Проект
Наукова
Книга

В.О. ВАХНЕНКО, О.О. ВАХНЕНКО

ХВИЛЬОВА ДИНАМІКА СТРУКТУРОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ГЕОФІЗИКИ ім. С.І. СУББОТІНА
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ім. М.М. БОГОЛЮБОВА

В.О. Вахненко, О.О. Вахненко

ХВИЛЬОВА ДИНАМІКА СТРУКТУРОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ

ПРОЕКТ
«НАУКОВА КНИГА»

КИЇВ НАУКОВА ДУМКА 2016

УДК 532.59:517.19

Монографія присвячена побудові рівнянь стану і створенню математичних моделей релаксівних середовищ зі структурою для опису нелінійних довгохвильових процесів. Особливу увагу приділено дослідженню нелінійних еволюційних рівнянь, вивченню закономірностей еволюції хвильових полів, розробленню наукових положень регулювання хвильової дії, а також методів діагностики властивостей структурованих середовищ нелінійними хвилями.

Для наукових працівників, аспірантів, студентів.

The purpose of this book is to describe the behaviors of multicomponent media in terms of physically motivated models, where the state equations of relaxing media with a structure for describing nonlinear wave processes are employed. The special attention is focused on the research of nonlinear evolution equations as applied to the evolution of wave fields. The theoretical principles for the control of wave action on the multicomponent media and for the development of new method of structure diagnostics by means of the long nonlinear waves are suggested. The reader may find some suggestions for future research herein, and open up questions that may be especially useful for young scientists.

We hope that the reader will receive a more or less objective picture of the current state of the art of the wave dynamic of the structured media.

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор *О.С. Макаренко,*
кандидат фізико-математичних наук *С.В. Микуляк*

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України (протокол № 8 від 09.12.2013 р.) та вченою радою Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (протокол № 9 від 11.12.2014 р.)

Видання здійснено за державним замовленням на випуск видавничої продукції

Науково-видавничий відділ медико-біологічної, хімічної та геологічної літератури

Редактор *О.І. Калашникова*

ISBN 978-966-00-1496-1

Передмова

Майже в усіх розділах фізики виникає необхідність вивчення нелінійних хвильових процесів як з метою поглиблення розуміння фундаментальних законів природи, так і для застосування результатів дослідження у важливих технічних впровадженнях. Розширення уявлень про фізичні явища та розуміння нелінійності законів природи потребує розроблення нових модельних підходів. Більшість природних і рукотворних середовищ не є безструктурними, а утворені твердими, рідкими та газовими компонентами. Представники таких середовищ — геофізичне середовище, газосуспензії, піни, композити тощо. Розвиток техніки експерименту показав, що на еволюцію хвильових рухів впливає внутрішня структура середовища [85, 94, 96, 99, 113, 116, 148, 150]. Ефекти неоднорідності істотно ускладнюють дослідження і водночас проявляються з найбільшою повнотою під час поширення нелінійних хвиль. До нелінійного прояву хвильових процесів у природних середовищах можна віднести такі явища, як, наприклад, солітоноподібні властивості P-хвилі [41] та збільшення нелінійних ефектів у структурованих середовищах порівняно з однорідними середовищами [116, 148, 150]. Інтенсивні високоградієнтні навантаження (наприклад, вибух, землетрус) створюють умови для незворотних процесів у середовищі. Незворотність і нелінійність хвильових процесів у структурованих середовищах є головними особливостями фізичних явищ, яким буде приділено особливу увагу.

Більшість середовищ за умови локальної рівноваги можна вважати безструктурними. Традиційно припускають, що збурення з довжиною хвилі λ, що значно перевищує характерний розмір ε структурних неоднорідностей, поширюються в них, як в однорідних. Відомо, що з погляду механіки суцільного середовища можлива ідеалізація реального середовища за допомогою однорідного середовища. У багатьох випадках це дало змогу досягти значного успіху під час опису хвильових процесів (див., наприклад, публікації [4, 110, 195]).

На акустичному рівні структуру середовища вдається врахувати у межах моделей однорідного середовища за певними дисперсно-дисипативними властивостями [13,65]. Континуальні моделі [71, 80, 114, 178] також застосовують для опису нелінійних хвиль, а середовище вважають пружним або в'язкопружним, або ж пружно-пластичним однорідним середовищем [71, 88]. За таких підходів структуру середовища враховують побічно через кінетичні параметри (час релаксації, коефіцієнти в'язкості тощо) [4, 88, 150].

Методами класичної механіки суцільного середовища [86] і статистичної фізики [103] обґрунтовано модель взаємопроникного континууму [86], яка створена для опису динамічної поведінки багатокомпонентних середовищ. Фундаментальне припущення в теорії сумішей [178] збігається з припущенням у моделі взаємопроникного континууму [86] і полягає в тому, що кожен мікрооб'єм dv містить частинки, що належать кожному компоненту. Рівняння руху записують для кожного компонента окремо, вони містять члени, що описують масову, силову і теплову взаємодії між компонентами. В цілому проблема ускладнюється можливістю оперувати доволі обмеженою кількістю експериментальних даних для встановлення теоретичних співвідношень між макропараметрами на рівні взаємодії компонентів. Подальшого розвитку моделей структурованих середовищ досягають, застосовуючи методи елементної динаміки. Детальне врахування руху окремих елементів структури і хвильових процесів у них призводить до складних математичних моделей, а розмаїття взаємодій та обмінних процесів у багатокомпонентних середовищах перешкоджає і навіть часто унеможливлює коректне математичне моделювання хвильових процесів. Під час аналітичного дослідження закономірностей течій за допомогою цих моделей виникають певні труднощі.

Метою монографії є опис поведінки багатокомпонентних середовищ у термінах фізичних систем. Для опису хвильових процесів у середовищах із мікроструктурою запропоновано асимптотичну усереднену модель. На мікрорівні поведінка середовища підпорядковується тільки законам термодинаміки. Водночас на макрорівні рух середовища можна описати законами хвильової динаміки.

У розділі 1 наведено аналіз слабкої нелінійності, яка пов'язана зі структурою середовища, під час поширення довгих хвиль. Для опису хвильових процесів у середовищах із мікроструктурою використано асимптотичну усереднену модель [26–30,34,200–202]. Доведено, що тільки на акустичному рівні за допомогою дисперсно-дисипативних властивостей середовища вдається описати поширення довгих хвиль і що лише в цьому випадку динамічну поведінку середовища можна моделювати за допомогою однорідного релаксівного середовища [27, 201]. Разом з тим чутливість довгої хвилі значної амплітуди до структури середовища така висока, що поведінку структурованого середовища не можна моделювати однорідним середовищем. Важливим результатом, передбаченим цією моделлю, є збільшення нелінійного ефекту під час поширення хвилі скінченної амплітуди в середовищі з мікроструктурою, навіть якщо окремі компоненти середовища описують лінійним законом.

Безперечно, фізичні процеси і явища, що відбуваються в природі, мають складний нелінійний характер. Дедалі більше дослідників звертаються до математичних моделей, в яких враховано нелінійність реальних явищ. У розділі 2 для моделювання поширення нелінійних високочастотних збурень у релаксівному середовищі запропоновано еволюційне нелінійне рівняння. На відміну від низькочастотних збурень, які підпорядковані рівнянню Кортевега—де Вріза (the KdV equation), для високочастотних збурень виведено нелінійне еволюційне рівняння, яке в науковій літературі отримало назву рівняння Вахненка (the Vakhnenko equation). Знайдено зв'язок цього рівняння з рівнянням Уізема (the Whitham equation). Проведено аналіз хвильового рівняння та знайдено його точні періодичні розв'язки, а також досліджено взаємодію солітонів.

У розділі 3 розглянуто низку питань, які стосуються моделювання хвильових течій у середовищах, що складаються з рівномірно розподілених компонентів — газового та конденсованого. На відміну від досліджень, наведених у розділі 1, для моделювання хвильових рухів розвинуто асимптотичну усереднену модель, що не обмежується припущенням про баротропне середовище. При поширенні ударних хвиль у двофазних середовищах особливий інтерес становить явище пониження ударної дії вибуху. Виявляється, що ефективність середовища як локалізатора дії вибуху залежить від його здатності перетворювати енергію газового компонента в енергію конденсованої фази, яка не дає внеску в тиск. Внаслідок наявності внутрішніх обмінних процесів зв'язок між внутрішньою енергією, тиском і питомим об'ємом (рівняння стану) неоднозначний. Для газорідинних сумішей у припущенні одношвидкісного наближення обґрунтовано рівняння стану з єдиних позицій — теплової релаксації. Проаналізовано вплив об'єму нестисливого компонента на хвильові рухи. Рух двофазного середовища з визначеною точністю подібний до руху ідеального газу, що дає змогу використовувати відомі методи газодинаміки ідеального газу для розв'язання ударнохвильових задач. На прикладі задачі про сильну стадію вибуху в двофазному середовищі продемонстровано можливості розробленого методу.

У розділі 4 на прикладі розв'язування задачі про точкове виділення енергії описано динамічну поведінку двофазного середовища, вплив релаксаційних ефектів міжфазної взаємодії, що дало змогу проаналізувати основні закономірності течії під час ударного навантаження. Ця задача набуває значної ваги у зв'язку з практичною можливістю зменшити негативну дію ударних хвиль. У розділі розглянуто основні характеристики і властивості самого середовища, за якими можна досягти того чи іншого ступеня загасання ударної хвилі і визначити вплив параметрів ударного навантаження, зокрема, енергії вибуху на загасання ударної хвилі.

Безперечно, вплив структури середовища на хвильові поля є суттєвим. Важливим результатом, передбаченим асимптотичною усередненою моделлю, є збільшення нелінійного ефекту в процесі поширення хвилі скінченної амплітуди в середовищі з мікроструктурою, навіть якщо окремі компоненти середовища підпорядковані лінійному закону. Разом з тим постає питання: чи достатньо інформації міститься в хвильовому полі, щоб відтворити структуру середовища? В розділі 5 доведено, що з певною точністю можна визначити властивості середовища за хвильовими полями. Отже, ефект збільшення нелінійності забезпечив теоретичне підґрунтя для нового методу діагностики властивостей середовища довгими нелінійними хвилями. Метод діагностики середовища теоретично обґрунтовано на підставі асимптотичної усередненої моделі структурованого середовища.

Важливим об'єктом дослідження є геофізичне середовище, зокрема пісковики. Експериментальні залежності деформації від напруження для гірських порід під дією механічних навантажень вказують на нелінійну поведінку цих середовищ. У монографії запропоновано феноменологічні моделі для опису як залежності напруження—деформація для пісковику під дією квазістатичного навантажування (розділ 6), так і динамічної поведінки стрижня пісковику в режимі резонансного навантажування (розділ 7). Моделі адекватно описують головні експериментальні результати, а саме: а) гістерезисну поведінку резонансної кривої; б) лінійне зменшення резонансної частоти із зростанням рівня навантаження; в) поступове відновлення (зростання) резонансної частоти за низьких рівнів навантажень після того, як зразок початково зазнав великого навантаження. В межах запропонованого формалізму вдалося передбачити незвичайний гістерезис із пам'яттю про кінцеву точку в динамічній реалізації. Цей ефект проявляється у вигляді малих гістерезисних петель усередині великої петлі [220]. Наші теоретичні прогнози експериментально підтверджено в Лос-Аламоській Національній лабораторії [222].

Вважаємо своїм приємним обов'язком подякувати колегам за творчу атмосферу, обмін ідеями та обговорення результатів. Висловлюємо особливу подяку Дж. Паркесу (E.J. Parkes) за багаторічну плідну співпрацю з вивчення нелінійних еволюційних рівнянь, щиру вдячність Т. Шенкланду (T.J. Shankland), Дж. Тен-Кейту (J.A. TenCate) і П. Джонсону (P.A. Johnson) з Лос-Аламоської Національної лабораторії за співробітництво, яке стимулювало спільні наукові дослідження з моделювання динамічної поведінки природних середовищ. Складаємо подяку всім співавторам наукових робіт, спілкування з якими сприяло формуванню наших уявлень про роль і місце нелінійної хвильової динаміки в сучасній науці. Щиро вдячні В.А. Даниленку, В.М. Кудінову, Б.І. Паламарчуку, С.Г. Лебідь, А.Т. Малахову, О.В. Черкашину і В.В. Кулічу за плідні дискусії та постійну увагу до наших робіт, а також усім, хто сприяв виходу в світ цієї монографії.

Розділ 1

Асимптотична усереднена модель структурованих середовищ

Сучасний стан експериментальних досліджень потребує удосконалення моделей неоднорідних середовищ з детальним урахуванням їхньої структури. Реальні середовища не є однорідними. Наприклад, геофізичне середовище має складну ієрархічну внутрішню структуру. Виявляється, що відношення характерних розмірів між сусідніми ієрархічними рівнями є сталою величиною [94, 96, 99]. Внутрішня структура середовища впливає на поширення хвиль, які виникають як результат високоградієнтних швидкоплинних процесів (вибух, землетрус) [85, 95, 99].

Як правило, для побудови моделей тією чи іншою мірою використовують формалізм механіки суцільного середовища. В таких випадках початковим є принцип локальної дії, що дає можливість перенести закони механіки точкової маси на суцільне середовище [195]. Під час перетворення інтегральних рівнянь збереження у диференційні [1] рівняння припускають існування диференційно малого мікрооб'єму dv. З одного боку, цей об'єм

[1]За Українсько-російським словником наукової термінології (Київ; Ірпінь: Перун, 2004).

настільки малий, що можна поширити закони механіки точкової маси на весь мікрооб'єм dv, з іншого — мікрооб'єм, хоч і малий порівняно з об'ємом усього середовища, все ж містить так багато структурних елементів середовища, що в цьому сенсі він може бути розглянутий як макроскопічний. Отже, перехід до диференційних рівнянь збереження ґрунтується на такому припущенні: розмір мікроструктурних масштабів ε малий порівняно з характерним макроскопічним масштабом течії λ, що виправдовує граничний перехід $\varepsilon/\lambda \to 0$. Загалом стягування об'єму dv в точку є правильним для неперервних функцій [178, 195]. Це означає, що всі точки всередині диференційно малого об'єму еквівалентні. Тому еквівалентність точок у мікрооб'ємі обґрунтовує припущення про використання усереднених характеристик хвильового поля. Отже, рівняння руху можуть бути записані в усереднених характеристиках, таких як густина, масова швидкість, тиск, що властиві кожному окремому компоненту середовища. Зауважимо, що характерні структурні розміри окремих компонентів у цих моделях явно не фігурують.

У разі застосування моделей однорідного середовища до опису динамічних хвильових процесів у структурованому середовищі виникають деякі принципові труднощі [88, 94, 96, 99, 148]. У цій монографії структуру середовища розглянуто на макрорівні. Ми відмовилися від припущення, що диференційно малий об'єм dv містить усі компоненти середовища, хоч і розглянуто довгохвильові наближення, коли довжина хвилі λ набагато більша за характерну довжину структури середовища ε (рис. 1.1). Вважаємо, що окремо взятий компонент структурованого середовища моделюється однорідним середовищем (диференційно малий об'єм dv значно менший за характерний розмір окремого компонента). Згідно з математичним аналізом методом асимптотичного усереднення [6, 7], структура середовища безпосередньо впливає на нелінійні хвильові процеси навіть для збурень з довжиною хвилі, що значно перевищує розміри неоднорідностей. Математичне формулювання цього твердження означає, що система усереднених рівнянь не виражається в усереднених характеристиках (тиск, масова швидкість, питомий об'єм) і містить члени з характерним розміром окремих компонентів.

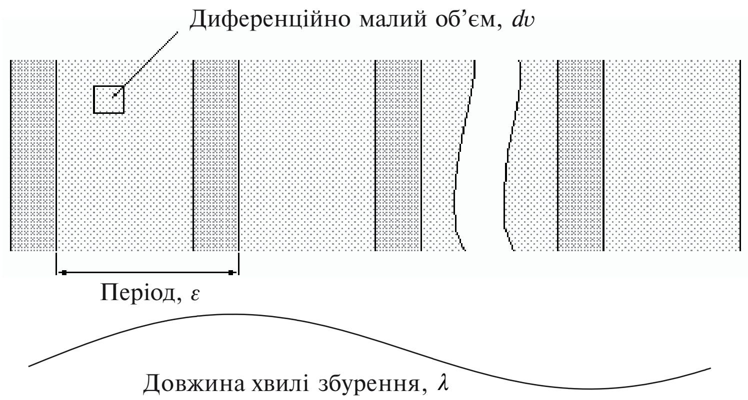

Рис. 1.1. Модель шарувато-неоднорідного середовища з двома однорідними компонентами в періоді

Інтенсивні хвилі виводять середовище з рівноваги. Крім того, незбурене середовище може перебувати в одному з нестійких стаціонарних станів. Так, геофізичне середовище в сучасних уявленнях є відкритою термодинамічною системою, здатною обмінюватися масою і енергією під час взаємодії із зовнішніми чинниками [94, 99]. До того ж зовнішнє збурення зумовлює внутрішні обмінні процеси. Стан середовища далекий від рівноваги і, як вважають [45, 89, 126], у таких відкритих нерівноважних системах може утворитися структура. Стан середовища неможливо описати в межах уявлень рівноважної термодинаміки. У зв'язку з цим існує потреба розробляти нові математичні моделі структурованих середовищ, враховуючи при цьому нелінійність хвильових збурень та незворотність внутрішніх обмінних процесів.

1.1 Основні положення і початкові рівняння

Елементарними неоднорідними середовищами, для яких можна проаналізувати вплив структури, є середовища з регулярною структурою. Регулярність структури і нелінійність досліджуваних хвильових процесів визначають вибір математичних моделей. Лінійні розміри тіла є значно більшими, ніж розмір неоднорідностей, проте неоднорідності настільки великі, що їхній стан описують класичними рівняннями суцільного середовища (рис. 1.1) [46, 76, 100].

Закономірності поширення довгохвильових збурень досліджуємо на прикладі середовища з регулярною структурою, вважаючи, що і напруження, і масова швидкість є неперервними функціями на межі сусідніх компонентів (див. рис. 1.1). Якщо розмір структури є малим порівняно з характерною довжиною хвильового збурення ($\varepsilon \ll \lambda$), систему рівнянь виводять, ґрунтуючись на усередненні рівнянь руху, які описують поведінку системи на нижчому ієрархічному рівні [19, 26–28, 34]. З одного боку, це дає змогу спростити початкову систему рівнянь, з іншого — розробити числові методи розв'язування задач хвильової динаміки в неоднорідних середовищах.

Асимптотична природа усереднених методів стала зрозумілою відносно недавно. Процеси у середовищах з мікроструктурою математично можуть бути представлені із швидкоосцилюючими коефіцієнтами. Метод усереднення найзручніше застосувати до середовищ з періодичною чи квазіперіодичною структурою. Тоді для середовищ з регулярною структурою коефіцієнти є періодичними функціями. Для вивчення динаміки поведінки середовищ регулярної структури застосовують асимптотичний метод усереднення рівнянь із швидкоосцилюючими періодичними коефіцієнтами [6–8, 12, 82, 91, 181]. Метод був математично обґрунтований для опису механіки композитних матеріалів.

Для опису динамічної поведінки багатокомпонентних середовищ на нижчому ієрархічному рівні у феноменологічному підході використовують методи суцільного середовища. При цьому вважають, що кожен мікрооб'єм перебуває в рівновазі (припущення про локальну рівновагу). Це робиться з метою введення термодинамічних величин — густини, тиску, енергії тощо. Динамічні процеси, у тому числі хвильові, характеризують ще такими величинами, як масова швидкість, швидкість поширення хвильових збурень, наприклад ударної хвилі.

