняння (0.1) у початкових змінних x, t (для зручності перепозначимо T на μ, оскільки тут μ — параметр):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right) u + u = 0,$$

$$u = \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\mu},$$

$$x = x_0 + \mu + W, \quad W = 2\left(\frac{\partial \ln|\Delta|}{\partial t}\right)_\mu, \tag{2.33}$$

$$\Delta = (1+q^2)^3, \quad q = \exp(-\Theta),$$

$$\Theta = \alpha\left(t - \frac{\mu - \mu_0}{4\alpha^2}\right), \tag{2.34}$$

$$\alpha = \text{const}, \quad \mu_0 = \text{const}.$$

Таким чином, наведені формули односолітонного розв'язку модельного рівняння було отримано з використанням елементів методу ОЗР. Все це важливо тільки тоді, коли запропоновану процедуру можна використати для знаходження двосолітонного розв'язку, а у перспективі для розв'язання задачі Коши для рівняння (0.1).

3. Двосолітонний розв'язок

Одержимо двосолітонний розв'язок для (0.1). Ключем для цього є величина, яка є детермінантом у (2.33), коли розглядається односолітонний розв'язок. Для наглядності величину (2.34) запишемо ще раз

$$\Delta = (1+q^2)^3, \quad q = \exp\left[-\alpha\left(t - \frac{\mu-\mu_0}{4\alpha^2}\right)\right]. \tag{3.1}$$

Можна побачити деяку аналогію з односолітонним розв'язком KdV-рівняння (2.20)

$$\Delta = 1 + q^2, \quad q = \exp(\alpha x - 4\alpha^3 t).$$

Крім того, потенціал, що відповідає односолітонному розв'язку ($\alpha = 1$) для

а) VE ($T = 0$)

$$U = 6\,\mathrm{sech}^2 X, \tag{3.2}$$

б) KdV-рівняння ($t = 0$)

$$u = 2\,\mathrm{sech}^2 x. \tag{3.3}$$

Маючи на увазі формулу $K = \dfrac{\partial \ln|\Delta|}{\partial X}$ (2.18), та з огляду на (2.15) можна стверджувати, що коефіцієнт 6 у (3.2), на відміну від коефіцієнта 2 у (3.3), виникає з показника степеня 3 у співвідношенні (3.1).

Тепер, пригадуючи, що двосолітонний розв'язок для KdV-рівняння має вигляд [9]

$$\widetilde{F} = \Delta = 1 + q_1^2 + q_2^2 + \widetilde{A}_{12}\, q_1^2 q_2^2,$$

$$\widetilde{A}_{12} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}, \quad q_i = \exp\left[\alpha_i(x - x_{0i}) - 4\alpha_i^3 t\right], \tag{3.4}$$

ми можемо сподіватися, що двосолітонний розв'язок для VE можна шукати у вигляді, коли змінна F, яку потрібно підставити замість Δ у співвідношення (2.18), визначається виразом

$$F = (1 + q_1^2 + q_2^2 + A_{12}\, q_1^2 q_2^2)^3,$$

$$q_i = \exp\left[-\alpha_i\left(t - \frac{\mu-\mu_i}{4\alpha_i^2}\right)\right]. \tag{3.5}$$

Значення A_{12} слід визначити. Зауважимо, що F не дорівнює детермінанту матриці (2.17), яку побудовано для чотирьох рівнів з q_1, q_1^2, q_2, q_2^2 (кожному солітону відповідає два дискретні стани (2.10)),

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+3q_1^2 & 2\sqrt{2}\,q_1^3 & 6\dfrac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} q_1 q_2 & 6\dfrac{\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+2\alpha_2} q_1 q_2^2 \\ 2\sqrt{2}\,q_1^3 & 1+3q_1^4 & 6\dfrac{\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_1+\alpha_2} q_1^2 q_2 & 6\dfrac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} q_1^2 q_2^2 \\ 6\dfrac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} q_1 q_2 & 6\dfrac{\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_1+\alpha_2} q_1^2 q_2 & 1+3q_2^2 & 2\sqrt{2}\,q_2^3 \\ 6\dfrac{\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+2\alpha_2} q_1 q_2^2 & 6\dfrac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} q_1^2 q_2^2 & 2\sqrt{2}\,q_2^3 & 1+3q_2^4 \end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