Кожен окремий компонент як неоднорідність у межах локальної рівноваги вдається описувати рівнянням руху суцільного середовища. Зрозуміло, що параметри потоку і характеристики середовища змінюються від компонента до компонента внаслідок індивідуальних властивостей компонентів, тоді як вигляд самих рівнянь руху залишається однаковим. Для побудови моделей динамічної поведінки природних середовищ підхід на засадах релаксаційного формалізму вважають загальнішим, ніж підхід у межах рівноважної термодинаміки. Для створення фізичних моделей поширення хвильових збурень у середовищах із складною кінетикою взаємодії всередині окремих компонентів та між самими компонентами підхід на підставі загальних уявлень про релаксаційну природу явищ є перспективним.

У результаті поширення хвильових збурень порушується внутрішня рівновага в середовищі. Внутрішні процеси взаємодії прагнуть повернути систему до рівноваги. Таку взаємодію характеризують внутрішні змінні (мікропараметри). На макрорівні ж систему описують макропараметрами, такими як тиск p, масова швидкість u, густина ρ. Про зміну макропараметрів за зміни внутрішнього параметра говорять, як про релаксацію. Використання моделі релаксівного середовища, з огляду на нерівноважну термодинаміку [53, 126], є більш загальним порівняно з рівноважними моделями для опису еволюції хвильового збурення. Зрозуміло, що фізичні моделі динамічної поведінки багатокомпонентних середовищ і їх математичне представлення є складнішими, ніж для однорідних середовищ. Однак такі моделі заслуговують на увагу з урахуванням їх фізичної адекватності з досліджуваними явищами.

У загальному випадку релаксаційні процеси властиві кожному компоненту середовища. Розглянемо один окремо взятий компонент і запишемо для нього динамічне рівняння стану. Виходитимемо з феноменологічного формалізму, розвиненого у публікаціях [16, 38, 78, 106, 107, 122, 126, 127, 165]. Обмежимося розглядом баротропних середовищ, незважаючи на те, що такий підхід звужує застосування результатів, але значно спрощує опис, залишаючи суть цього питання — зумовленість хвильових течій релаксаційною природою цих явищ. За визначенням, рівняння стану баротропного середовища у рівновазі є однопараметричним $p = p(\rho)$. Однак як результат релаксації в рівнянні стану з'являється внутрішній параметр β, який визначає повноту завершеності релаксації:

$$p = p(\rho, \beta). \tag{1.1.1}$$

Укажемо на два граничні випадки:
а) відсутність релаксації $\beta = 1$:

$$p = p(\rho, 1) = p_f(\rho); \tag{1.1.2}$$

б) релаксація встигає пройти, настає локальна термодинамічна рівновага $\beta = 0$:

$$p = p(\rho, 0) = p_e(\rho). \tag{1.1.3}$$

Ці співвідношення дають змогу ввести швидкості звуку для швидкоплинних процесів

$$c_f^2 = \frac{dp_f}{d\rho} \tag{1.1.4}$$

і повільних —

$$c_e^2 = \frac{dp_e}{d\rho}. \tag{1.1.5}$$

Час релаксації розділяє процеси на повільні та швидкоплинні. Так вводимо поняття характерного часу релаксації τ.

Динамічне рівняння стану середовища записуємо у вигляді диференційного рівняння першого порядку

$$\tau_\rho \left(\frac{dp}{dt} - c_f^2 \frac{d\rho}{dt} \right) + (p - p_e) = 0. \tag{1.1.6}$$

Обґрунтування такого рівняння в межах термодинаміки незворотних процесів можна знайти у публікаціях [16, 38, 52, 78, 106, 107, 122, 126, 127, 165]. Рівняння (1.1.6) охоплює граничні випадки (1.1.2), (1.1.3) і, крім того, описує процес без релаксації за формальної заміни часу релаксації τ_ρ на будь-яку ненульову величину за умови $c_e = c_f$.

Механізм обмінного (внутрішнього) процесу не конкретизували під час виведення рівняння (1.1.6), а в саме рівняння входять тільки термодинамічні й кінетичні характеристики середовища. Причому ці характеристики можуть бути визначені експериментально. Зауважимо, що феноменологічні підходи до опису процесів релаксацій у гідродинаміці розвинуто в багатьох публікаціях, зокрема [38,71,72,81,84,106,122,126]. Динамічне рівняння стану було використано для опису поширення звуку в релаксівній рідині [81], для врахування впливу обмінних процесів у середовищах рідини–тверді частинки [106, 122], для вивчення хвильових течій у бульбашкових середовищах [71, 72, 84] і ґрунтах [79, 80]. У більшості робіт рівняння стану виведено з припущення певного внутрішнього процесу. Це призводить до обмеженості рівнянь і складного знаходження параметрів у членах, що описують обмінні процеси.

Співвідношення (1.1.6) є динамічним рівнянням стану релаксівного баротропного середовища. Очевидно, що за швидкоплинних процесів ($\omega\tau_\rho \gg 1$) маємо співвідношення (1.1.2), а за повільних ($\omega\tau_\rho \ll 1$) є справедливим співвідношення (1.1.3). Зазначимо, що можна розглядати зворотний процес, якщо відхилення тиску від рівноваги приводить до зміни густини. Рівняння стану запишемо у вигляді

$$\tau_p \left(\frac{d\rho}{dt} - c_f^{-2} \frac{dp}{dt} \right) + (\rho - \rho_e) = 0. \tag{1.1.7}$$

У такому випадку характерний час τ_p, що описує релаксацію, пов'язаний з τ_ρ співвідношенням

$$\tau_p = \tau_\rho \frac{c_f^2}{c_e^2}. \tag{1.1.8}$$

Рівняння (1.1.6) і (1.1.7) є еквівалентними за умов, близьких до рівноваги. Надалі вважатимемо, що швидкості звуку c_e, c_f і час релаксації τ_ρ не залежать явно від часу, а залежать лише від тиску та індивідуальних властивостей окремого компонента середовища. Це означає, що процес релаксації всередині окремих елементів структури приводить тільки до обміну імпульсами і теплом між структурними елементами без масообміну між ними.

В акустичному наближенні структура середовища зумовлює існування дисперсно-дисипативних ефектів [4, 13]. Ці ефекти можуть бути описані в межах релаксівного однорідного середовища. Водночас для хвиль значної амплітуди, з одного боку, середовище можна розглядати в межах гідродинамічної моделі, нехтуючи дотичними напруженнями [74], з іншого — необхідно детально враховувати кожен елемент мікроструктури [6, 7].

Обмежимося записом рівнянь рухів для пласкої симетрії. Для аналізу хвильових течій всередині кожного компонента використаємо гідродинамічні рівняння [46, 63, 76, 80, 100], що виражають закон збереження маси

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0 \tag{1.1.9}$$

і закон збереження імпульсу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \tag{1.1.10}$$

де $V \equiv \rho^{-1}$ — питомий об'єм; u — масова швидкість; $dm = \rho_0 dx$ — масова лагранжева просторова координата. Відповідно до поставленої задачі на межах компонентів немає розривів масової швидкості і тиску:

$$[u] = 0, \quad [p] = 0. \tag{1.1.11}$$

Рівняння руху (1.1.9), (1.1.10) записано в лагранжевих координатах, оскільки рівняння стану (1.1.6) пов'язані з елементом маси середовища. Для застосування методу асимптотичного усереднення важливим є те, що в цих змінних структура стисливого середовища є сталою в процесі деформування.

Подамо початкові рівняння в безрозмірних координатах аналогічно до праці [100]. З теорії розмірності [100] відомо, що є

лише три незалежні розмірні масштаби для баротропного середовища. Виберемо такі параметри:
$x' = \lambda$ — характерна довжина хвилі в ейлеровій системі координат; $\rho' = \tilde{\rho_0}$ — середня незбурена густина середовища; $p' = p_0$ — тиск у незбуреному середовищі.

Інші розмірні константи комбінуємо з цих трьох основних масштабів:

$$c' = \sqrt{p_0\tilde{\rho_0}^{-1}}, \quad m' = \lambda\tilde{\rho_0}, \quad V' = \tilde{\rho_0}^{-1}, \quad t' = \lambda/\sqrt{p_0\tilde{\rho_0}^{-1}}.$$

Запишемо будь-яку функцію f в початкових рівняннях у вигляді $f = f'f^*$, де f' — розмірний коефіцієнт; f^* — безрозмірна величина:

$$x = x'x^* = \lambda x^*, \ \ \rho = \tilde{\rho_0}\rho^*, \ \ V = \tilde{\rho_0}^{-1}V^*, \ \ m = \tilde{\rho_0}\lambda m^*, \ \ p = p_0p^*,$$

$$t = t't^*, \quad \tau = t'\tau^*, \quad u = c'u^*.$$

Для прикладу приведемо рівняння неперервності (1.1.9) до безрозмірного вигляду

$$\frac{\tilde{\rho_0}^{-1}\partial V^*}{t'\partial t^*} - \frac{\lambda/t'\partial u^*}{\tilde{\rho_0}\lambda\partial m^*} = 0, \quad \frac{\partial V^*}{\partial t^*} - \frac{\partial u^*}{\partial m^*} = 0,$$

тобто вигляд рівняння неперервності в безрозмірних змінних повністю збігається з виглядом розмірного рівняння. Це властиве й іншим рівнянням баротропного середовища. Отже, якщо верхній символ «∗» опустити, то всі рівняння баротропного середовища в безрозмірних змінних збігатимуться з відповідними розмірними рівняннями. Тому надалі початкові рівняння (1.1.9), (1.1.10) вважаємо безрозмірними.

1.2 Асимптотична усереднена система рівнянь

Проведемо усереднення початкової системи рівнянь (1.1.6), (1.1.9), (1.1.10) за допомогою асимптотичного методу усереднення. Суть його полягає у поєднанні методу багатьох масштабів [83] з методом усереднення [12, 82].

Асимптотичний метод усереднення розроблений і математично обґрунтований для опису композитних матеріалів регулярної структури [6, 8, 181]. Метод дає асимптотично правильне наближення до точних розв'язків. У багатьох випадках задачу вдається звести до усереднених змінних, що дає змогу для числового розрахунку задач брати крок розрахункової сітки за просторовою координатою значно більшим, ніж період структури. З припущень, які використовують під час виведення асимптотичного методу, випливає очевидне обмеження на характер досліджуваного потоку, а саме у межах цього методу не вдається описати збурення з довжиною хвилі, що співрозмірна з періодом структури.

Асимптотичний метод усереднення вдається застосувати для опису неоднорідних середовищ, що стискаються [7, 19, 26–28, 34, 200]. Початкові рівняння (1.1.6), (1.1.9), (1.1.10) записані в лагранжевих координатах. Незмінність структури в цих координатах дає змогу застосувати процедуру усереднення.

У загальному випадку коефіцієнти і розв'язки рівнянь, що описують процеси в неоднорідних середовищах, мають розривні значення. З припущенням гладкості коефіцієнтів і розв'язків ці рівняння еквівалентні диференційним рівнянням руху. У публікаціях [6, 91] показано, що за незначної відмінності фізичних властивостей неоднорідностей середовища наближені неперервні розв'язки системи диференційних рівнянь, які формально побудовані за допомогою асимптотичного методу, задовольняють з певною точністю інтегральні закони збереження. Ця обставина свідчить на користь правомірності використання диференційних рівнянь руху в асимптотичному методі усереднення.

Застосуємо асимптотичний метод усереднення до рівнянь руху (1.1.9) і (1.1.10). Незалежну змінну $m = s + \varepsilon\xi$ відповідно до методу багатьох масштабів розбиваємо на повільну s і швидку ξ змінні, тут ε — безрозмірний період структури. Нові змінні s і ξ вважаємо незалежними змінними. Тоді початкову похідну запишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial s} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{1.2.1}$$

Повільна змінна s відповідає глобальній зміні хвильових полів, а швидка змінна ξ — їхній локальній зміні. Розв'язки p, V, u, $\rho = V^{-1}$ шукаємо у вигляді рядів за степенями періоду структури ε з функціями, періодичними за ξ:

$$\begin{aligned}
V(m,t) &= V^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon V^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 V^{(2)}(s,t,\xi) + \ldots,\\
\rho(m,t) &= \rho^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon \rho^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 \rho^{(2)}(s,t,\xi) + \ldots,\\
p(m,t) &= p^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon p^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 p^{(2)}(s,t,\xi) + \ldots,\\
u(m,t) &= u^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon u^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 u^{(2)}(s,t,\xi) + \ldots\ .
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Особливість задачі полягає в тому, що завдяки постійній структурі в лагранжевій системі координат функції в правій частині (1.2.2) вважають періодичними за ξ. Із застосуванням процедури усереднення за періодом структури вдається спростити систему рівнянь.

Доведемо, що змінні $p^{(0)} = p^{(0)}(s,t)$, $p^{(1)} = p^{(1)}(s,t)$, $u^{(0)} = u^{(0)}(s,t)$ не залежать від швидкої змінної ξ. Дійсно, після підстановки (1.2.1), (1.2.2) у початкові рівняння руху (1.1.9), (1.1.10) маємо

$$-\varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} + \varepsilon^0\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi}\right) +$$

$$+\varepsilon^1\left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi}\right) + \ldots = 0,$$

$$-\varepsilon^{-1}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} + \varepsilon^0\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi}\right) +$$

$$+\varepsilon^1\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial s} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi}\right) + \ldots = 0.$$

Згідно із загальною теорією асимптотичного методу, члени за різних степенів ε незалежно один від одного мають дорівнювати нулю. Тому $\partial p^{(0)}/\partial\xi = 0$, $\partial u^{(0)}/\partial\xi = 0$, тобто змінні $p^{(0)} = p^{(0)}(s,t)$, $u^{(0)} = u^{(0)}(s,t)$ не залежать від ξ. Крім того, для членів при ε^0 має бути:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \\ &\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Тепер застосуємо процедуру усереднення. За означенням $\langle\cdot\rangle = \int_0^1 (\cdot)d\xi$. Тут використано умову нормування $\int_0^1 d\xi = 1$. Далі оскільки функції $p^{(1)}(\xi)$ і $u^{(1)}(\xi)$ є періодичними за ξ, інтеграли $\left\langle \frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi} \right\rangle = 0$, $\left\langle \frac{\partial p^{(1)}}{\partial\xi} \right\rangle = 0$. Більше того, якщо $\langle u^{(0)}\rangle = u^{(0)}$, $\langle p^{(0)}\rangle = p^{(0)}$, то $\frac{\partial p^{(1)}}{\partial\xi} = 0$. Це означає, що $p^{(1)}$ також не залежить від ξ. Після інтегрування рівнянь (1.2.3) за періодом структури ξ отримуємо усереднені рівняння руху [26–28, 34]

$$\frac{\partial \langle V^{(0)}\rangle}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} = 0, \tag{1.2.4}$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} = 0. \tag{1.2.5}$$

Перейдемо до усереднення рівняння стану (1.1.6), враховуючи, що $\rho = V^{-1}$. Скористаємося тим, що $p^{(0)}$ у нульовому наближенні не залежить від ξ. Переписавши (1.1.6) в іншому вигляді з урахуванням $dp_e = c_e^2 d\rho$, підставимо ряди (1.2.2) у рівняння стану. Для членів нульового порядку за ε після усереднення отримуємо

$$\langle V_0\rangle - \langle V^{(0)}\rangle = \left\langle V_0 \frac{\tau c_f^{-2}\dfrac{dp^{(0)}}{dt} + \displaystyle\int_{p_0}^{p^{(0)}} c_e^{-2} dp^{(0)}}{\left(1+\tau\dfrac{d}{dt}\right)(V^{(0)})^{-1}\times} \right\rangle. \tag{1.2.6}$$

Іноді зручно використати інший запис усередненого рівняння стану:

$$d\left\langle V^{(0)}\right\rangle = -\left\langle \frac{(V^{(0)})^2}{c_f^2}\right\rangle dp - \left\langle \frac{V^{(0)}}{\tau V_e(p^{(0)})}\left(V^{(0)} - V_e(p^{(0)})\right)\right\rangle dt. \tag{1.2.7}$$

Розбіжність розв'язків усередненої системи рівнянь $p^{(0)}$, $u^{(0)}$, $V^{(0)}$ та неусередненої системи рівнянь p, u, V не перевищує величини порядку $O(\xi)$. Надалі обмежимося тільки нульовим наближенням, а верхній індекс (0) опустимо.

Тиск $p^{(0)}$ і масова швидкість $u^{(0)}$ не залежать від швидкої змінної ξ, чого не можна сказати про питомий об'єм $V^{(0)} = V^{(0)}(\xi)$. На великому масштабі s дія збурень проявляється в хвильовому русі середовища, тоді як на мікромасштабі ξ дія є однорідною (безхвильовою) на всьому періоді структури середовища, через те що тиск і масова швидкість на всьому періоді є сталими величинами. Цю властивість будемо часто використовувати в подальшому розгляді.

Система рівнянь (1.2.4)–(1.2.6) є незамкненою. Це пов'язано з тим, що в усереднене рівняння стану входить неусереднена величина $V^{(0)}(\xi)$. Тому під час розв'язування хвильових задач було використано неусереднене рівняння стану, переписане в усереднених змінних. Процедуру зведення задачі до повільної змінної описано в п. 1.4.3.

Рівняння (1.2.4)–(1.2.6) були виведені для строго періодичного середовища. Проте можна довести, що вони також будуть справедливі для середовищ з квазіперіодичною структурою. Дійсно, тиск p і масова швидкість u не залежать від швидкої змінної ξ. Тому на мікрорівні дія зовнішнього навантаження статично однорідна (безхвильова) на всьому періоді структурованого середовища. Однак на повільному масштабі s ця дія проявляється у хвильовому русі середовища. На мікрорівні поведінка середовища підпорядковується тільки термодинамічним законам. Там спостерігається механічна рівновага. Водночас на макрорівні рух середовища описується законами хвильової динаміки для усереднених змінних. З математичної позиції в нульовому порядку за ε розмір періоду вважаємо нескінченно малим, тобто маємо наближення $\varepsilon \to 0$. Це означає, що місцезнаходження окремих компонентів у періоді не має ніякого значення, однак масовий вміст кожного компонента повинен зберігатися. В результаті решта усереднених характеристик для середовищ з періодичною та квазіперіодичною структурою збігатиметься. Це означає, що довгохвильові рухи не відрізнятимуться між собою в періодичних, квазіперіодичних і статистично однорідних середовищах.

Виведена усереднена система рівнянь (1.2.4)–(1.2.6) описує нелінійні хвильові процеси в баротропних середовищах з регулярною структурою. Структурні характеристики входять тільки в рівняння стану (1.2.6). Система є інтегродиференційною і загалом не зводиться до усереднених характеристик p, u, $\langle V \rangle$. Отже, нелінійні хвильові процеси в структурованих середовищах не вдається моделювати в межах однорідного середовища.

Зазначимо, що раніше у статті [7] асимптотичний метод застосовували для усереднення системи рівнянь, що описує нестисливе середовище з в'язкістю. Однак у цій публікації величини, залежні від ξ, входять ще й в усереднені диференційні рівняння руху, що зменшує можливості методу. До того ж, згідно з [7], усереднений коефіцієнт в'язкості не вдається визначити, оскільки тензор напруження для кожного компонента середовища має член, який пов'язаний з об'ємною в'язкістю, а введене там поняття тиску відповідає рівноважному стану і залежить від швидкої змінної. З нашого погляду, величина $(-p)$ відповідає тензору напруження для одновимірного випадку і є величиною, яку можна виміряти безпосередньо у фізичному експерименті. Рівноважний тиск має розрив за переходу від одного компонента до іншого. Тому усереднювати рівноважний тиск, як це зроблено у статті [7], немає сенсу. Неможливість визначити неперервний усереднений рівноважний тиск призвела до того, що не вдалося [7] досягти поставленої мети, а саме звести рівняння руху до усереднених величин.

1.3 Усереднені рівняння руху в ейлерових координатах

У багатьох задачах зручно використовувати запис рівнянь (1.2.4), (1.2.5) в ейлеровій системі координат. Оскільки усереднені рівняння руху (1.2.4), (1.2.5) (без рівняння стану) в лагранжевих координатах мають запис виключно через усереднені характеристики p, u, $\langle V \rangle$, їх вдалося переписати в ейлерових незалежних змінних. Звернімо увагу на ту обставину, що асимптотичний метод усереднення в ейлеровій системі координат неможливо безпосередньо застосувати, оскільки в цих координатах мікроструктура середовища залежить від динамічного процесу.

Знайдемо перетворення між незалежними змінними в ейлеровій $(x,\, t_E)$ і лагранжевій $(s,\, t)$ системах [27, 28, 34]:

$$x = x(s,t), \quad t_E = t. \tag{1.3.1}$$

Важливою є та обставина, що швидкість u не залежить від ξ, тобто є сталою величиною на періоді ξ. Тому можна говорити про усереднену траєкторію частинки. Усереднена ейлерова координата x для конкретної частинки (її траєкторія) змінюється з часом:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_s = u(s,t).$$

Крім того, із зміною s змінюється x, тобто перетворення (1.3.1) записуємо через диференціали

$$dx = Ads + udt, \quad t_E = t. \tag{1.3.2}$$

Виходимо з фізичних міркувань, що місцезнаходження частинки dx однозначно визначається її траєкторією (тобто лагранжевою координатою s) і часом t, а отже, величина dx є однозначною функцією змінних s і t. Таким чином, математично умова однозначності перетворення між лагранжевими та ейлеровими системами координат, а саме величина dx у рівнянні (1.3.2), має бути повним диференціалом, тому

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Ця умова задовольняється, якщо $A = \langle V \rangle$, оскільки вона набуває вигляду рівняння неперервності (1.2.4). Отже, перетворення між лагранжевою і ейлеровою системами координат отримуємо у вигляді

$$dx = \langle V \rangle ds + u dt, \quad t_E = t, \tag{1.3.3}$$

причому частинні похідні змінюються за формулами

$$\frac{\partial}{\partial s} = \langle V \rangle \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_E} + u\frac{\partial}{\partial x}.$$

Рівняння руху (1.2.4), (1.2.5) в ейлеровій системі координат набувають вигляду (індекс E опущено)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \langle V \rangle^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial u \langle V \rangle^{-1}}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Надалі нам знадобиться поняття швидкої ейлерової координати ζ, яку введемо за означенням

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)_t = \frac{\tilde{\rho}}{\rho(\xi)}. \tag{1.3.5}$$

Звернімо увагу на те, що $\langle V \rangle \neq 1/\langle \rho \rangle$, а величина $\tilde{\rho} = \langle V \rangle^{-1}$ — середня густина середовища в ейлерових координатах, де

$$\langle V \rangle = \int\limits_0^1 V(\xi) d\xi = \int\limits_0^1 V\frac{\rho}{\tilde{\rho}} d\zeta = \tilde{\rho}^{-1}. \tag{1.3.6}$$

Середню густину $\tilde{\rho}$ у ейлерових координатах, як видно з (1.3.6), визначено як відношення маси на всьому періоді до об'єму періоду. Очевидно, що це є традиційне означення густини середовища.

Водночас $\langle V \rangle$ — це питомий об'єм, усереднений в одиницях маси на періоді, тобто об'єм, віднесений до маси в цьому об'ємі. Інші середні значення p і u в обох системах відліку збігаються.

Запис рівняння руху (1.3.4) набуває звичайного вигляду для середньої густини $\tilde{\rho}$. Виведення усереднених рівнянь руху (1.2.4), (1.2.5), (1.3.4) є математичним обґрунтуванням моделі однорідного середовища. Зазначимо, що ці моделі мають асимптотичну природу, причому усереднену густину середовища потрібно визначати як $\tilde{\rho} = \langle V \rangle^{-1}$, а не $\tilde{\rho} = \langle \rho \rangle$.

Усереднені рівняння руху в лагранжевих координатах, як і в ейлерових, мають однаковий вигляд з рівняннями однорідного середовища у відповідних координатах. Істотно різняться лише рівняння стану (1.1.7) і (1.2.6). Саме у рівнянні (1.2.6) відображено структуру середовища.

1.4 Аналіз усереднених рівнянь

Проведемо дослідження деяких загальних властивостей усередненої системи рівнянь і покажемо, що для акустичних збурень середовище проявляє себе як однорідне, тобто описується системою рівнянь для однорідного середовища з деякими усередненими змінними. Навпаки, опис нелінійних збурень не можна звести тільки до усереднених характеристик хвильових полів [200].

1.4.1 Акустичні хвилі

Розглянемо акустичну хвилю ($p' = p - p_0$, $p' \ll p_0$). Доведемо, що поширення акустичної хвилі у періодичному середовищі зі зліченним числом релаксівних компонентів подібне до поширення хвилі в однорідному середовищі з таким самим числом незалежних релаксаційних процесів. Покажемо це на прикладі для періодичного середовища з двома прошарками, в яких проходять по одному незалежному релаксаційному процесу. Усереднене рівняння стану (1.2.7)

$$d\langle V\rangle = -\left\langle \frac{V^2}{c_f^2}\right\rangle dp - \left\langle \frac{V}{\tau V_e(p)}\left(V - V_e(p)\right)\right\rangle dt$$

для малих збурень у такому середовищі можна переписати у вигляді

$$-\left\langle V'\right\rangle = \left\langle V^2/c_f^2\right\rangle p' + \varkappa \frac{V_1^2(c_{1e}^{-2} - c_{1f}^{-2})}{1 + \tau_{1\,\mathrm{per}}\dfrac{d}{dt}} p' +$$

$$+(1-\varkappa)\frac{V_2^2(c_{2e}^{-2} - c_{2f}^{-2})}{1 + \tau_{2\,\mathrm{per}}\dfrac{d}{dt}} p', \tag{1.4.1}$$

$$\left\langle V^2/c_e^2\right\rangle = \varkappa V_1^2/c_{1e}^2 + (1-\varkappa)V_2^2/c_{2e},$$

де індекс 1 стосується першого, індекс 2 — другого компонента; $\varkappa$ — координата межі між компонентами в елементарній комірці; $\varkappa$ та $1-\varkappa$ — масові концентрації першого і другого компонентів відповідно.

Для порівняння розглянемо однорідне середовище з двома незалежними релаксаційними процесами. Рівняння стану такого середовища для акустичних хвиль має вигляд [76]

$$-V' = \frac{V^2}{c_f^2}p' + \frac{V^2(c_{e1}^{-2} - c_{f1}^{-2})}{1 + \tau_{1\,\mathrm{hom}}\dfrac{d}{dt}}p' + \frac{V^2(c_{e2}^{-2} - c_{f2}^{-2})}{1 + \tau_{2\,\mathrm{hom}}\dfrac{d}{dt}}p', \quad c_f^{-2} = \sum_i c_{fi}^{-2}. \tag{1.4.2}$$

Слід зазначити, що буквенно-цифрові індекси для однорідного та періодичного середовищ мають зворотну послідовність: індекс 1 характеризує перший релаксаційний процес, індекс 2 — другий релаксаційний процес.

Отже, можна написати шість співвідношень:

$$\varkappa_i V_i^2 (c_{ie}^{-2} - c_{if}^{-2})_{\text{per}} = V^2 (c_{ei}^{-2} - c_{fi}^{-2})_{\text{hom}},$$
$$\left\langle V^2/c_e^2 \right\rangle = V^2 \sum_i c_{ei}^{-2}, \quad \left\langle V^2/c_f^2 \right\rangle = \left(V^2/c_f^2 \right)_{\text{hom}}, \tag{1.4.3}$$
$$\tau_{i\,\text{per}} = \tau_{i\,\text{hom}}, \quad \varkappa_1 = \varkappa, \quad \varkappa_2 = 1 - \varkappa, \quad i = 1,\ 2.$$

Ці рівняння показують, що для довільного двокомпонентного середовища з двома релаксівними компонентами ($\tau_{i\,\text{per}}$, c_{ie}, c_{if}) (див. рівняння (1.4.1)) завжди вдається підібрати однорідне середовище з двома релаксаційними процесами ($\tau_{i\,\text{hom}}$, c_{ei}, c_{fi}) (див. рівняння (1.4.2)). У таких двох середовищах рухи збурення питомого об'єму $\langle V \rangle$ подібні. Щодо густини $\langle \rho \rangle$ таке твердження неправильне. Одержаний результат легко поширити на середовища з довільним зліченним числом релаксівних компонентів. Цей результат обґрунтовує твердження, що під час вивчення поширення акустичної хвилі періодичне середовище із N релаксівними компонентами може бути замінено на однорідне середовище, в якому проходить N незалежних релаксаційних процесів.

Подібність поширення акустичних хвиль у періодичному та однорідному середовищах вказує на те, що внутрішня структура середовища проявляється тільки через дисперсно-дисипативні властивості. На акустичному рівні динамічну поведінку довгої хвилі в середовищі з мікроструктурою можна моделювати в межах однорідного релаксівного середовища. Раніше таке твердження приймали a priori. Ми ж математично довели це твердження, детально врахувавши структуру середовища.

1.4.2 Нелінійні хвилі

Проаналізуємо поширення нелінійних хвиль у структурованому середовищі. Для спрощення викладень обмежимося розглядом середовища без релаксації ($c = c_f = c_e$). Усереднене рівняння стану (1.2.6) в такому випадку спрощується і набуває вигляду

$$d\langle V \rangle = -\left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle dp. \tag{1.4.4}$$

Покажемо, що навіть для нерелаксівного середовища усереднену систему не можна записати в термінах середніх характеристик для нелінійних хвиль. Після підстановки рівняння стану (1.4.4) у рівняння неперервності (1.2.4) маємо

$$\left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

Поділивши його на $\pm \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{1/2}$ і склавши з рівнянням (1.2.5), отримуємо

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \pm \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{1/2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \pm \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{-1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \pm \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{1/2} \frac{\partial p}{\partial s} \right) = 0.$$

З цього виразу видно, що усереднена система рівнянь належить до гіперболічного типу. Рівняння характеристик у лагранжевій системі координат (масова просторова координата) мають вигляд

$$\frac{ds}{dt} = \pm \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{-1/2}. \tag{1.4.5}$$

На характеристиках наявні співвідношення

$$I_{\pm} = u \pm \int \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{1/2} dp, \tag{1.4.6}$$

які за аналогією з однорідним середовищем назвемо інваріантами Рімана. Величина (1.4.5) має сенс усередненої швидкості поширення збурення в лагранжевих координатах. Вона залежить від тиску й інтегрально від структури.

Відмітимо окремий випадок. Як відомо, у вакуумі хвилі не поширюються, що також формально випливає з рівняння (1.4.5). Гіперболічність рівняння вказує на можливість описати ударні хвилі усередненою системою рівнянь.

Рівняння для характеристик (1.4.5) і інваріантів Рімана (1.4.6) є інтегродиференційними. Вони утримують нелінійну величину

$\left\langle \dfrac{V^2}{c^2} \right\rangle$, яка залежить від властивостей елементів структури періодичного середовища.

Якщо ввести ефективну середню швидкість звуку за формулою

$$\tilde{c} = \sqrt{\langle V \rangle^2 \Big/ \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle}, \tag{1.4.7}$$

то матимемо традиційний запис рівняння стану (1.4.4).

Нормування на усереднений питомий об'єм $\langle V \rangle$ і початкову швидкість звуку $\tilde{c}$ дає змогу порівнювати результати для різних середовищ. Для зручності властивості середовищ були узгоджені відповідно до співвідношень (1.4.3), щоб акустична хвиля у таких середовищах поширювалася подібно одна до одної.

Звертаємо увагу на те, що $\tilde{c}$ не є усередненою характеристикою, тобто $\tilde{c}^2 \neq \langle c^2 \rangle$. Очевидно, що структура середовища робить певний внесок у нелінійність. Дійсно, якщо навіть швидкість звуку в кожному компоненті не залежить від тиску $c \neq f(p)$, то в загальному випадку величина $\tilde{c}$ є функцією тиску.

Система рівнянь (1.2.4)–(1.2.7) — гіперболічна, що вказує на можливість описувати розривні розв'язки, якими є ударні хвилі. Для аналізу таких розв'язків необхідно подати рівняння (1.2.4), (1.2.5) у вигляді інтегральних законів збереження

$$\oint \left[\langle V \rangle \, ds + udt\right] = 0, \qquad \oint \left[uds - pdt\right] = 0.$$

Можна легко сформулювати умови на ударному фронті, що випливають із законів збереження потоків маси і імпульсу:

$$\left(\langle V_1 \rangle - \langle V_0 \rangle\right) D + u_1 - u_0 = 0, \qquad (u_1 - u_0) D - p_1 + p_0 = 0,$$

де індекси 0 і 1 належать до параметрів потоку перед і після ударного фронту відповідно. Усереднена швидкість ударного фронту у термінах лагранжевих змінних D (розмірність $[D]$, кг/с) і масова швидкість u підпорядковуються таким співвідношенням:

$$D = \sqrt{(p_1 - p_0)/(\langle V_0 \rangle - \langle V_1 \rangle)}, \;\; u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0)(\langle V_0 \rangle - \langle V_1 \rangle)}. \tag{1.4.8}$$

1.4.3 Аналітично-числовий метод розрахунку

Поряд з теоретичними дослідженнями аналітичними методами були проведені цілеспрямовані числові експерименти, які є універсальним інструментом для розв'язування таких задач. Розрахунки були спрямовані як на підтвердження аналітичних результатів, так і на отримання закономірностей досліджуваного хвильового процесу.

Рівняння руху (1.2.4), (1.2.5), записані в усереднених характеристиках p, u, $\langle V\rangle$, як було доведено, залежать тільки від повільної змінної s і часу t. Рівняння стану (1.2.6) або (1.2.7) є інтегродиференційними рівняннями зі змінними, що залежать як від повільної s, так і від швидкої змінної ξ. Метод пошуку розв'язків системи рівнянь (1.2.4)—(1.2.7) не є очевидним.

Розглянемо можливі підходи, в яких рівняння зведемо до вигляду, в якому шукані функції залежать тільки від повільної змінної s і часу t [26–28, 30, 34]. Виділити задачу за повільною змінною можна різними способами. Вкажемо два з них. Універсальним є спосіб, коли шукані функції подають у вигляді рядів Фур'є [26–28, 34]. У спеціальних випадках, наприклад, для шарувато-неоднорідних середовищ ми запропонували кусковосталі ортогональні базисні функції, які дають змогу проводити необхідні розрахунки з істотно меншими затратами машинних ресурсів [28].

Спочатку зупинимося на першому способі. Всі функції, залежні від ξ, запишемо у вигляді рядів Фур'є на відрізку, що відповідає періоду структури. До рівнянь (1.2.4) додаємо співвідношення для коефіцієнтів рядів p_k і V_k, які випливають з рівняння стану. Зручно використовувати співвідношення $\rho V = 1$, яке в нульовому порядку за ξ має вигляд

$$\rho^{(0)} V^{(0)} = 1. \tag{1.4.9}$$

Як і раніше, опускатимемо надалі верхній індекс (0).

У рівняннях (1.1.7), (1.4.9) величини ρ, c_f^{-2}, c_e^{-2}, V, τ_p^{-1}, що залежать від ξ, подамо у вигляді рядів Фур'є на відрізку [0; 1], наприклад, для $V(\xi)$ маємо

$$V(\xi) = V_0' + \sum_{n=1}^{\infty}(V_n' \cos(2\pi\xi n) + V_n'' \sin(2\pi\xi n)). \qquad (1.4.10)$$

Коефіцієнти рядів знаходимо з відомих формул [68]. Запишемо рівняння (1.4.9) через коефіцієнти Фур'є. Помноживши обидві частини (1.4.9) на $\cos(2\pi\xi n)$, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, та проінтегрувавши за періодом структури ξ, отримаємо для $k = 0$

$$1 = \rho_0' V_0' + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n' V_n' + \rho_n'' V_n'') \equiv \psi(\rho, V), \qquad (1.4.11)$$

для кожного $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$

$$0 = \rho_0' V_k' + \rho_k' V_0' + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n' V_{n+k}' + \rho_{n+k}' V_n' + \rho_n'' V_{n+k}'' + \rho_{n+k}'' V_n'') +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k-1}(\rho_n' V_{k-n}' - \rho_n'' V_{k-n}'') \equiv \psi_k(\rho, V). \qquad (1.4.12)$$

Аналогічно після домноження (1.4.9) на $\sin(2\pi\xi n)$ та інтегрування за періодом структури ξ отримаємо для кожного $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$

$$0 = \rho_0' V_k'' + \rho_k'' V_0' + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n' V_{n+k}'' - \rho_{n+k}' V_n'' + \rho_{n+k}'' V_n' - \rho_n'' V_{n+k}') +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k-1}(\rho_{k-n}' V_n'' - \rho_n'' V_{k-n}') \equiv \varphi_k(\rho, V). \qquad (1.4.13)$$

Функції $\psi_k(\rho, V)$, $\varphi_k(\rho, V)$ введено для зручності запису наведених нижче формул. Випишемо ще раз рівняння стану (1.1.7) у зручному вигляді:

$$\left(\frac{d\rho}{dt} - c_f^{-2}\frac{dp}{dt}\right) + c_f^{-2}\tau_p^{-1}(p - p_0) + \tau_p^{-1}(\rho - \rho_0) = 0. \quad (1.4.14)$$

Це рівняння утримує добутки не більше двох функцій, залежних від ξ, а саме величини $c_f^{-2}\tau_p^{-1}$, $\tau_p^{-1}(\rho-\rho_0)$. Наявність у рівняннях виразів у вигляді добутків тільки двох функцій, залежних від ξ, спрощує задачу.

У просторі фур'є-образів з рівняння стану маємо $2k+1$ рівнянь. Дійсно інтегрування рівняння стану на періоді структури ξ приводить до співвідношення

$$\frac{d\rho_0'}{dt}-(c_f^{-2})_0'\frac{dp}{dt}-\psi(c_f^{-2},\tau_p^{-1})(p-p_0)+\psi(\tau_p^{-1},\rho-\rho_0)=0. \quad (1.4.15)$$

Помноживши рівняння (1.4.14) на $\cos(2\pi\xi n)$ і проінтегрувавши на періоді структури, отримуємо для кожного $k=1,\ 2,\ 3,\dots$

$$\frac{d\rho_k'}{dt}-(c_f^{-2})_k'\frac{dp}{dt}-\psi_k(c_f^{-2},\tau_p^{-1})(p-p_0)+\psi_k(\tau_p^{-1},\rho-\rho_0)=0. \quad (1.4.16)$$

При множенні на $\sin(2\pi\xi n)$ аналогічна процедура для кожного $k=1,\ 2,\ 3,\dots$ дає

$$\frac{d\rho_k''}{dt}-(c_f^{-2})_k''\frac{dp}{dt}-\varphi_k(c_f^{-2},\tau_p^{-1})(p-p_0)+\varphi_k(\tau_p^{-1},\rho-\rho_0)=0. \quad (1.4.17)$$

У результаті отримали нескінченну систему рівнянь (1.4.10)—(1.4.17) відносно змінних p, u, ρ_k, V_k, які є тільки функціями від s і t. Густину і питомий об'єм, як функції від повільної змінної s, знаходимо після обчислення сум рядів Фур'є. У числових розрахунках можна обмежитися сумами часткових рядів, причому, в цьому випадку система рівнянь буде замкненою. Точність, з якою частковий ряд Фур'є відтворює структуру середовища, визначає точність опису хвильових процесів.