Якби було $F = \Delta$, то ми б мали $A_{12} = \widetilde{A}_{12}$. Більше того, такі умови означали б, що задача для даних розсіяння для рівняння (0.1) повинна мати зв'язок з ізоспектральним рівнянням Шредінгера. Таке твердження прослідковується у роботі [14], а також у монографії [15, гл.3, 4]. Оскільки $F \neq \Delta$, а $A_{12} \neq \widetilde{A}_{12}$, можна стверджувати, що система рівнянь для методу ОЗР, яка асоціюється з VE (0.1) не містить у собі ізоспектральне рівняння Шредінгера.

Величину A_{12} для (3.5) було знайдено таким чином. Функціональну залежність (3.5) з урахуванням того, що A_{12} є невідомою величиною, підставляли у (2.33), а потім у (1.3) — (1.4). Виникала досить складна система рівнянь. Не вдаючись до

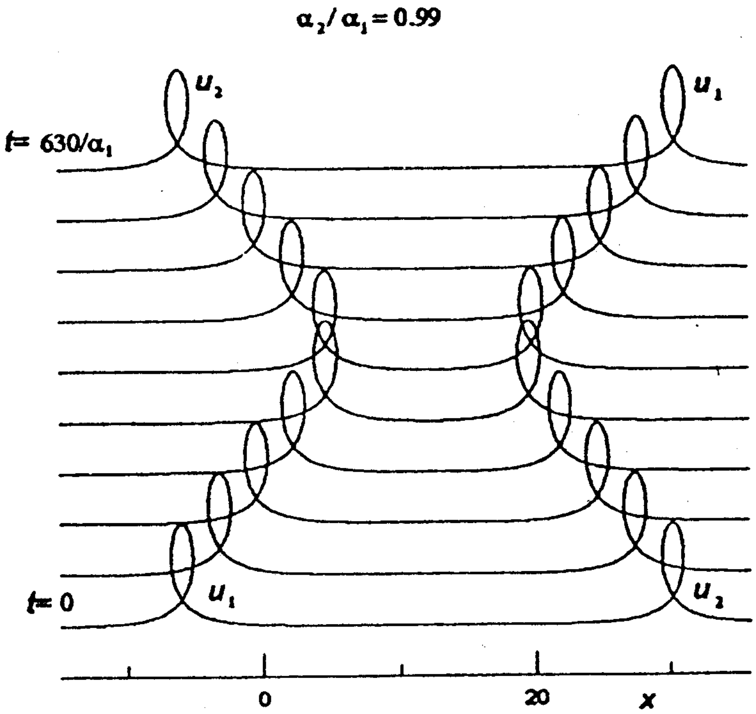

Рис. 1. Взаємодія двох солітонів у системі координат, що рухається. Інтервал часу $\Delta t = 70/\alpha_1$

громіздких викладок, зазначимо, що аналогічно тому, як було одержано систему (2.27), коефіцієнти біля однакових степенів e^{jX} прирівнювались до нуля. Потім виявилося, що рівняння лінійно залежні, що у результаті дало можливість знайти

$$A_{12} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2}. \qquad (3.7)$$

Таким чином, співвідношення (2.33), (3.5), (3.7) є точним двосолітонним розв'язком рівняння (0.1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right) u + u = 0,$$

$$u = \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_\mu, \quad x = x_0 + \mu + W,$$

$$W = 2\left(\frac{\partial \ln |F|}{\partial t}\right)_\mu, \qquad (3.8)$$

$$F = (1 + q_1^2 + q_2^2 + A_{12}\, q_1^2 q_2^2)^3,$$

$$q_i = \exp(-\Theta_i), \quad \Theta_i = \alpha_i t - \frac{\mu - \mu_i}{4\alpha_i}. \qquad (3.9)$$

$$\alpha_i = \mathrm{const}, \quad \mu_i = \mathrm{const}.$$

Незалежно аналогічний результат було одержано у роботі [4] за допомогою методу Хіроти [9] в дещо інших змінних.