Описаний метод є універсальним для знаходження розв'язків інтегродиференційної системи рівнянь. Проте якщо властивості компонентів, а особливо їх розміри на періоді структури дуже різняться один від одного, то розрахунок з використанням часткових сум Фур'є стає надто громіздким. Використання великої кількості членів рядів Фур'є різко збільшує час для числових розрахунків і займає значні машинні ресурси. Для подолання вказаних недоліків виконано пошук систем ортонормованих функцій, які найкраще відповідали б дослідженню модельного періодичного середовища [30]. Для шарувато-періодичних середовищ відмінність задачі полягає в тому, що властивості компонентів задаємо кусково-сталими функціями, а у лагранжевій системі координат розміри компонентів є сталими. Для розкладу таких кусково-сталих функцій найліпше використовувати кусково-сталі базисні функції. За їх використання шукані величини подаємо скінченним рядом.

Розглянемо шарувато-періодичне середовище, що складається з N компонентів. Нехай $\varkappa_i$ — координата межі i компонента за швидкою змінною всередині однієї структурної комірки (рис. 1.2). Важливо те, що межі в лагранжевих масових координатах не залежать від хвильових процесів, тобто $\varkappa_i = \text{const}$. Визначимо базисні кусково-сталі одноперіодичні функції у такий спосіб:

$$g_0 = 1, \qquad \varkappa_0;$$

$$g_i(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \le \xi < \varkappa_{i-1}; \\ k_i^{-1}(1-\varkappa_i), & \varkappa_{i-1} \le \xi < \varkappa_i; \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \\ k_i^{-1}(\varkappa_{i-1}-\varkappa_i), & \varkappa_i \le \xi < 1, \end{cases}$$

де $k_i^2 = (1-\varkappa_{i-1})(1-\varkappa_i)(\varkappa_i - \varkappa_{i-1})$. Графічно базисні функції зображено на рис. 1.2, *б*. Легко перевірити, що функції $g_i(\xi)$ є ортонормованими, тобто $\int_0^1 g_i g_j d\xi = \delta_{ij}$. Зведення задачі до задачі в термінах повільної змінної за допомогою таких базисних функцій здійснюємо за тим самим алгоритмом, як і при використанні тригонометричних рядів Фур'є. Функції, залежні від ξ, подаємо у вигляді, наприклад, для питомого об'єму

$$V(\xi) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i V_i. \tag{1.4.18}$$

Коефіцієнти V_i не залежать від швидкої змінної. Розкладемо рівняння (1.4.9) за базисними функціями. Для цього, помноживши

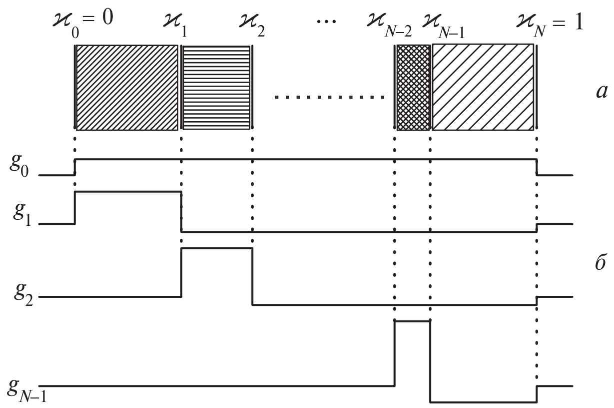

Рис. 1.2. Один період шарувато-періодичного середовища (a) та базисні функції g_i ($б$)

його на g_i та проінтегрувавши за періодом структури, одержуємо

$$1 = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i V_i \equiv \mu_0(\rho, V), \tag{1.4.19}$$

$$0 = \rho_0 V_k + \rho_k V_0 + a_k \rho_k V_k \equiv \mu_k(\rho, V), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, N-1. \tag{1.4.20}$$

Коефіцієнти a_i знаходимо з розмірів компонентів:

$$a_i = \frac{1 - 2\varkappa_k + \varkappa_{k-1}}{\varkappa_k}.$$

Така сама процедура, застосована до рівняння стану, дає

$$\dot{p}(c_f^{-2})_k + \dot{\rho}_k + \mu_k(\tau_p^{-1}, c_e^{-2})(p - p_0) - \mu_k(\rho - \rho_0, \tau_p^{-1}) = 0. \tag{1.4.21}$$

У результаті маємо систему з $2N + 2$ рівнянь (1.2.4), (1.2.5), (1.4.19)–(1.4.21), в якій функції не залежать від швидкої просторової змінної ξ, тобто задачу зведено до задачі в термінах повільної просторової змінної s. У цьому випадку структура шарувато-неоднорідного середовища передається точно скінченним рядом, на відміну від методу, в якому використано ряди Фур'є. Це дало можливість розраховувати модельні середовища, для яких властивості компонентів і їхні розміри можуть дуже різнитися між собою.

Таким чином, за допомогою зведення задачі до задачі в термінах повільної просторової змінної подолано основну складність, а саме система рівнянь утримує функції, які залежать тільки від повільної змінної s та часу t і не залежать від швидкої просторової змінної ξ. У процесі числових розрахунків крок розрахункової сітки за просторовою координатою можна вибрати з обмеження, яке визначається довжиною хвильового збурення, а не періодом структури. Отже, поширення хвилі можна знаходити на великих відстанях.

1.5 Обґрунтування моделі Ляхова багатокомпонентних середовищ

Асимптотичну усереднену модель нерівноважного неоднорідного середовища [26–28, 34] порівняємо із добре відомою моделлю природних багатокомпонентних середовищ, запропонованою Г.М. Ляховим у праці [80]. На засадах асимптотичної усередненої моделі математично обґрунтуємо модель Ляхова і доведемо, що вона є окремим випадком асимптотичної усередненої моделі багатокомпонентних середовищ [29, 201].

Моделюючи багатокомпонентні середовища, Г.М. Ляхов запропонував описувати їх як однорідне суцільне середовище з особливим рівнянням стану. Модель однорідного середовища використано в тому сенсі, що рівняння руху записані як для однорідного середовища. Водночас особливості структури закладено в рівняння стану, яке не можна звести тільки до термінів середніх змінних. Макрооб'єм містить усі компоненти середовища. Невідомими змінними вважають середні величини — тиск p_L, питомий об'єм V_L, масову швидкість u_L. Рівняння руху в моделі Ляхова для пласкої симетрії записано в лагранжевій системі координат (масова просторова координата) для середніх величин:

$$\frac{\partial V_L}{\partial t} - \frac{\partial u_L}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial u_L}{\partial t} + \frac{\partial p_L}{\partial m} = 0. \tag{1.5.1}$$

У працях [79, 80] мікроструктуру було враховано за допомогою динамічного рівняння стану

$$\frac{\dot{V}_L}{V_{L0}} = \varphi(p_L)\dot{p_L} - \frac{\alpha_1}{\eta}\psi(p_L, V_L), \tag{1.5.2}$$

$$\varphi(p_L) = -\sum_{i=2}^{3} \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i(p_L - p_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1\right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i},$$

$$\psi(p_L, V_L) = p_L - p_0 - \frac{\rho_{10} c_{10}^2}{\gamma_1} \times \tag{1.5.3}$$

$$\times \left\{ \left[\frac{V_L}{V_{0L}} - \sum_{i=2}^{3} \alpha_i \left(\frac{\gamma_i(p_L - p_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right)^{-1/\gamma_i} \right]^{-\gamma_1} \alpha_1^{\gamma_1} - 1 \right\}.$$

Тут індекс 0 стосується початкового незбуреного стану, причому $i = 1$ відповідає параметрам повітря, $i = 2$ — води, $i = 3$ — твердої речовини; α_i — початковий об'ємний вміст i компонента в ґрунті; $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$; γ_i — показник степеня в рівняннях стану Тета.

Зазначимо, що рівняння (1.5.2), (1.5.3) крім середніх величин p_L, V_L, u_L містять величини α_i, які відповідальні за структуру середовища, тобто структуру середовища враховано не тільки опосередковано через середні значення p_L, V_L, u_L, а також явно через величини α_i.

У рівняннях стану Ляхова значну роль відіграє коефіцієнт об'ємної в'язкості середовища η. Поняття в'язкості середовища в механіці суцільного середовища виникає для низькочастотних збурень [76]. Тому використання об'ємної в'язкості, здавалося б, накладає обмеження зверху на частотний спектр збурення. Однак завдяки запропонованій у працях [79,80] залежності об'ємної в'язкості від тиску і питомого об'єму $\eta = \eta(p_L, V_L)$ вдалося, використавши рівняння (1.5.1)—(1.5.3), описати збурення в усьому частотному діапазоні. Останнє твердження доведено нижче в межах асимптотичної усередненої моделі багатокомпонентних середовищ. Тому поняття коефіцієнта об'ємної в'язкості η в моделі Ляхова [79, 80] є ширшим, ніж просто в'язкість середовища.

Для $\dot{p} = 0$, $\dot{V} = 0$ із співвідношень (1.5.2), (1.5.3) випливає рівняння стану для рівноважного стисливого середовища

$$\frac{V_L}{V_{0L}} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left(\frac{\gamma_i (p_L - p_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right)^{-1/\gamma_i}. \qquad (1.5.4)$$

Швидкість звуку підпорядкована залежності

$$\tilde{c} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left(\frac{\gamma_i (p_L - p_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right)^{-1/\gamma_i}}{\left\{ \tilde{\rho}_0 \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i (p_L - p_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i} \right\}^{1/2}}. \qquad (1.5.5)$$

Система (1.5.1) – (1.5.3) описує еволюцію довгохвильових збурень у багатокомпонентних середовищах. Рівняння стану (1.5.2) отримано з напівемпіричних міркувань про середовище і властивості компонентів [80]. Тверда речовина і рідина підпорядковані рівноважному рівнянню Тета. Газоподібний компонент підпорядкований динамічному рівнянню стану. Згідно з припущенням Ляхова [80], у початковий момент навантажування газ є нестисливим. Це означає, що заморожена швидкість звуку газового компонента в ґрунті є нескінченно великою величиною:

$$c_{f1} = \infty. \qquad (1.5.6)$$

Між моделлю Ляхова і усередненими рівняннями простежується прямий зв'язок. Передусім покажемо, що змінна V_L, введена Г.М. Ляховим, є не що інше, як питомий об'єм, усереднений за масовою лагранжевою координатою $V_L = \langle V \rangle$. Проведемо перетворення. Згідно з викладками Г.М. Ляхова (див. с. 56 у праці [80]), середній питомий об'єм V_L можна переписати у вигляді

$$\frac{V_L}{V_{0L}} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{\rho_{i0}}{\rho_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\tilde{\rho_0}}{\rho_{i0}} \beta_i \frac{\rho_{i0}}{\rho_i} = \tilde{\rho_0} \sum_{i=1}^{3} \beta_i V_i = \langle V_0 \rangle^{-1} \langle V \rangle, \quad (1.5.7)$$

де β_i — масовий вміст i-го компонента, який характеризує мікроструктуру середовища. Ця величина є сталою в хвильовому процесі і однозначно пов'язана з об'ємним вмістом i-компонента α_i у початковий момент:

$$\alpha_i = \beta_i \frac{\tilde{\rho_0}}{\rho_{i0}} = \beta_i \frac{V_{0i}}{V_{L0}}. \quad (1.5.8)$$

Крім співвідношення (1.5.8) для тотожностей (1.5.7) використано зв'язок (1.3.5) $\tilde{\rho} = \langle V \rangle^{-1}$.

Як показано вище, в методі асимптотичного усереднення в нульовому порядку отримано незалежність тиску і масової швидкості на періоді структури. Водночас у моделі Ляхова a priori прийнято твердження, що на мікрорівні компоненти рухаються з однаковою швидкістю і тиск в них збігається. Порівнявши рівняння руху (1.2.4), (1.2.5) і (1.5.1), бачимо, що між тиском і масовою швидкістю існує зв'язок $p_L = p^{(0)}$, $u_L = u^{(0)}$.

Спочатку розглянемо нерелаксівне середовище і порівняємо швидкості звуку (1.2.4), (1.2.5) і (1.5.5). Ці вирази збігаються у тому сенсі, що в рівнянні (1.5.5) є конкретний зв'язок швидкості звуку з тиском через рівняння Тета, тоді як в рівнянні (1.4.7) не конкретизується залежність швидкості звуку від тиску. Тому перевіримо випадок $p \to p_0$. Підстановка виразу (1.5.8) у (1.5.5) дає

$$\tilde{c_0} = \left(\tilde{\rho_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i}{\rho_i c_{i0}^2} \right)^{-1/2} = \tilde{\rho_0}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{3} \beta_i \frac{V_{i0}^2}{c_{i0}^2} \right)^{-1/2} = \langle V_0 \rangle \left\langle \frac{V_0^2}{c_0^2} \right\rangle^{-1/2}.$$

Ця величина повністю збігається з ефективною середньою швидкістю звуку для періодичного середовища (1.4.7). Отже, вираз (1.4.7) переходить у вираз (1.5.5).

Врахуємо процеси релаксації і розглянемо динамічне рівняння стану в моделі Ляхова (1.5.2), (1.5.3). Порівняємо два рівняння стану (1.2.7) і (1.5.2). Ліві частини (1.2.7) і (1.5.2) збігаються. Зіставимо коефіцієнти при $\dot{p}$. Залежність $\varphi(p)$ можна подати за рівнянням (1.5.8):

$$\varphi(p_L) = -\sum_{i=2}^{3} \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left(\frac{V_i}{V_{i0}}\right)^{1+\gamma_i} = -\langle V\rangle^{-1} \sum_{i=1}^{3} \beta_i \frac{V_i^2}{c_{i0}^2} \left(\frac{V_i}{V_{i0}}\right)^{\gamma_i - 1}.$$

Конкретний зв'язок тиску і швидкості звуку компонентів у моделі Ляхова встановлено за допомогою рівняння Тета. В асимптотичній моделі ця залежність не конкретизована. Якщо прийняти, що

$$c_{fi} = c_{i0} \left(\frac{\rho_i}{\rho_{i0}}\right)^{\gamma_i - 1}, \qquad i = 2,\ 3,$$

і врахувати умову нестисливості повітря (1.5.6), то коефіцієнти при $\dot{p}$ у рівняннях (1.2.7) і (1.5.2) збігатимуться.

Розглянемо інші члени в правих частинах рівнянь (1.2.7) і (1.5.2). Використавши співвідношення (1.5.8), спростимо ψ через низку тотожностей:

$$\begin{aligned} \psi(p, V) &= p - p_0 - \frac{\rho_{10} c_{10}^2}{\gamma_1} \left[\left(\frac{V}{V_0} - \sum_{i=2}^{3} \alpha_i \frac{V_i}{V_{i0}} \right)^{-\gamma_1} \alpha_1^{\gamma_1} - 1 \right] = \\ &= p - p_0 - \frac{\rho_{10} c_{10}^2}{\gamma_1} \left[\left(\frac{V_1}{V_{10}} \right)^{-\gamma_1} - 1 \right] = \\ &= p - p_0 \left(\tfrac{V_1}{V_{10}} \right)^{-\gamma_1} = p - p_{e1}. \end{aligned}$$

Залежність $p_{e1} = p_{e1}(V_1)$ є рівноважним рівнянням стану повітря в ґрунті, тобто рівнянням стану вільного повітря. Остаточно другий доданок у правій частині (1.5.2) набуває вигляду $\alpha_1/\eta(p - p_{e1})$. Тоді, обмежившись припущенням за моделлю Ляхова, що тільки один компонент релаксує:

$$c_{f1} \neq c_{e1}, \quad c_{f2} = c_{e2}, \quad c_{f3} = c_{e3},$$

можна показати, що інші доданки в рівняннях (1.2.7) і (1.5.2) збігаються між собою за умови $\tau_1 = \eta V_1^2 / c_{e1}^2 V_{10}$.

Отже, можна дійти такого висновку. Асимптотична усереднена модель нерівноважного квазіперіодичного середовища описує нелінійні довгі хвилі в середовищах, які можуть мати будь-яку кількість релаксівних компонентів (довільні розподіли $V(\xi)$, $\tau(\xi)$ на елементарній комірці структури), а функціональні залежності швидкостей звуку від тиску в моделі потрібно додатково конкретизувати. В межах запропонованої моделі відома модель Ляхова для багатокомпонентних середовищ отримала математичне обґрунтування. Доведено, що модель Ляхова є окремим випадком асимптотичної усередненої моделі, має асимптотичну природу і описує довгохвильові збурення середовищ, у яких лише один (газовий) компонент релаксівний, причому у початковий момент навантажування цей компонент є нестисливим, а швидкості звуку в компонентах — це задані функції тиску.

Розділ 2

Солітони в релаксівному однорідному середовищі

Прогрес у розумінні фундаментальних нелінійних явищ, що спостерігаються у багатьох напрямах сучасної науки, спрямовує зусилля наукової спільноти на створення все адекватніших фізичних моделей. Природно, що математичні моделі реальних процесів виявляються нелінійними. Із розвитком нових наукових методів і підходів все більше уваги приділяють створенню нелінійних математичних моделей.

Крім практичних потреб у дослідженні нелінійних систем особливий інтерес до цих моделей пов'язаний з новими успіхами в теорії нелінійних хвиль. Перспективи, що відкрилися, зумовлені насамперед відкриттям методу оберненої задачі розсіювання для рівняння Кортевега—де Вріза (KdV) [134] і виникненням теорії солітонів.

У цьому розділі основну увагу приділено знаходженню солітонних розв'язків еволюційного рівняння, що моделює поширення нелінійних хвиль у релаксівному середовищі. Низькочастотні збурення задовольняють рівнянню KdV, високочастотні — нелінійному еволюційному рівнянню, яке відоме як рівняння Вахненка (the Vakhnenko equation). Доведено, що існує зв'язок між цим рівнянням і рівнянням Уізема (the Whitham equation). Аналіз запропонованого нелінійного рівняння дав змогу знайти його точні періодичні розв'язки на біжучих хвилях, зокрема поодинокі хвилі. Виявляється, що для поодиноких хвиль характерні властивості солітонів. Солітонні розв'язки — це окремі розв'язки, з якими пов'язано багато унікальних властивостей нелінійних рівнянь, і передусім їх інтегровність.

2.1 Високо- та низькочастотні збурення в релаксівному середовищі

Проаналізуємо систему рівнянь руху (1.1.9), (1.1.10) спільно з динамічним рівнянням стану (1.1.6) [18,197]. Рівняння стану для швидкоплинного і повільного процесів відомі — (1.1.2), (1.1.3). Розглянемо малі збурення $p' = p - p_0$ ($p' \ll p$) та врахуємо нелінійності рівнянь стану (1.1.2), (1.1.3), переписавши їх у вигляді рядів за степенями p' з точністю до членів $O(p'^2)$:

$$\begin{aligned} V_f(p_0 + p') &= V_0 - V_0^2 c_f^{-2} p' + \tfrac{1}{2} \left. \frac{d^2 V_f}{dp^2} \right|_{p=p_0} p'^2 + \dots\ , \\ V_e(p_0 + p') &= V_0 - V_0^2 c_e^{-2} p' + \tfrac{1}{2} \left. \frac{d^2 V_e}{dp^2} \right|_{p=p_0} p'^2 + \dots\ . \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Рівняння руху (1.1.9), (1.1.10)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial u}{\rho_0 \partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\rho_0 \partial x} = 0$$

зведемо до одного рівняння, виключивши з них змінну u через диференціювання за відповідними змінними:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\rho_0^2 \partial x^2} = 0. \tag{2.1.2}$$

Продиференціювавши двічі за часом динамічне рівняння стану (1.1.7)

$$\tau_p \left(\frac{d\rho}{dt} - c_f^{-2} \frac{dp}{dt} \right) + (\rho - \rho_e) = 0$$

і підставивши до нього (2.1.2), отримаємо еволюційне рівняння від однієї змінної p' [18, 197]:

$$\tau_p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - c_f^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{1}{2V_0^2} \left. \frac{d^2 V_f}{dp^2} \right|_{p=p_0} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} \right) + \\ + \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - c_e^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{1}{2V_0^2} \left. \frac{d^2 V_e}{dp^2} \right|_{p=p_0} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} \right) = 0. \qquad (2.1.3)$$

Відмітимо, що у статті [122] розглянуто подібне рівняння, але без нелінійних членів.

Середовищу, яке описуємо рівнянням (2.1.3), властиві нелінійність, характерна для гідродинамічних процесів $p'\partial p'/\partial x$, та складний дисперсійний закон. Спочатку проаналізуємо відповідне цьому рівнянню дисперсійне співвідношення, яке легко випливає з (2.1.3) після підстановки малого збурення у вигляді $p' \sim \exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)]$,

$$-\mathrm{i}\omega\tau_p \frac{c_e^2}{c_f^2}(\omega^2 - c_f^2 k^2) + (\omega^2 - c_e^2 k^2) = 0. \qquad (2.1.4)$$

З цього виразу знаходимо залежність $k = k(\omega)$:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_f^2} \frac{\tau_p^2 \omega^2}{1 + \tau_p^2 \omega^2} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\tau_p \omega} \frac{c_f^2 - c_e^2}{c_e^2} + \frac{1}{\tau_p^2 \omega^2} \frac{c_e^2}{c_f^2} \right). \qquad (2.1.5)$$

Взявши квадратний корінь, представимо k як $k = k' + \mathrm{i}k''$. Ясно, що $k'' > 0$ відповідає швидкості загасання хвилі з відстанню [76]. Величину $c = \omega/k'$ можна зіставити зі швидкістю поширення збурення. Вирази для k' і k'' мають вигляд

$$k' = a_1 \sqrt{\sqrt{a_2^2 + a_3^2} + a_2}, \qquad k'' = a_1 \sqrt{\sqrt{a_2^2 + a_3^2} - a_2},$$

$$a_1 = \frac{\tau_p^2 \omega^2}{\sqrt{2} c_f \sqrt{1 + \tau_p^2 \omega^2}}, \quad a_2 = 1 + \frac{c_f^2}{\tau_p^2 \omega^2 c_e^2}, \quad a_3 = \frac{c_f^2 - c_e^2}{\tau_p \omega c_e^2}.$$

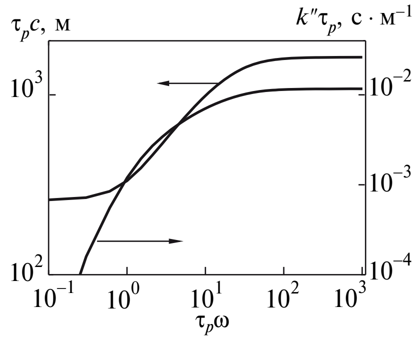

Рис. 2.1. Залежність швидкості c і коефіцієнта загасання k'' від частоти $\tau_p\omega$

На рис. 2.1, як приклад, показано залежності величин c і k'' від $\tau_p\omega$ для водонасиченого ґрунту з концентрацією повітря 0,1. У такому середовищі $c_f = 1620$ м/с і $c_e = 260$ м/с [80]. Швидкість c монотонно зростає від c_e до c_f із збільшенням $\tau_p\omega$. Водночас залежність $k'' = k''(\omega)$ вказує на те, що при $\omega \to 0$ дисипація відсутня, а для високочастотних збурень величина k'' стає сталою і не залежить від ω (рис. 2.1). Водночас гранична величина дорівнює

$$\tau_p k'' = \frac{c_f^2 - c_e^2}{2c_f^2 c_e^2}.$$

Енергія високочастотного збурення завжди дисипує. Для таких збурень зниження тиску завжди однакове на одній і тій самій відстані і не залежить від частоти.

Наявність рівняння стану у вигляді (1.1.6) дає змогу описувати ефекти, пов'язані з об'ємною в'язкістю середовища. Покажемо, що для повільних процесів (а саме для них уведено поняття коефіцієнтів в'язкості в класичній гідродинаміці, тобто для процесів, що враховують невеликі відхилення від рівноваги в лінійному наближенні) коефіцієнт об'ємної в'язкості ζ пов'язаний з часом релаксації τ_ρ через співвідношення [76, 81, 122]

$$\zeta = \tau_\rho \rho (c_f^2 - c_e^2). \tag{2.1.6}$$

Перепишемо (1.1.7) у вигляді ряду p від ρ за степенями τ_ρ. Для цього продиференціюємо (1.1.7) за часом і результат підставимо замість $\dot{\rho}$ у це саме рівняння. Повторивши цю процедуру декілька разів, отримаємо з необхідною точністю такий вираз:

$$dp = c_e^2 d\rho + \tau_\rho (c_f^2 - c_e^2) d\dot{\rho} - \tau_\rho^2 (c_f^2 - c_e^2) d\ddot{\rho} + \dots \, . \tag{2.1.7}$$

Обмежимося двома членами ряду. Величина $c_e^2 d\dot{\rho}$ відповідає приросту рівноважного тиску dp_e у нескінченно повільному процесі, тобто $dp_e = c_e^2 d\rho$. Звернімо увагу, що величина p набуває загальнішого сенсу, ніж просто тиск. З точністю до знака величина $(-p)$ є не що інше, як напруження π_{ii}. За означенням, у низькочастотному наближенні напруження виражають через коефіцієнт об'ємної в'язкості [76]

$$\pi_{ii} = -p_e + \zeta \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Тоді з другого члена ряду (2.1.7) легко отримати значення коефіцієнта об'ємної в'язкості (2.1.6).

У подальшому досліджуватимемо рівняння (2.1.3), яке є загальним рівнянням. Застосуємо для аналізу цього рівняння метод багатьох масштабів [83]. Величину $\varepsilon \equiv \tau_p \omega$ вибираємо за малий (великий) параметр задачі. Величині ω можна дати фізичну інтерпретацію. Це характерна частота певного хвильового збурення. Для зручності перепишемо рівняння (2.1.3), опустивши штрих у p':

$$\begin{aligned} \tau_p \omega \frac{\partial}{\partial t\omega} & \left(\frac{\partial^2 p}{\partial (x\omega)^2} - c_f^{-2} \frac{\partial^2 p}{\partial (t\omega)^2} + \alpha_f \frac{\partial^2 p^2}{\partial (t\omega)^2} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial (x\omega)^2} - c_e^{-2} \frac{\partial^2 p}{\partial (t\omega)^2} + \alpha_e \frac{\partial^2 p^2}{\partial (t\omega)^2} \right) = 0, \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

$$\alpha_f = \frac{1}{2V_0^2} \left. \frac{d^2 V_f}{dp^2} \right|_{p=p_0}, \qquad \alpha_e = \frac{1}{2V_0^2} \left. \frac{d^2 V_e}{dp^2} \right|_{p=p_0}.$$

Введемо нові незалежні змінні

$$T_0 = t\omega, \quad X_0 = x\omega, \quad T_{-2} = t\omega/\varepsilon^2, \quad X_{-2} = x\omega/\varepsilon^2. \tag{2.1.9}$$

Шукана величина p є функцією T_0, X_0, T_{-2}, X_{-2}, тобто $p = p(T_0, X_0, T_{-2}, X_{-2})$. Наявні похідні в (2.1.8) знаходимо через нові незалежні змінні

$$\frac{\partial}{\partial x\omega} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial X_{-2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t\omega} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial T_{-2}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (x\omega)^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} + 2\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial X_0 \partial X_{-2}} + \varepsilon^{-4}\frac{\partial^2}{\partial X_{-2}^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (t\omega)^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_{-2}} + \varepsilon^{-4}\frac{\partial^2}{\partial T_{-2}^2}, \tag{2.1.10}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial (t\omega)^3} = \frac{\partial^3}{\partial T_0^3} + 3\varepsilon^{-2}\frac{\partial^3}{\partial T_0^2 \partial T_{-2}} + 3\varepsilon^{-4}\frac{\partial^3}{\partial T_0 \partial T_{-2}^2} + \varepsilon^{-6}\frac{\partial^3}{\partial T_{-2}^3},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t\omega \partial (x\omega)^2} = \frac{\partial^3}{\partial X_0^2 \partial T_0} + \varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial^3}{\partial X_0^2 \partial T_{-2}} + 2\frac{\partial^3}{\partial T_0 \partial X_0 \partial X_{-2}}\right) +$$

$$+ \varepsilon^{-4}\left(\frac{\partial^3}{\partial T_0 \partial X_{-2}^2} + 2\frac{\partial^3}{\partial X_0 \partial X_{-2} \partial T_{-2}}\right) + \varepsilon^{-6}\frac{\partial^3}{\partial X_{-2}^2 \partial T_{-2}}.$$

Підставивши ці похідні у (2.1.8) і, згідно з методом багатьох масштабів, прирівнявши члени за однакових степенів ε до нуля [19, 27–29, 201], маємо

$$
\begin{aligned}
&O(\varepsilon^{+1}): \quad \frac{\partial}{\partial T_0}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial X_0^2} - c_f^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial T_0^2} + \alpha_f \frac{\partial^2 p^2}{\partial T_0^2}\right) = 0,\\
&O(\varepsilon^{0}): \quad \frac{\partial^2 p}{\partial X_0^2} - c_e^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial T_0^2} + \alpha_e \frac{\partial^2 p^2}{\partial T_0^2} = 0,\\
&O(\varepsilon^{-1}): \quad \left(\frac{\partial^3}{\partial X_0^2 \partial T_{-2}} + 2\frac{\partial^3}{\partial T_0 \partial X_0 \partial X_{-2}}\right) p - 3c_f^{-2}\frac{\partial^3 p}{\partial T_0^2 \partial T_{-2}} +\\
&\qquad\qquad + 3\alpha_f \frac{\partial^3 p^2}{\partial T_0^2 \partial T_{-2}} = 0,\\
&O(\varepsilon^{-2}): \quad \frac{\partial^2 p}{\partial X_0 \partial X_{-2}} - c_e^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial T_0 \partial T_{-2}} + \alpha_e \frac{\partial^2 p^2}{\partial T_0 \partial T_{-2}} = 0,\\
&O(\varepsilon^{-3}): \quad \left(\frac{\partial^3}{\partial T_0 \partial X_{-2}^2} + 2\frac{\partial^3}{\partial X_0 \partial X_{-2} \partial T_{-2}}\right) p - 3c_f^{-2}\frac{\partial^3 p}{\partial T_0 \partial T_{-2}^2} +\\
&\qquad\qquad + 3\alpha_f \frac{\partial^3 p^2}{\partial T_0 \partial T_{-2}^2} = 0,\\
&O(\varepsilon^{-4}): \quad \frac{\partial^2 p}{\partial X_{-2}^2} - c_e^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial T_{-2}^2} + \alpha_e \frac{\partial^2 p^2}{\partial T_{-2}^2} = 0,\\
&O(\varepsilon^{-5}): \quad \frac{\partial}{\partial T_{-2}}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial X_{-2}^2} - c_f^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial T_{-2}^2} + \alpha_f \frac{\partial^2 p^2}{\partial T_{-2}^2}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.1.11}
$$

Одержано сім рівнянь, причому перші два з них залежать тільки від T_0, X_0, а останні два — тільки від T_{-2}, X_{-2}. Отже, першими двома з них описують низькочастотні збурення, а останніми — високочастотні. Взаємодію між цими збуреннями виражають трьома середніми рівняннями.

Випишемо рівняння руху для низькочастотного ($\tau_p\omega \ll 1$) і високочастотного ($\tau_p\omega \gg 1$) збурень у початкових незалежних змінних x, t, враховуючи при цьому, що нелінійні члени є малою величиною порядку ε порівняно з іншими членами у наведеному рівнянні. Об'єднавши два останні рівняння (2.1.11), отримаємо рівняння для високочастотного збурення ($\tau_p\omega \gg 1$)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - c_f^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \alpha_f c_f^2 \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \beta_f \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma_f p = 0, \qquad (2.1.12)$$

$$\alpha_f = \frac{1}{2V_0^2}\left.\frac{d^2 V_f}{dp^2}\right|_{p=p_0}, \quad \beta_f = \frac{c_f^2 - c_e^2}{\tau_p c_e^2 c_f}, \quad \gamma_f = \frac{c_f^4 - c_e^4}{2\tau_p^2 c_e^4 c_f^2}.$$

Крім нелінійного члена з коефіцієнтом α_f рівняння містить дисипативний $\beta_f \dfrac{\partial p}{\partial x}$ і дисперсійний $\gamma_f p$ члени. Якщо $\alpha_f = \beta_f = 0$, то приходимо до лінійного рівняння Клейна—Гордона. Для нього відомі функції Гріна [39], що дає змогу відшукати його розв'язок принаймні у квадратурах. Водночас загальне рівняння (2.1.12), як виявилося, вивчено недостатньо.

Певна річ, аналіз і пошук окремих розв'язків виведеного рівняння (2.1.12) становлять безперечний інтерес. Нижче, у підрозд. 2.2, показано, що рівнянню (2.1.12) властиві періодичні стаціонарні розв'язки, зокрема, у вигляді поодиноких хвиль.

У іншому граничному випадку ($\tau_p\omega \ll 1$), залучивши два перші рівняння системи (2.1.11), отримуємо рівняння для низькочастотних збурень. Обмежившись розглядом поширення хвиль в один бік і вважаючи, що

$$\frac{\partial}{\partial x} - c_e^{-1}\frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial x}$$

(так звана факторизація), остаточно маємо

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_e \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_e c_e^3 p \frac{\partial p}{\partial x} - \beta_e \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \gamma_e \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = 0, \qquad (2.1.13)$$

$$\alpha_e = \frac{1}{2V_0^2}\left.\frac{d^2 V_e}{dp^2}\right|_{p=p_0}, \quad \beta_e = \frac{c_e^2 \tau_p}{2c_f^2}(c_f^2 - c_e^2),$$

$$\gamma_e = \frac{c_e^3 \tau_p^2}{8c_f^4}(c_f^2 - c_e^2)(c_f^2 - 5c_e^2).$$

Це відоме рівняння Кортевега–де Вріза–Бюргерса (KdVB). Його застосовують у багатьох розділах фізики під час опису нестаціонарних нелінійних процесів. Математики приділяють велику увагу вивченню поведінки розв'язків цього рівняння [1, 40, 57, 59, 90]. Великі успіхи в інтегруванні нелінійних рівнянь пов'язані з дослідженням рівняння KdV. Це рівняння має дивовижні властивості, передусім інтегровність, перетворення Беклунда, ієрархію законів збереження. Рівняння інтегрують, наприклад, за допомогою методу оберненої задачі розсіювання. Відправивши читача до монографій [1, 57, 59] за докладним описом особливих властивостей, характерних для рівнянь KdV, відзначимо одну із них — наявність солітонних розв'язків. Солітонні розв'язки вказують на особливі властивості нелінійного еволюційного рівняння. До таких властивостей так чи інакше можна віднести те, що до рівняння вдається застосовувати метод оберненої задачі розсіювання і метод Хіроти.

Знаходження солітонних розв'язків для інших нелінійних рівнянь викликає особливу зацікавленість. Випишемо односолітонні розв'язки для рівняння (2.1.13) за відсутності дисипації ($\beta_e = 0$):

$$p = A\alpha_e^{-1}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{3\gamma_e}}\left(x - c_e t - \frac{A}{3}t\right)\right].$$

Солітон з більшою амплітудою A має більшу швидкість. Відомо, що після нелінійної взаємодії два солітони набувають початкової форми, проте спостерігається зсув за фазою. У разі дисипації ($\beta_e \neq 0$) також вдалося знайти точні стаціонарні розв'язки [69, 70].

Привертає увагу той факт, що дисперсійні співвідношення $\omega = \omega(k)$ для лінеаризованих рівнянь (2.1.12), (2.1.13) подають скінченними рядами в першому випадку за степенями k^{-1}, у другому — за степенями k відповідно:

$$\omega^2 = c_f^2 k^2 (1 + \mathrm{i}\beta_f k^{-1} - \gamma_f k^{-2}), \qquad \tau_p\omega \gg 1.$$

$$\omega = c_e k + \mathrm{i}\beta_e k^2 - \gamma_e k^3, \qquad \tau_p\omega \ll 1.$$

2.2 Нелінійне рівняння для високочастотних збурень

Нижче проаналізовано еволюційне рівняння (2.1.12) [18, 21, 24, 37, 163, 176, 196–199, 204–211, 215–218]. Важливо, що воно є нелінійним, причому нелінійність характерна для гідродинамічних еволюційних рівнянь, а члени, відповідальні за дисипацію та дисперсію, мають особливий вигляд. На першому етапі доцільно досліджувати рівняння без дисипації $\beta_f = 0$. До яких розв'язків може привести взаємовплив нелінійності і дисперсії в цьому рівнянні? Тут зважаємо на деяку аналогію з рівнянням KdV, в якому такий вплив може дати солітонні розв'язки.

Проаналізуємо рівняння (2.1.12)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - c_f^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \alpha_f c_f^2 \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \beta_f \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma_f p = 0.$$

Обмежимося розглядом хвиль, що поширюються тільки в один бік. З цією точністю перепишемо оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - c_f^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} - c_f^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + c_f^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right) \to 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + c_f^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

і тоді в нелінійному члені похідну за часом можна замінити на просторову похідну. Внаслідок того що нелінійний і дисипативний члени вважаємо малими порівняно з іншими, зручно перейти до нових змінних. Переходимо до системи координат, що переміщується із швидкістю c_f. У безрозмірних змінних

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{\gamma_f}{2}}(x - c_f t), \quad \tilde{t} = \sqrt{\frac{\gamma_f}{2}} c_f t, \quad \tilde{u} = \alpha_f c_f^2 p$$

рівняння (2.1.12) набуває такого вигляду [18, 21, 197] (в подальшому тильду опускаємо):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0. \tag{2.2.1}$$

Стала величина $\alpha = \beta_f/\sqrt{2\gamma_f}$ завжди є додатною.

Насамперед становить інтерес вивчення рівняння (2.1.12) без дисипації $\beta_f = 0$ ($\alpha = 0$ у рівнянні (2.2.1)):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - c_f^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \alpha_f c_f^2 \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \gamma_f p = 0.$$

У безрозмірних змінних рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u + u = 0. \tag{2.2.2}$$

Виявилося, що рівняння (2.2.2) недостатньо вивчено. Вже традиційно в науковій літературі рівняння (2.2.2) називають рівнянням Вахненка (the Vakhnenko equation). Надалі будемо притримуватися цієї оригінальної назви, хоча в деяких пізніших джерелах трапляються такі назви: рівняння Островського–Хандера, рівняння для коротких хвиль, зведене рівняння Островського, а також рівняння Островського–Вахненка.