4. Взаємодія двох солітонів

Під час взаємодії двох солітонів, що описуються рівнянням VE, спостерігаються особливості, невластиві KdV-рівнянню. Прослідкуємо взаємодію двох солітонів для різних співвідношень між α_1 та α_2, використовуючи рис. 1 — 3. Вважатимемо для визначеності, що більший солітон $\alpha_1 = 1$, рухаючись з більшою швидкістю, наздоганяє менший α_2 $(0 < \alpha_2 < \alpha_1)$, який рухається у тому ж напрямку, що й більший. Після нелінійної взаємодії солітони розходяться, відновлюючи попередню форму та одержавши зсув фаз. Для зручності на рисунках картину взаємодії солітонів зображено у системі координат, що рухається зі швидкістю $v = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$.

Зробимо аналіз зсуву фаз кожного солітона. Розглянемо два моменти часу — t_1, коли менший солітон перебуває далеко попереду, а більший солітон — у точці $x = 0$ $(\alpha_1 > \alpha_2,\ \mu_1 = 0,$

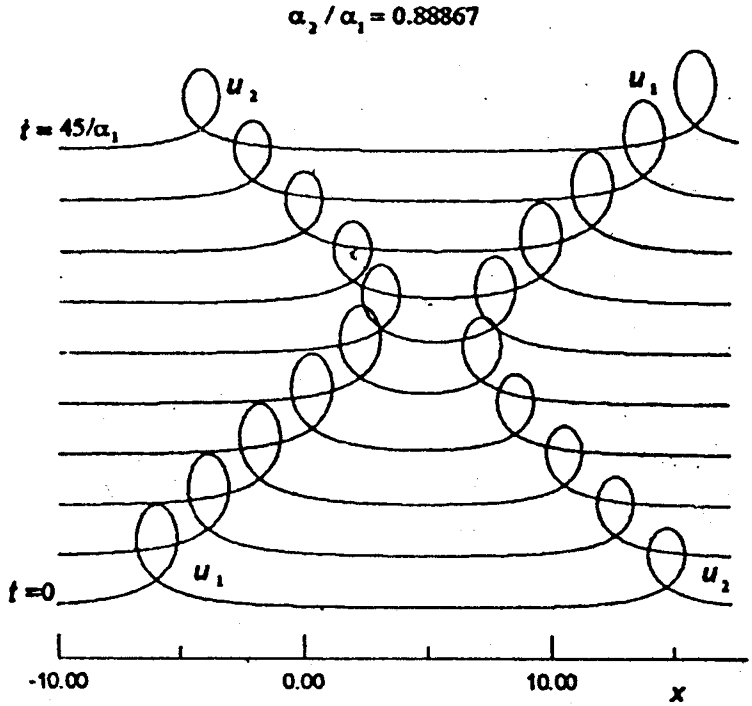

Рис. 2. Те ж саме, що і на рис. 1 для інтервалу часу $\Delta t = 5/\alpha_1$. (Фазовий зсув меншого солітона рівний нулю)