Рівняння (2.2.2) містить суто дисперсійний член. Дисперсійне співвідношення для лінеаризованого рівняння (2.2.2) легко записати:

$$\omega = -k^{-1}.$$

Власне, дисперсійне співвідношення рівняння (2.2.2) відповідає за дисперсійне розмиття хвилі.

Рівняння (2.2.1) і (2.2.2) мають зв'язок з рівнянням Уізема [40,104]. Звернемося до рівняння Уізема, загальний запис якого має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_{\infty}^{-\infty} K(x-s)\frac{\partial u}{\partial s}ds = 0.$$

Це рівняння містить нелінійність uu_x, яка характерна для гідродинамічних рівнянь. Останній член рівняння відповідальний за дисперсію. Відомо [40, 104], що завжди можна підібрати ядро

$K(x)$, таке, щоб отримати потрібну дисперсію. Дійсно, дисперсійне співвідношення $c(k) = -\omega(k)/k$ і ядро $K(x)$ пов'язані між собою через перетворення Фур'є:

$$c(k) = F[K(x)], \qquad K(x) = F^{-1}[c(k)].$$

Отже, для рівняння (2.2.1) ядро має вигляд

$$K(x) = \frac{1}{2}[\alpha(2\Theta(x) - 1) + |x|],$$

водночас для рівняння (2.2.2) з дисперсійним співвідношенням $\omega = -1/k$ ядро набуває вигляду

$$K(x) = F^{-1}[\omega(k)/k] = \frac{1}{2}|x|.$$

Тут $\Theta(x)$ — функція Хевісайда.

Таким чином, рівняння (2.2.1) і (2.2.2) для розв'язків, що швидко спадають на нескінченності, зводяться до рівняння Уізема й мають такий вигляд:

для рівняння (2.2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x - s|\frac{\partial u}{\partial s} ds = 0; \tag{2.2.3}$$

для рівняння (2.2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\int\limits_{\infty}^{-\infty} |x - s|\frac{\partial u}{\partial s} ds = 0. \tag{2.2.4}$$

Звернемо увагу на рівняння без дисипації (2.2.4). Відзначимо, що для рівняння Уізема характерні цікаві властивості. Зокрема, це рівняння описує стійкі хвильові утворення типу поодиноких хвиль, має періодичні розв'язки, пояснює існування граничної амплітуди [40]. Важливою властивістю є наявність багатьох законів збереження для хвиль, які швидко спадають на нескінченності. Вкажемо на деякі з них:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\infty}^{-\infty} u dx = 0, \quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\infty}^{-\infty} u^2 dx = 0, \quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\infty}^{-\infty} \left(\frac{1}{3}u^3 + \widehat{K}u\right) dx = 0.$$

За означенням

$$\widehat{K}u = \int\limits_{\infty}^{-\infty} K(x-s)u(s,t)ds.$$

Зупинимося детально на запропонованому рівнянні (2.2.2)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u + u = 0.$$

Його можна проінтегрувати і знайти стаціонарні розв'язки на біжучих хвилях. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = u(x-vt) = u(\eta), \qquad \eta = x - vt. \tag{2.2.5}$$

Отже, переходимо від двох незалежних змінних до однієї. Величина v є параметром. Підставивши (2.2.5) у рівняння (2.2.4), після однократного інтегрування маємо

$$-vu + \frac{1}{2}u^2 + \widehat{K}u + c = 0. \tag{2.2.6}$$

Скористаємося тією обставиною, що функція $|\eta|$ є фундаментальним розв'язком рівняння

$$\frac{d^2}{d\eta^2}|\eta| = 2\delta(\eta),$$

тобто справедливе співвідношення

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\widehat{K}u = u.$$

Застосувавши до (2.2.6) оператор диференціювання $\dfrac{d^2}{d\eta^2}$, отримуємо

$$\frac{d^2}{d\eta^2}(u-v)^2 + 2u = 0. \tag{2.2.7}$$

Це рівняння виведено для хвиль, що швидко спадають на нескінченності. Проте у публікації [40] доведено, що це саме рівняння справедливе також для періодичних розв'язків. Інтегрування в цьому випадку потрібно проводити за періодом розв'язку [40]. Необхідно зазначити, що (2.2.7) можна отримати з (2.2.2) підстановкою (2.2.5).

За допомогою заміни

$$z = u - v$$

зводимо рівняння (2.2.7) до вигляду

$$\frac{d}{d\eta} z z' + (z + v) = 0. \tag{2.2.8}$$

Помноживши його на zz' та проінтегрувавши, приходимо до рівняння

$$\frac{1}{2}(zz')^2 = -\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}vz^2 + c_1. \tag{2.2.9}$$

Штрих позначає похідну за η. Тричлен в правій частині зручно подати через корені a_i $(i = 1,\, 2,\, 3)$ рівняння, утвореного з цього тричлена. Тоді рівняння (2.2.9) набуває вигляду

$$\frac{1}{2}(zz')^2 = -\frac{1}{3}(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3). \tag{2.2.10}$$

Якщо існує комплексний корінь a_i, легко перевірити, що в такому випадку значення z прямує до мінус нескінченності, а це суперечить фізичній постановці задачі. Дійсно, тричлен в області інтегрування завжди має бути додатним, як випливає з лівої частини рівняння (2.2.10), і якщо буде тільки один дійсний корінь, то область інтегрування за z пробігає від мінус нескінченності до значення єдиного дійсного кореня. Отже, всі корені тричлена мають бути дійсними. Для визначеності вважатимемо $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Це вимагає, щоб виконувалась умова, за якої значення c_1 потрапляє у відрізок $0 \leq z \leq \dfrac{1}{6}v^2$. Оскільки існує тільки одна константа c_1, лише один корінь може бути вибраний довільним, наприклад a_3. Інші корені пов'язані з ним через q формулою

$$a_{2,1} = \frac{1}{2}\left(-q \pm \sqrt{q^2 - 4a_3 q}\right), \qquad q \equiv \frac{3}{2}v + a_3. \tag{2.2.11}$$

Причому корінь a_3 належить відрізку $a_3 \in [0,\, 0,5v]$ для $v > 0$ або відрізку $a_3 \in [-v,\, -1,5v]$ для $v < 0$. Тоді з останньої формули випливає, що завжди $a_1 < 0$, а корінь a_2 змінює знак залежно від знака v.

Областю інтегрування рівняння (2.2.11) є відрізок $[a_2, a_3]$. У точках $z = a_2$ та $z = a_3$ похідні z' дорівнюють нулю. Інтегруємо рівняння (2.2.11)

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\eta + c_2 &= \int\limits_z^{a_3} \frac{z dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(a_3-z)}} = \\ &= \frac{2a_1}{a_3 - a_1} F(\varphi, k) + 2(a_3 - a_1)E(\varphi, k). \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Тут $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ — неповні еліптичні інтеграли першого та другого родів відповідно,

$$\sin\varphi = \frac{a_3 - z}{a_3 - a_2}, \quad k^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}. \tag{2.2.13}$$

Константа c_2 визначає початкову фазу хвильового збурення, без втрати загальності можна вважати, що вона дорівнює нулю. Співвідношення (2.2.12) та (2.2.13) дають параметричну залежність шуканої функції $\eta = \eta(\varphi)$.

Можна визначити довжину хвилі як приріст, який отримує величина η, коли змінна φ пробігає значення від нуля до 2π:

$$\lambda = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{a_3 - a_1}}\left[a_1 K(m) + (a_3 - a_1)E(m)\right], \tag{2.2.14}$$

де $K(m)$, $E(m)$ — повні еліптичні інтеграли першого та другого роду відповідно.

Існує два випадки: $v > 0$ і $v < 0$.

Для хвилі, що рухається зі швидкістю, яка перевищує швидкість поширення звуку високочастотних збурень c_f, тобто $v > 0$, спостерігається особливість: при $z = 0$ (ця точка входить в область інтегрування $z \in [a_2, a_3]$) похідні z' прямують до нескінченності. В околі $z = 0$ розв'язок підпорядковується рівнянню

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(z^2 + 2v\eta^2) = 0, \tag{2.2.15}$$

тобто інтегральна крива в околі цієї точки проходить по еліпсу, центр якого лежить на лінії $u = v$.

Через багатозначність еліптичних інтегралів розв'язки є періодичними і, як видно з рис. 2.2, *а*, неоднозначними. Розв'язки мають вигляд петель, що періодично повторюються. Для граничної амплітуди $u_{\max} = 1,5v$ періодична хвиля вироджується у відокремлену хвилю (крива *1* на рис. 2.2, *а*).

Дуже цікавим здається той факт, що довжина хвилі від'ємна $\lambda \leq 0$ для $v > 0$. Для поодинокої хвилі маємо $\lambda = 0$.

У другому випадку, коли хвиля рухається із швидкістю, меншою за швидкість звуку c_f, тобто $v < 0$, точка $z = 0$ не потрапляє у відрізок $[a_2, a_3]$. Профілі хвилі для різних максимальних амплітуд представлено на рис. 2.2, *б*. Розв'язок $u = u(\eta)$ є завжди

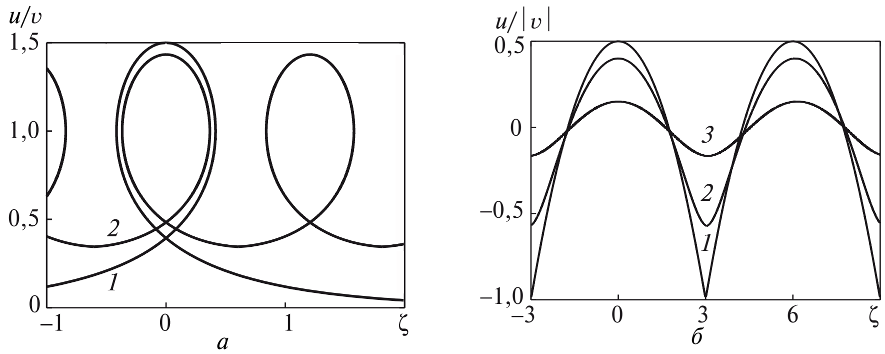

Рис. 2.2. Розв'язки на біжучих хвилях для різних амплітуд (*1*, *2*) і параметра v: *а* — $v > 0$; *б* — $v < 0$

однозначним. Для цього типу хвиль довжина хвилі λ — додатна. При малих амплітудах $u_{\max} \to 0$ хвиля переходить у синусоїдальну з періодом $\lambda = 2\pi\sqrt{|v|}$. За збільшення максимальної амплітуди період зменшується до значення $\lambda = 6\sqrt{|v|}$. Профіль хвилі майже завжди гладкий, тільки для хвилі з граничною амплітудою $u_{\max} = 0,5|v|$ характер профілю змінюється. Крива *1* (рис. 2.2, *б*), яка відповідає цьому випадку, має точку загострення і складається з парабол. При $\eta = 3\sqrt{|v|}$ (це півперіод) спостерігається точка загострення, тут похідна $\dfrac{du}{d\eta} = -\sqrt{|v|}$ змінює знак на протилежний.

Подамо фізичну інтерпретацію неоднозначним розв'язкам. Під час поширення хвилі в середовищі з внутрішніми обмінними процесами хвильове збурення порушує термодинамічну рівновагу на мікрорівні (динамічний процес), тоді як взаємодія між частинками середовища прагне відновити цю рівновагу (процес релаксації). Для високочастотних збурень $\tau_p\omega \gg 1$ час релаксації τ_p набагато більший за характерний час зміни хвильового поля $1/\omega$, тому взаємодія між частинками не встигає відновити рівновагу. Отже, частинки з різними термодинамічними параметрами можуть з'явитися в одному мікрооб'ємі.

2.3 Взаємодія солітонів

Зрозуміло, що неоднозначні розв'язки, одержані у підрозд. 2.2 (рис. 2.2), суттєво ускладнюють дослідження рівняння (2.2.2) у початкових координатах (x, t). Зазначену трудність вдалося подолати, перейшовши до нових координат. Результати, подані у цьому підрозділі, отримано спільно з Дж. Паркесом (E.J. Parkes).

2.3.1 Рівняння Вахненка—Паркеса

Досягнуто успіху в знаходженні нових координат, в яких розв'язки задано однозначними функціями у параметричному вигляді. Перетворення між координатами виявилося подібним до перетворення між лагранжевими та ейлеровими координатами.

За означенням, нові координати (X, T) вводять, застосувавши співвідношення

$$\varphi\, dT = dx - u\, dt, \qquad X = t, \tag{2.3.1}$$

де φ — допоміжна залежна змінна. Важливо, що функції $x = \theta(X, T)$ та $u = U(X, T)$ виявилися однозначними, тобто в координатах (X, T) розв'язки початкового рівняння (2.2.2) задають у параметричному вигляді однозначними функціями. Введення нових координат (X, T) є ключовим моментом для дослідження взаємодії солітонів, а також інтерпретації неоднозначних розв'язків [197]. Перетворення (2.3.1) є подібним до перетворення між ейлеровими (x, t) та лагранжевими (X, T) координатами. Вимагаємо, щоб $T = x$ за відсутності збурення, тобто за умови, коли $u(x, t) = 0$. Тому $\varphi = 1$, якщо $u(x, t) = 0$.

Обернене до (2.3.1) перетворення визначимо так:

$$dx = \varphi\, dT + U\, dX, \qquad t = X, \qquad U(X, T) \equiv u(x, t). \tag{2.3.2}$$

Оскільки перетворення (2.3.2) має бути взаємооднозначним, dx є повним диференціалом, а отже:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial T}. \tag{2.3.3}$$

Рівняння (2.2.2), яке записано через нові залежні змінні $\varphi(X, T)$, $U(X, T)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + U\varphi = 0, \tag{2.3.4}$$

разом з рівнянням (2.3.3) складає головну систему рівнянь. Систему рівнянь (2.3.3), (2.3.4) можна звести до нелінійного рівняння з однією невідомою величиною W:

$$W_X = U. \tag{2.3.5}$$

Будемо вивчати такі розв'язки U, які прямують до нуля при $|X| \to \infty$, або рівносильно розв'язки W, які приймають сталі значення на безмежності. З рівнянь (2.3.3) та (2.3.5), врахувавши вимогу $\varphi \to 1$ при $|X| \to \infty$, маємо $\varphi = 1 + W_T$. Виключивши змінну φ з (2.3.4), отримуємо трансформований вид рівняння Вахненка (2.2.2)

$$W_{XXT} + (1 + W_T)W_X = 0 \tag{2.3.6}$$

або еквівалентний —

$$UU_{XXT} - U_X U_{XT} + U^2 U_T = 0. \tag{2.3.7}$$

До того ж, як випливає з (2.3.2), початкова незалежна просторова змінна x може бути визначена із співвідношення

$$x = \theta(t, T), \qquad \theta(X, T) = x_0 + T + W(X, T), \tag{2.3.8}$$

де x_0 — довільна стала. Оскільки функції $\theta(X, T)$ і $U(X, T)$ — однозначні, то проблему, пов'язану з неоднозначними розв'язками, подолано щонайменше з математичної позиції.

Запропоноване перетворення вперше було знайдено та опубліковано в статтях [163,204,205]. Дотримуючись термінології публікацій [108,133,158,228], у подальшому на рівняння (2.3.6) посилатимемося як на рівняння Вахненка–Паркеса (the Vakhnenko–Parkes equation — VPE).

Як приклад подамо розв'язки (2.2.12), (2.2.13) для рівняння (2.2.2) у трансформованих координатах, тобто знайдемо розв'язки на біжучих хвилях для рівняння (2.3.7). Покажемо, як можна цього досягти. Продиференціювавши співвідношення (2.2.12) за η, матимемо

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial \eta}{\partial X} &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-v + \frac{\partial x}{\partial X}\right) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,(-v + W_X(X, T)) = \\ &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}} z = \frac{z}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)(a_3 - z)}}\frac{\partial z}{\partial X}, \end{aligned}$$

або

$$\pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)(a_3 - z)}}\frac{\partial z}{\partial X}.$$

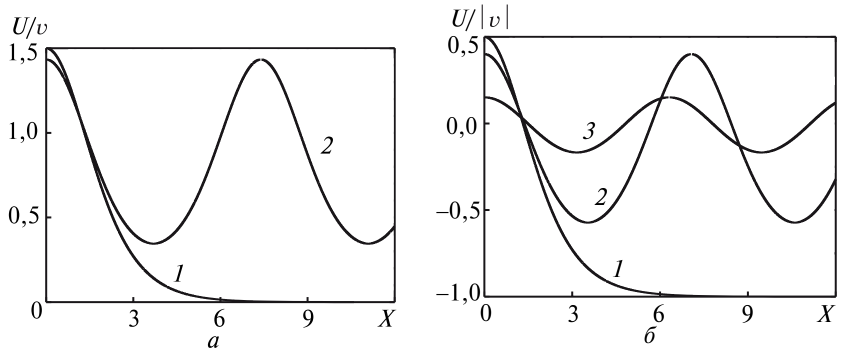

Рис. 2.3. Розв'язки на біжучих хвилях для різних амплітуд (*1*—*3*) у координатах (X, T): *а* — $v > 0$; *б* — $v < 0$

Звідки після інтегрування отримуємо

$$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}X = \int\limits_{z}^{a_3} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(a_3-z)}} = \frac{2}{\sqrt{a_3-a_1}}F(\varphi, k). \tag{2.3.9}$$

Спільно з $z = U(X, T) + v$ це співвідношення задає шукану залежність $U(X, T)$ у параметричному виді. Таким чином, маємо розв'язок у нових координатах (X, T).

Розв'язки для $v > 0$ в координатах (X, T) подано на рис. 2.3, *а*. Криві *1*, *2* на ньому відповідають кривим *1*, *2* на рис. 2.2, *а*. Розв'язки в координатах (X, T) для $v < 0$ представлено на рис. 2.3, *б*, криві *1*—*3* відповідають кривим *1*—*3* на рис. 2.2, *б*.

З одного боку, поставлена мета досягнута, а саме отримано розв'язки в нових координатах, в яких вони стали однозначними. З іншого боку, дуже важливо, що періодичний розв'язок (крива *1*, рис. 2.2, *б*), а саме кусково-періодичний розв'язок з парабол, стає неперіодичним. Інакше кажучи, знаходимо певну відповідність між кривими *1* на рис. 2.3, *а*, *б*. Ця особливість видається доволі важливою для подальшого розгляду періодичних розв'язків методом оберненої задачі розсіювання.

2.3.2 Метод Хіроти

Для побудови точних хвильових розв'язків повністю інтегровних рівнянь розроблено різноманітні ефективні методи. Одним із фундаментальних прямих методів без сумніву є білінійний метод Хіроти [143–145, 160], для якого характерні унікальні властивості, що уможливлює знаходження багатосолітонних розв'язків, перетворення Беклунда, законів збереження.