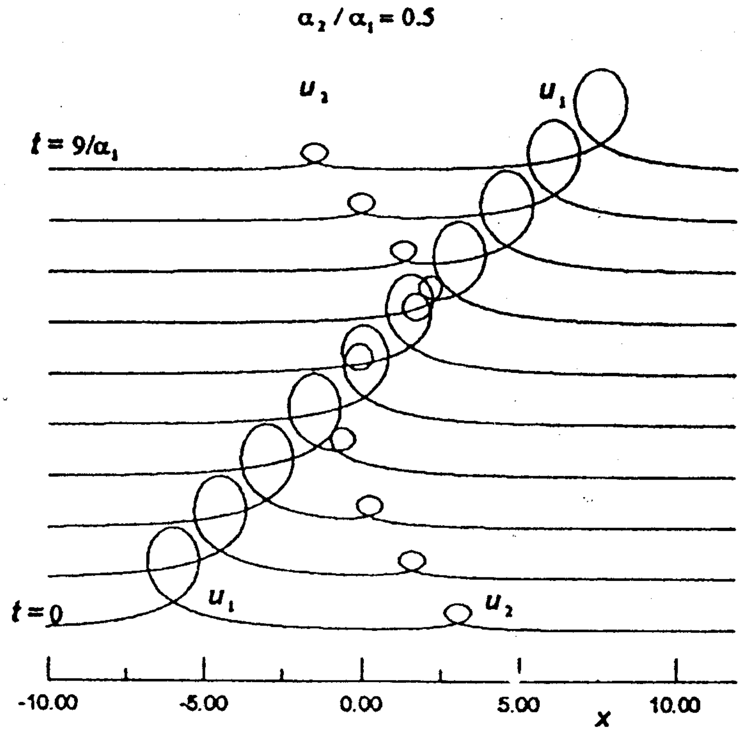

Рис. 3. Те ж саме, що і на рис. 1 для інтервалу часу $\Delta t = 1/\alpha_1$. (Обидва солітони мають зсув вперед)

$\mu_2 = \text{const}$, $\mu_2 >> \alpha_2$) і $t_2 >> t_1$, коли більший солітон обігнав менший і встиг відновити свою форму.

1. Момент часу $t = t_1 = 0$.

а) Солітон $u_1 = 6\alpha_1^2 \operatorname{sech}^2(-\Theta_1)$ має максимальну амплітуду, коли $q_1^2 = 1$, $q_2^2 << 1$, тобто у точці $x_{1\max}(t_1) = x_0 - 6\alpha_1$.

б) солітон $u_2 = 6\alpha_2^2 \operatorname{sech}^2(-\Theta_2 + \frac{1}{2}\ln A_{12})$, коли $q_1^2 >> 1$ та $q_2^2 \approx 1$ ($\mu \approx \mu_2$), досягає своєї максимальної величини у точці $x_{2\max}(t_1) = x_0 + \mu_2 - 2\alpha_2 \ln A_{12} - 6(2\alpha_1 + \alpha_2)$.

2. Момент часу $t = t_2$, $((\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\, t_2 >> \mu_2)$. Аналогічний аналіз показує, що відстані, на яких спостерігаються максимальні амплітуди, дорівнюють

а) $x_{1\max}(t_2) = x_0 - 2\alpha_1 \ln A_{12} + 4\alpha_1^2 t_2 - 6(2\alpha_2 + \alpha_1)$ — для солітона u_1, коли $q_2^2 >> 1$, $q_1^2 \approx 1$;

б) $x_{2\max}(t_2) = x_0 + \mu_2 + 4\alpha_2^2 t_2 - 6\alpha_2$ — для солітона u_2.

У результаті маємо такі зсуви фаз: більшого солітона — δ_1 та меншого — δ_2:

$$\delta_1 = x_{1\max}(t_2) - x_{1\max}(t_1) - 4\alpha_1^2 t_2 =$$

$$= -2\alpha_1 \ln A_{12} - 12\alpha_2,$$

$$\delta_2 = x_{2\max}(t_2) - x_{2\max}(t_1) - 4\alpha_2^2 t_2 =$$

$$= 2\alpha_2 \ln A_{12} + 12\alpha_1. \tag{4.1}$$

Особливості залежності фазових зсувів δ_1 та δ_2 від α_2 при $\alpha_1 = 1$ можна спостерігати на рис. 1 — 3. Великий солітон завжди має зсув фази вперед, $\delta_1 > 0$, в той час як для малого солітона можливі три типи фазового зсуву. Ця властивість є відмінністю нашого результату від відомих випадків, наприклад, для KdV-рівняння. Характерною величиною є значення $(\alpha_2 / \alpha_1)^* = 0{,}88867$:

1. Для $\alpha_2/\alpha_1 > (\alpha_2/\alpha_1)^*$ зсув солітона u_2 відбувається у протилежний бік від зсуву більшого солітона (рис. 1).

2. Для $\alpha_2/\alpha_1 = (\alpha_2/\alpha_1)^*$ солітон u_2 зовсім не отримує зсуву фази (рис. 2).

3. Для $\alpha_2/\alpha_1 < (\alpha_2/\alpha_1)^*$ обидва солітони мають зсув фаз у одному напрямку (рис. 3).

Виникає закономірне питання, чи не порушується закон збереження кількості руху, коли солітони мають зсув фаз в одному напрямку? Виявляється, що ні. Це пов'язано ось з якими обставинами. Маса солітона, яка характеризується інтегралом $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dx$, тотожно дорівнює нулю. Дійсно

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dx = -\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Таким чином, може спостерігатися будь-який зсув фаз і це не буде порушувати закон збереження кількості руху.

1. *Вахненко В.О.*//УФЖ.— 1997.— 42, №1.— С.104 — 110.
2. *Vakhnenko V.A.*//J. Phys. A.— 1992.— 25.— P.4181 — 4187.
3. *Parkes E.J.*//Ibid.— 1993.— 26.— P.6469 — 6475.
4. *Vakhnenko V.A., Parkes E.J.* // Nonlinearity. — 1998. — 11. — P.1457 — 1464.
5. *Солитоны* и нелинейные уравнения/Р.Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон и др.— М.: Мир, 1988.
6. *Konno K, Ichikawa Y.H., M.Wadati M.*//J. Phys. Soc. Jap.— 1981.— 50.— P.1025 — 1026.
7. *Hasimoto H.*//J. Fluid Mech.— 1972.— 51.— P.477 — 485.
8. *Lamb G.L., Jr.*//J. Math. Phys.— 1977.— 18.— P.1654 — 1661.
9. *Хирота Р.*//Солитоны/Под ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри.— М.: Мир, 1980.— С.175 — 192.
10. *Hirota R., Satsuma J.*//Suppl. Progr. Theor. Phys.— 1976.— N59.— P.64 — 100.
11. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.*//Phys. Rev. Lett.— 1967.— 19.— P.1095 — 1097.
12. *Теория* солитонов: Метод обратной задачи / В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков и др.— М.: Наука, 1980.
13. *Марченко В.А.*//Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1977.
14. *Hirota R., Satsuma J.*//J. Phys. Soc. Jap.— 1976.— 40.— P.611 — 612.
15. *Ньюэлл Ф.* Солитоны в матиматике и физике.— М.: Мир, 1989.

Одержано 07.05.98

ТОЧНЫЕ ДВУХСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

В. А. Вахненко, Е. Дж. Паркес, В. А. Даниленко

Р е з ю м е

Для эволюционного нелинейного уравнения $(u_t + uu_x)_x + u = 0$, используя элементы метода обратной задачи рассеяния, найдены точные двухсолитонные решения.

EXACT TWO-SOLITON SOLUTIONS OF A MODEL NONLINEAR EQUATION

V. O. Vakhnenko, E. J. Parkes[1], *V. A. Danylenko*

Subbotin Institute for Geophysics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine, Division of Geodynamics of Explosion
(63b, Khmelnytskogo Str., Kyiv 252054, Ukraine)
[1]Departament of Mathematics, University of Strathclyde
(Richmond Str., Glasgow G1 1XH, UK)

S u m m a r y

For the evolutionary nonlinear equation $(u_t + uu_x)_x + u = 0$, the exact two-soliton solutions are obtained by means of the use of elements of the inverse scattering problem for the KdV equation.