Щоб дослідити деяке нелінійне рівняння методом Хіроти, потрібно насамперед звести це рівняння до білінійного виду Хіроти [143]

$$F(D_X, D_T) f \cdot f = 0, \tag{2.3.10}$$

де F — поліном відносно операторів D_T і D_X. Кожне рівняння має свій власний поліном. За означенням, білінійний оператор Хіроти вводять так (див. розд. 5.2 у публікації [143]):

$$D_T^n D_X^m a \cdot b =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T'}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X'}\right)^m a(T, X) b(T', X') \Big|_{T=T',\, X=X'}. \tag{2.3.11}$$

Якщо поліном F задовольняє умовам (5.41), (5.42) із публікації [143]:

$$F(D_X, D_T) = F(-D_X, -D_T), \quad F(0,0) = 0, \tag{2.3.12}$$

то вдається успішно застосовувати метод Хіроти. При цьому важливим рівнянням є дисперсійне співвідношення

$$F(2k_i, -2\omega_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{2.3.13}$$

Для знаходження розв'язків рівняння (2.3.6) за методом Хіроти [143] необхідно подати його через оператори Хіроти (2.3.11). Записавши

$$W = 6(\ln f)_X, \tag{2.3.14}$$

знаходимо, що

$$W_X = \frac{3D_X^2 f \cdot f}{f^2}\,, \qquad W_{XXT} + W_X W_T = \frac{3D_T D_X^3 f \cdot f}{f^2}. \quad (2.3.15)$$

Тоді білінійна форма рівняння Вахненка—Паркеса набуває вигляду

$$F(D_X, D_T) f \cdot f = 0, \quad F(D_X, D_T) := D_T D_X^3 + D_X^2. \quad (2.3.16)$$

Відповідно до праці [143], співвідношення

$$f = 1 + e^{2\eta}, \quad (2.3.17)$$

де $\eta = kX - \omega T + \alpha$ визначає односолітонний розв'язок. Тут k, ω, α — сталі величини. Дисперсійне співвідношення (2.3.13) набуває вигляду $F(2k, -2\omega) = 0$, звідки знаходимо $\omega = 1/4k$, а отже

$$\eta = k(X - cT) + \alpha, \qquad c = 1/4k^2. \quad (2.3.18)$$

Підстановка (2.3.17) у (2.3.14) дає односолітонний розв'язок VPE

$$W(X,T) = 6k(1 + \tanh\eta), \quad (2.3.19)$$

так що

$$U(X,T) = 6k^2 \operatorname{sech}^2 \eta. \quad (2.3.20)$$

Співвідношення $u(x,t) = U(X,T)$ (2.3.2) спільно з (2.3.8), (2.3.19) та (2.3.20) задають однопетлевий солітонний розв'язок рівняння (2.2.2) у параметричному вигляді.

Визначивши, що $v = 1/c$, перепишемо (2.3.8):

$$x - vt = -v(X - cT) + 6k(1 + \tanh[k(X - cT) + \alpha]) + x_0. \quad (2.3.21)$$

Параметром у цьому разі є величина $\chi = X - cT$. Однопетлевий солітонний розв'язок для (2.2.2) можна подати в термінах параметра χ у вигляді

$$u = \frac{3v}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}\,\chi}{2}\right), \;\; x - vt = \tilde{x_0} - v\chi + 3\sqrt{v}\tanh\left(\frac{\sqrt{v}\,\chi}{2}\right) \quad (2.3.22)$$

з довільними сталими $v(>0)$ і $\tilde{x_0}$.

Зазвичай вважають, що величина α є дійсною величиною, щоб розв'язок $U(X,T)$ був дійсною функцією. Однак дійсні розв'язки можна отримати також при $\alpha = -\mathrm{i}\pi + \tilde{\alpha}$ ($\tilde{\alpha}$ — дійсна величина). У цьому випадку солітонний розв'язок (сингулярний солітонний розв'язок) буде розривним [226]:

$$U(X,T) = 6k^2 \sinh^{-2} \eta. \tag{2.3.23}$$

2.3.3 Двосолітонний розв'язок

Двосолітонний розв'язок визначають за співвідношенням

$$f = 1 + e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2} + b^2 e^{2(\eta_1+\eta_2)}. \tag{2.3.24}$$

Тут $\eta_i = k_i X - \omega_i T + \alpha_i$,

$$b^2 = -\frac{F[2(k_1-k_2), -2(\omega_1-\omega_2)]}{F[2(k_1+k_2), -2(\omega_1+\omega_2)]}, \tag{2.3.25}$$

де величини k_i, ω_i, α_i — сталі. Дисперсійне співвідношення набуває вигляду $F(2k_i, -2\omega_i) = 0$, звідки знаходимо, що $\omega_i = 1/4k_i$, а також

$$\eta_i = k_i(X - c_i T) + \alpha_i, \qquad c_i = 1/4k_i^2. \tag{2.3.26}$$

Без втрати загальності можна вважати $k_2 > k_1$, і тоді

$$b = \frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}\sqrt{\frac{k_1^2+k_2^2-k_1k_2}{k_1^2+k_2^2+k_1k_2}}. \tag{2.3.27}$$

Підставивши (2.3.24) в (2.3.14), одержуємо розв'язок рівняння (2.3.6). Згідно з Ходнетт (Hodnett) і Молоней (Moloney) [146,161], перепишемо $W(X,T)$ у вигляді

$$W = W_1 + W_2, \tag{2.3.28}$$

де $W_i = 6k_i(1 + \tanh g_i)$,

та

$$g_1(X,T) = \eta_1 + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+b^2e^{2\eta_2}}{1+e^{2\eta_2}}\right],$$

$$g_2(X,T) = \eta_2 + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+b^2e^{2\eta_1}}{1+e^{2\eta_1}}\right]. \qquad (2.3.29)$$

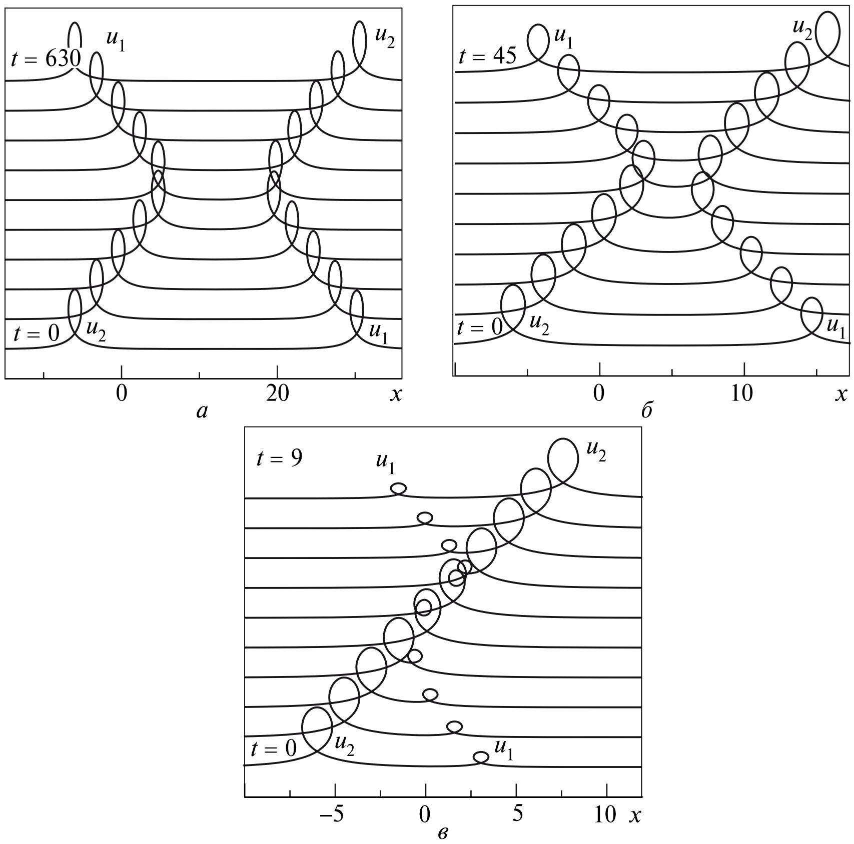

Рис. 2.4. Взаємодія двох солітонів: *а* — менший солітон під час взаємодії набуває зсуву фаз назад; *б* — менший солітон не має фазового зсуву; *в* — солітони набули зсуву фаз вперед

Тому U можна записати, як

$$U = U_1 + U_2, \tag{2.3.30}$$

де $U_i = 6k_i \dfrac{\partial g_i}{\partial X} \operatorname{sech}^2 g_i$. Петлеподібний двосолітонний розв'язок рівняння (2.2.2) визначають співвідношеннями

$$u(x,t) = U(t,T),\ x = \theta(t,T),\ \theta(X,T) = T + W(X,T) + x_0 \tag{2.3.31}$$

спільно з (2.3.28) і (2.3.30).

Взаємодіючи, два солітони проявляють особливості, які не властиві рівнянню KdV (рис. 2.4). Більший солітон з k_2, рухаючись з більшою швидкістю, наздоганяє менший з k_1, який рухається в тому самому напрямку. Виключно для зручності на рис. 2.4 показано взаємодію солітонів у системі координат, що рухається зі швидкістю центра мас. Після нелінійної взаємодії солітони розділяються, відтворюючи свою початкову форму. Єдиним результатом взаємодії залишається зсув фаз. Більший солітон завжди зсувається вперед. Навпаки, для малого солітону характерні три види фазового зсуву. Така властивість не є типовою для рівняння KdV. Виявляється, що існує спеціальне значення відношення $(k_1/k_2)^* = 0,88867$.

1. Для $(k_1/k_2) < (k_1/k_2)^*$ менший солітон під час взаємодії набуває фазового зсуву назад (рис. 2.4, *а*).
2. Для $(k_1/k_2) = (k_1/k_2)^*$ менший солітон не має фазового зсуву (рис. 2.4, *б*).
3. Для $(k_1/k_2) > (k_1/k_2)^*$ як більший, так і менший солітон має фазовий зсув вперед (рис. 2.4, *в*).

2.4 Еволюційне рівняння з дисипацією

Рівняння (2.2.2)

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\Big)u + u = 0$$

отримано за умови виключення з розгляду дисипативного члена з рівняння (2.1.12). Періодичні розв'язки на біжучих хвилях у цьому випадку мають форму петель. Як наголошувалося, наявність особливих точок, в яких похідні приймають нескінченне значення, істотно ускладнює дослідження отриманих розв'язків на стійкість. З особливими точками також пов'язані проблеми, якщо враховувати дисипацію. Важливо розглянути питання: чи існуватимуть розв'язки у вигляді петель, якщо враховувати дисипацію? Воно постає у зв'язку з тим, що в особливих точках дисипативний член прямує до безмежності. Цілком можливо, що введення дисипативності зруйнує петлеподібні розв'язки. Тут маємо на увазі такий відомий факт. Для простого нелінійного еволюційного рівняння без дисперсії і дисипації

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.4.1}$$

будь-який початковий гладкий розв'язок з граничними умовами

$$u|_{x\to+\infty} = 0, \qquad u|_{x\to-\infty} = u_0 = \mathrm{const} > 0 \tag{2.4.2}$$

врешті-решт стає неоднозначним. Якщо врахувати дисипативний член, то виходить відоме рівняння Бюргерса (Bürgers equation) [119]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2.4.3}$$

Відомо, що наявність дисипативного члена в рівнянні (2.3.3) приводить до того, що під час еволюції параметри хвилі ніколи не можуть стати неоднозначними. Цікаво, як впливатиме врахування дисипативного члена (2.2.3) на петлеподібні (неоднозначні) розв'язки? На відміну від рівняння Бюргерса (2.4.3), виявилось, і це буде доведено, що дисипативний член з α у рівнянні (2.2.3), який не перевищує деякого граничного значення α^*, не руйнує петлеподібні розв'язки.

Проаналізуємо вплив дисипації, виходячи з рівняння (2.2.3). Врахувавши перетворення змінних

$$z = u - v, \qquad \eta = x - vt, \qquad \tau = t, \tag{2.4.4}$$

перепишемо його у координатах, що рухаються зі швидкістю v:

$$z_{\tau\eta} + (zz_\eta)_\eta + (z + v) + \alpha z_\eta = 0. \tag{2.4.5}$$

Нас цікавить розв'язок на біжучих хвилях, тому покладемо $z_\tau = 0$, а отже

$$(zz_\eta)_\eta + (z + v) + \alpha z_\eta = 0. \tag{2.4.6}$$

Розглянемо поведінку розв'язків в околі особливих точок, де $z_\eta \to \pm\infty$. Тут $z = 0$, тому в рівнянні (2.4.6), нехтуючи членом z порівняно з v, маємо

$$(zz_\eta)_\eta + v + \alpha z_\eta = 0. \tag{2.4.7}$$

Зручно перейти до оберненої функції $\eta = \eta(z)$. Тоді $z_\eta = 1/\eta_z$ та $z_{\eta\eta} = -\eta_{zz}/\eta_z^3$, і рівняння (2.4.7) перепишемо у вигляді

$$-z\eta_{zz} + v\eta_z^3 + \alpha\eta_z^2 + \eta_z = 0.$$

Це рівняння можна проінтегрувати, ввівши позначення $q \equiv \eta_z$:

$$\int \frac{dq}{q(vq^2 + \alpha q + 1)} = \int \frac{dz}{z}. \tag{2.4.8}$$

Залежно від знака величини $1 - \alpha^2/4v$ останній вираз набуває різного значення. Введемо критичне значення α^* для параметра α за означенням

$$\alpha^* = 2\sqrt{v}. \tag{2.4.9}$$

Для $\alpha < \alpha^*$, тобто $(1 - \alpha^2/4v > 0)$, маємо

$$\ln\left[\frac{z^2}{q^2}(vq^2 + \alpha q + 1)\right] =$$

$$= -\frac{2\alpha}{\sqrt{4v - \alpha^2}}\ \tan^{-1}\frac{2vq + \alpha}{\sqrt{4v - \alpha^2}} + \ln c_1, \tag{2.4.10}$$

для $\alpha > \alpha^*$, тобто $1 - \alpha^2/4v < 0$, отримуємо

$$\ln\left[\frac{z^2}{q^2}(vq^2 + \alpha q + 1)\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 4v}} \ \ln\left|\frac{2vq + \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4v}}{2vq + \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4v}}\right| + \ln c_2. \qquad (2.4.11)$$

Проаналізуємо вираз (2.4.10). Спочатку перевіримо окремий випадок $\alpha = 0$, тоді

$$\frac{z^2}{q^2}(vq^2 + 1) = c_1,$$

або

$$vz^2 + \frac{1}{4}(z^2)^2_\eta = c_1,$$

тому маємо рівняння

$$\eta + \eta_0 = \pm\frac{1}{2}\int\frac{dz^2}{\sqrt{c_1 - vz^2}} = \mp\frac{\sqrt{c_1 - vz^2}}{v}.$$

Таким чином, повернулися до результату, коли за відсутності дисипації $\alpha = 0$ інтегральні криві в околі $z = 0$ проходять по еліпсу.

Далі дослідимо випадок $0 < \alpha < \alpha^*$. Легко помітити, що права частина (2.4.10) завжди обмежена при будь-яких значеннях $q \equiv z_\eta^{-1}$. Оскільки в околі точки $z = 0$ ця величина є близькою до значення

$$-\frac{2\alpha}{\sqrt{4v - \alpha^2}} \ \tan^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{4v - \alpha^2}} + \ln c_1 \equiv \ln c_3,$$

одержимо рівняння

$$\frac{z^2}{q^2}(vq^2 + \alpha q + 1) = c_3.$$

Навіть не інтегруючи останнього рівняння, легко побачити, що в точці $z = 0$ має бути $q = 0$, оскільки в загальному випадку $c_3 \neq 0$. Це означає, що похідні в точці $z = 0$ мають значення

$$\eta_z = 0, \qquad z_\eta = \pm\infty, \tag{2.4.12}$$

тобто розв'язок стає неоднозначним.

Для випадку $\alpha > \alpha^*$ існує розв'язок

$$z = 0, \qquad q = \eta_z \neq 0, \qquad z_\eta \neq \pm\infty. \tag{2.4.13}$$

Дійсно, при $z = 0$ з правої частини (2.4.11) випливає, що

$$q = \eta_z = -\frac{\alpha}{2v} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4v}}{2v} \neq 0. \tag{2.4.14}$$

Отже, похідна z_η у точці $z = 0$ обмежена скінченною величиною. Розв'язок завжди однозначний.

Простежимо за поведінкою розв'язку в околі $z = 0$, коли параметр $\alpha \to \alpha^*$. Спочатку розглянемо випадок $\alpha \to \alpha^* - 0$. Згідно з (2.4.10), права частина цього рівняння прямує до мінус нескінченності, тобто при $z \approx 0$ маємо $q = \eta_z \neq 0$. Отже, розв'язку у вигляді петлі за цієї умови не існує.

Коли $\alpha \to \alpha^* + 0$, також маємо розв'язок з $q = \eta_z \neq 0$. Здавалося б, що в цьому випадку можливий корінь $q = 0$ при $z = 0$, адже (2.4.11) переходить у вираз

$$\ln\left[\frac{z^2}{q^2}(vq^2 + \alpha q + 1)\right] = \frac{2\alpha}{2vq + \alpha} + \ln c_2. \tag{2.4.15}$$

Проте, як випливає з (2.4.14), знову ж права частина рівняння (2.4.15) прямує до нескінченності, тому з необхідністю має бути $q \neq 0$ при $z = 0$. Отже, для випадку $\alpha \to \alpha^*$ дисипація руйнує петлеподібні розв'язки.

Підсумуємо результати. Для значень $\alpha < \alpha^*$ інтегральна крива проходить по еліпсу в околі точки $z = 0$, тобто наявність дисипації до деяких граничних значень не руйнує петлеподібний розв'язок. Водночас для $\alpha \geq \alpha^*$ розв'язків з безмежним градієнтом не існує.

Рівняння KdV та KdVB використовують для опису багатьох хвильових процесів [57]. Як правило, у фізичних моделях при цьому розглядають низькочастотне наближення. Термодинамічні параметри середовища близькі до рівноважних. Стан мікрооб'єму визначають одним набором термодинамічних величин. Відхилення від рівноваги враховують за допомогою розкладу за градієнтами. В цьому випадку вдосконалення фізичних моделей приводить до необхідності враховувати члени, що містять все вищі похідні. Тут можна навести послідовність рівнянь: (2.4.1), рівняння Бюргерса (2.4.3), рівняння KdV і KdVB. Якщо рівняння (2.4.1) допускає неоднозначний розв'язок (або розв'язок з розривами), то вдосконалення моделей і врахування похідних вищого порядку виключає існування неоднозначних розв'язків. Отже, за такого підходу неоднозначність пов'язана з недосконалістю моделі.

На відміну від низькочастотного наближення, в моделях для опису високочастотних збурень в еволюційне рівняння необхідно включити інтегральні члени подібно до (2.2.3). Такі члени виникають як результат просторової або часової нелокальності у визначальних рівняннях [98]. Рівняння (2.2.1) може бути записано з інтегральним членом у формі рівняння Уізема (2.2.3). Інтегральний член містить передісторію процесу. Очевидно, що в такому записі дисипативний член αu з рівняння (2.2.3) не має просторової похідної. Як доведено вище, такий вигляд дисипативного члена допускає неоднозначні розв'язки. Неоднозначність трактують як сильне відхилення від рівноваги [102, 164]. В одному мікрооб'ємі існує декілька станів з різними термодинамічними параметрами [102].

Розділ 3

Хвилі в релаксівному двокомпонентному середовищі

Низка питань, розглянутих у цьому розділі, стосується моделювання хвильових течій в середовищі, що складається з рівномірно розподілених газового та конденсованого компонентів (тверді частинки, рідина тощо). Газосуспензії, піни, бульбашкові середовища належать до сумішей регулярної структури — це так звані дисперсні суміші.

Ефект зменшення ударної дії вибуху за поширення ударних хвиль у двофазних газорідинних середовищах становить особливий інтерес [31–33, 35, 36, 66, 67, 155, 200]. Аналіз цього явища показує, що ефективність середовища, як локалізатора дії вибуху, залежить від його здатності акумулювати енергію газового компонента в тепловій енергії конденсованої фази. Швидкість передачі енергії визначається складними фізико-хімічними процесами, пов'язаними із взаємодією обох фаз.

На цей час експериментальні дослідження всього розмаїття взаємодій між компонентами не можна вважати достатніми, оскільки невідомі детальні механізми міжфазної взаємодії, щоб їх удалося формалізувати в математичних моделях. Ми ж виходитимемо з того, що внутрішні процеси (детальний механізм яких невідомий) в кінцевому результаті впливають на поведінку середовища, як цілого. Вплив внутрішніх обмінних процесів на макропараметри досліджуватимемо на засадах релаксаційного підходу. Наслідком внутрішньої взаємодії є ефект релаксації макропараметрів. Водночас на середовище можуть діяти зовнішні чинники, наприклад, хвильове збурення, ударна хвиля, динамічне навантаження тощо. Середовище як динамічна система характеризується, з одного боку, часом релаксації, з іншого — часом поширення ударно-хвильових збурень. Розглянемо процеси, коли характерний час релаксації та характерний час зовнішнього впливу є величинами одного порядку. Незворотні втрати енергії газовою фазою (тиск якої визначає тиск усього середовища) через теплопередачу випромінюванням або контактним способом тощо значною мірою впливають на макропараметри ударних хвиль. Саме процеси, пов'язані з переходом енергії з одного виду, що визначає тиск середовища, в інший, внесок якого в загальний тиск суттєво менший, є важливими під час загасання ударних хвиль. Такі різноманітні процеси розглянуто з єдиної позиції, а саме теплової релаксації.

3.1 Асимптотична усереднена модель суміші з тепловою релаксацією

Розглянемо визначальні властивості динамічної поведінки середовищ з тепловою релаксацією при математичному моделюванні, виходячи з таких припущень. Конденсована фаза, як вважають, не дає внеску в тиск, і тиск середовища визначається тільки газовим компонентом. Газовою фазою в загальному випадку є релаксівний газ. Для конденсованого компонента також характерні релаксаційні властивості.

Удосконалимо асимптотичну усереднену модель, знявши обмеження, накладені баротропним середовищем (див. розд. 1. Розглянемо одновимірні рухи довільної симетрії, тобто хвилі пласкі ($\nu = 1$), циліндричні ($\nu = 2$) та сферичні ($\nu = 3$).

Основні гідродинамічні рівняння для опису нестаціонарних одновимірних рухів двофазного середовища необхідно записати в змінних Лагранжа (l, t). Спочатку запишемо рівняння руху для окремого компонента [63]

$$\frac{\partial r^\nu}{\partial l^\nu} = \frac{V}{V_0}, \tag{3.1.1}$$

$$u = \frac{\partial r}{\partial t}, \tag{3.1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_0 \left(\frac{r}{l}\right)^{\nu-1} \frac{\partial p}{\partial l} = 0, \tag{3.1.3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{V_0 p}{l^{\nu-1}} \frac{\partial r^{\nu-1} u}{\partial l} = 0. \tag{3.1.4}$$

Рівняння неперервності (3.1.1) можна записати в альтернативній формі

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \nu V_0 \frac{\partial r^{\nu-1} u}{\partial l^\nu} = 0. \tag{3.1.5}$$

Тут позначення є загальноприйнятими.

Зробимо важливе зауваження. Початково розглядатимемо середовище, що складається з періодичних прошарків окремих компонентів. У разі циліндричної та сферичної симетрій потоку прошарки мають, як вважається, відповідну симетрію. Для довгих хвиль це обмеження не має принципового значення, як і для плаской симетрії (див. підрозд. 1.2). Як виявиться у підсумку, важливим є тільки однорідний розподіл обох компонентів за об'ємом, тобто концентрація компонентів.

Як і раніше, розглянемо довгохвильові збурення, а на контактах прошарків виставимо умови узгодження масових швидкостей і напружень

$$[u] = 0, \qquad [p] = 0. \tag{3.1.6}$$

Тут зручно використати безрозмірні змінні. Аналогічно, як і в підрозділі 1.1, рівняння (3.1.1)—(3.1.5) приводимо до безрозмірних змінних, причому запис отриманих безрозмірних рівнянь за виглядом не відрізняється від початкових рівнянь. Тому вважатимемо, що рівняння (3.1.1)—(3.1.5) записано в безрозмірних змінних.

Виведемо систему усереднених рівнянь руху за асимптотичним методом усереднення. Розіб'ємо просторову масову координату $m = l^\nu/V_0$ на повільну s і швидку ξ змінні, а саме $m = s+\varepsilon\xi$. Залежні змінні подамо у вигляді рядів

$$\begin{aligned}
&r^\nu(m,t) = (r^\nu)^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon(r^\nu)^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2(r^\nu)^{(2)}(s,t,\xi) + \dots \ , \\
&V(m,t) = V^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon V^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 V^{(2)}(s,t,\xi) + \dots \ , \\
&p(m,t) = p^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon p^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 p^{(2)}(s,t,\xi) + \dots \ , \\
&u(m,t) = u^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon u^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 u^{(2)}(s,t,\xi) + \dots \ , \\
&E(m,t) = E^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon E^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 E^{(2)}(s,t,\xi) + \dots \ .
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Відповідно до методу асимптотичного усереднення, в цих співвідношеннях усі функції з правого боку вважають періодичними. Частинна похідна за часом не змінюється, а за просторовою координатою перетворюється за формулою

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial s} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{3.1.8}$$

Тут проаналізуємо тільки рівняння для імпульсу. Співвідношення (3.1.7) і (3.1.8) підставляємо в початкові рівняння та прирівнюємо коефіцієнти при рівних степенях ε до нуля. Для коефіцієнтів при ε^{-1} отримуємо

$$\frac{\partial (r^\nu)^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial (r^\nu)^{(0)} u^{(0)}}{\partial \xi} = 0. \tag{3.1.9}$$

Отже, в нульовому порядку масова швидкість $u^{(0)}$, тиск $p^{(0)}$ та ейлерова координата $(r^\nu)^{(0)}$ не залежать від швидкої змінної ξ.

Крім того, з рівняння (3.1.3) для коефіцієнтів при ε^{+0} випливає

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}+\nu(r^{\nu-1})^{(0)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial s}+\nu(r^{\nu-1})^{(1)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi}+\nu(r^{\nu-1})^{(0)}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi}=0. \tag{3.1.10}$$

Усереднивши на періоді $\langle\cdot\rangle=\int_0^1(\cdot)d\xi$, з одного боку, маємо одне з шуканих рівнянь

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}+\nu(r^{\nu-1})^{(0)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial s}=0, \tag{3.1.11}$$

оскільки $\left\langle\dfrac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi}\right\rangle=0$ в силу періодичності $p^{(0)}$ за ξ, а з іншого — отримуємо

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi}=0,$$

віднявши рівняння (3.1.11) від рівняння (3.1.10). Отже, $p^{(1)}$ також не залежить від ξ.

Проробивши описану процедуру для початкових рівнянь (3.1.1)—(3.1.4), легко записати їх в усереднених змінних:

$$\frac{\partial (r^{\nu})^{(0)}}{\partial s}=\left\langle V^{(0)}\right\rangle, \tag{3.1.12}$$

$$u^{(0)}=\frac{\partial r^{(0)}}{\partial t}, \tag{3.1.13}$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}+\nu(r^{\nu})^{(0)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial s}=0, \tag{3.1.14}$$

$$\frac{\partial\left\langle E^{(0)}\right\rangle}{\partial t}+\nu p^{(0)}\frac{\partial (r^{\nu-1})^{(0)}u^{(0)}}{\partial s}=0. \tag{3.1.15}$$

Рівняння (3.1.5) набуває вигляду

$$\frac{\partial\left\langle V^{(0)}\right\rangle}{\partial t}-\nu\frac{\partial (r^{\nu-1})^{(0)}u^{(0)}}{\partial s}=0. \tag{3.1.16}$$

Систему рівнянь зведено до усереднених змінних. Очевидно, що тільки $V^{(0)} = V^{(0)}(\xi)$ та $E^{(0)} = E^{(0)}(\xi)$ змінюються на періоді. У подальшому використовуватимемо тільки нульове наближення за ε, тому верхній індекс (0) опускаємо.

Тепер можна переписати отриману усереднену систему рівнянь руху (3.1.12) – (3.1.16) з лагранжевих повільних координат (s, t) в ейлерові повільні координати (r, t_E). Процедуру, описану в підрозд. 1.3, можна поширити на одновимірний рух довільної симетрії і знайти, що перетворення між системами координат набуває вигляду

$$dr^\nu = \langle V\rangle\, ds + \nu u r^{\nu-1} dt, \qquad t_E = t. \tag{3.1.17}$$

Остаточно усереднені рівняння руху в повільних координатах Ейлера $r^\nu = s\langle V_0\rangle$ приймають вигляд (індекс E в t_E опускаємо)

$$\frac{\partial \langle V\rangle^{-1}}{\partial t} - \frac{1}{r^{\nu-1}} \frac{\partial r^{\nu-1} \langle V\rangle^{-1} u}{\partial r} = 0, \tag{3.1.18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \langle V\rangle \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{3.1.19}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}\right)\langle E\rangle + \frac{p}{r^{\nu-1}}\frac{\partial r^{\nu-1} u}{\partial r} = 0. \tag{3.1.20}$$

Отже, рівняння руху зведено до термінів середніх величин p, u, $\langle V\rangle$, $\langle E\rangle$. Звернімо увагу на те, що, як показано нижче, структура середовища явно врахована лише через рівняння стану, оскільки його не вдається звести тільки до середніх змінних p, u, $\langle V\rangle$, $\langle E\rangle$.

Потрібно ще раз зазначити, що на цьому етапі можна зняти обмеження, пов'язане з вимогою строгої періодичності в структурі середовища. Довжина хвилі така велика, що покриває багато періодів (див. рис. 1.1). У вибраному нами наближенні тиск p і масова швидкість u не змінюються на періоді.

Виключно для конкретизації викладок розглянемо два сусідні сегменти для випадку циліндричної симетрії руху. Як зазначено вище, структура середовища повинна мати також циліндричну симетрію, і, як доведено вище, справедливими є усереднені рівняння руху (3.1.12)—(3.1.16). Тепер уявімо собі, що в одному із сегментів початкову структуру змінили так, що період став удвічі меншим. Очевидно, що параметри довгохвильових збурень у ньому не змінилися. Отже, не виникає рухів по радіальній складовій, оскільки на контакті вибраних сегментів тиск і масові швидкості збігаються попарно. Вибравши дані сегменти як завгодно малими, доходимо висновку, що усереднені рівняння є справедливими для середовищ зі сталою концентрацією компонентів (статистично однорідний розподіл концентрацій компонентів).

3.2 Динамічне рівняння стану для суміші з тепловою нерівновагою

Під впливом зовнішніх чинників (наприклад, навантаження чи поширення хвиль) у середовищі на мікрорівні рівновага буде порушена. Відхилення на мікрорівні системи від рівноважного стану впливає на макропараметри. В цьому полягає суть релаксації, яка приводить до того, що зв'язок між макропараметрами не є однозначним, а залежить від відхилення стану мікрооб'єму від рівноваги.

Особливий інтерес до ударних хвиль у газорідинних сумішах пов'язаний із експериментально знайденим ефектом загасання ударно-хвильових збурень у таких середовищах. Акцентуємо увагу на внутрішніх процесах, що забезпечують передачу енергії з одного виду, який визначає тиск середовища, в інший, внесок якого в тиск несуттєвий. Внаслідок наявності внутрішніх обмінних процесів зв'язок між внутрішньою енергією, тиском і питомим об'ємом (рівняння стану) неоднозначний. Для газорідинних сумішей в припущенні одношвидкісного наближення рівняння стану вдається обґрунтувати з єдиних позицій теплової релаксації.

Зручно записати рівняння стану для кожного окремого компонента у вигляді залежності питомої енергії на одиницю маси E від тиску p та питомого об'єму $E = E(p, V)$. Скористаємося газоподібним записом цього співвідношення

$$E = \frac{pV}{\gamma - 1}. \tag{3.2.1}$$

Такий запис з успіхом можна застосувати як для газового компонента, так і для конденсованого. В цілому вважаємо, що і газ, і конденсована фази — релаксівні. Виведемо динамічне рівняння стану двофазної суміші за наявності теплової нерівноваги між фазами [31, 33, 35, 36, 200]. Для одношвидкісної моделі існує два граничні випадки: *а*) повна рівновага між фазами; *б*) повна відсутність теплообміну між фазами. Введемо позначення для швидкоплинних і повільних процесів для обох компонентів:

для газового

$$E_g = \frac{pV}{\gamma_{gf} - 1}, \quad \tau_{Eg}\omega \gg 1, \quad E_g = \frac{pV}{\gamma_{ge} - 1}, \quad \tau_{Eg}\omega \ll 1, \tag{3.2.2}$$

для конденсованого

$$E_s = \frac{pV}{\gamma_{sf} - 1}, \quad \tau_{Es}\omega \gg 1, \quad E_s = \frac{pV}{\gamma_{se} - 1}, \quad \tau_{Es}\omega \ll 1. \tag{3.2.3}$$

Виходячи з формалізму [106, 107], для кожного з двох компонентів можна записати динамічне рівняння стану за аналогією з підрозд. 1.1

$$\tau_{Ei}\frac{d}{dt}\left(E - \frac{pV}{\gamma_{if} - 1}\right) + \left(E - \frac{pV}{\gamma_{ie} - 1}\right) = 0, \qquad i = g,\, s. \tag{3.2.4}$$

Зрозуміло, що при $\tau_{Ei}\omega \gg 1$ та $\tau_{Ei}\omega \ll 1$ маємо відповідні рівняння (3.2.2), (3.2.3). Процедура асимптотичного усереднення приводить до динамічного рівняння стану, що описує теплову релаксацію в суміші:

$$d\left\langle E\right\rangle = -dp\left\langle \frac{V}{\gamma_f - 1}\right\rangle - \left\langle \frac{E}{\tau_E}\right\rangle dt - p\left\langle \frac{V}{\tau_E(\gamma_e - 1)}\right\rangle dt. \tag{3.2.5}$$

Отже, динамічне рівняння стану не зводиться загалом тільки до змінних p, u, $\langle V\rangle$, $\langle E\rangle$.

Однак для окремого випадку вдається суттєво спростити динамічне рівняння стану (3.2.5) — для двокомпонентного середовища, що утримує газовий і нестисливий компоненти. Дійсно, $\gamma_{sf} = \gamma_{se} = 1$, тому τ_{Es} можна взяти довільним, зручно визначити $\tau_{Es} = \tau_{Eg} = \tau_E$. Якщо припустити, що газова фаза віддає тепло в деякий внутрішній резервуар, то теплоємність газового компонента не є сталою величиною, тобто газ — релаксівний. Ми розуміємо, що таким резервуаром є конденсована фаза, яка, з одного боку, — нестислива, з іншого — парціальний тиск її безмежно малий. Зазначимо, що для газовмісної суміші параметр

$$\Gamma_0 = \gamma \frac{\sigma_g + \sigma_s c/c_{pg}}{\sigma_g + \gamma\sigma_s c/c_{pg}} \tag{3.2.6}$$

близький до одиниці, але ніколи їй не дорівнює. Для зручності запису тут і надалі перепозначимо $\Gamma_0 = \gamma_{ge}$ та $\gamma = \gamma_{gf}$; σ_s і c — масовий вміст і теплоємність конденсованого компонента, σ_g і c_p — масовий вміст і теплоємність за сталого тиску газової фази відповідно. З виразу (3.2.6) випливає, що зменшення Γ_0 відповідає збільшенню або концентрації конденсуючої фази σ_s або її теплоємності c_p за інших рівних умов.

Тепер зведемо динамічне рівняння стану для суміші (3.2.5) до вигляду

$$\tau_E \frac{d}{dt}\left[\langle E\rangle - \frac{p\langle V\rangle(1-\varepsilon)}{\gamma - 1}\right] + \left[\langle E\rangle - \frac{p\langle V\rangle(1-\varepsilon)}{\Gamma_0 - 1}\right] = 0, \tag{3.2.7}$$

де ε — об'ємний вміст конденсованої фази, який однозначно визначимо через $\langle V\rangle$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\langle V_0\rangle}{\langle V\rangle}. \tag{3.2.8}$$

Рівняння (3.2.7) описує нерівноважний перехід системи із стану

$$\langle E\rangle = \frac{p\langle V\rangle(1-\varepsilon)}{\gamma - 1} + \mathrm{const} \tag{3.2.9}$$

у стан

$$\langle E \rangle = \frac{p\langle V \rangle(1-\varepsilon)}{\Gamma_0 - 1}. \tag{3.2.10}$$

Зазначимо, що рівноважне рівняння стану для суміші (3.2.10) уперше вивів Г. Рудінгер [97, 179, 180].

Отже, доповнивши рівняння (3.2.7) рівняннями (3.1.18)—(3.1.20), отримаємо замкнену систему рівнянь. Для цієї системи диференційних рівнянь залежно від задачі, яку потрібно дослідити, задають початкові та граничні умови.

Запропонована асимптотична усереднена модель дає змогу проаналізувати вплив процесів релаксацій на поширення хвиль у газорідинних середовищах.

3.3 Подібність потоків газу та газовмісного середовища

Проаналізуємо вплив об'єму нестисливого компонента на хвильові рухи. Знайдемо перетворення між визначальними рівняннями для ідеального газу і двофазного середовища з довільним об'ємним вмістом конденсованої фази. Доведемо, що рух двофазного середовища в перетвореній системі координат з визначеною точністю подібний до руху ідеального газу, що дає змогу використовувати відомі методи газодинаміки ідеального газу для розв'язання ударно-хвильових задач. На прикладі задачі про сильну стадію вибуху в двофазному середовищі продемонстровано можливості розробленого методу.

Порівняємо рухи ідеального газу і двокомпонентного середовища, яке складається зі стисливого та нестисливого компонентів. Відомо [5, 86, 97], що коли об'ємна частка конденсованої фази мала, рух двофазного середовища подібний до руху ідеального газу в межах одношвидкісної моделі. Якщо не обмежувати розгляд об'ємною часткою конденсованої фази, то основні гідродинамічні рівняння міститимуть цю величину як додаткову змінну в газодинамічних рівняннях. Це значно ускладнює розв'язування гідродинамічних рівнянь і потребує розвитку методів, наведених, наприклад, у статтях [174, 186]. Зосередимося на перетворенні системи рівнянь ідеального газу в систему рівнянь двофазного середовища з будь-яким об'ємом конденсованої фази. Завдяки такому зв'язку методи, які розвинуті для ідеального газу, можуть бути використані для розв'язування хвильових задач двокомпонентних середовищ.

3.3.1 Система рівнянь у лагранжевих координатах

Розглянемо двофазне середовище, яке складається з рівномірно розподіленого в газовій фазі конденсованого компонента, що займає довільний об'єм ε. На першому етапі вважаємо середовище нерелаксівним. Припустимо такі умови: а) конденсована фаза нестислива; б) газ задовольняє рівнянню стану ідеального газу; в) швидкості конденсованої фази й газу дорівнюють одна одній. Закони збереження маси, імпульсу та енергії для одновимірних рухів у лагранжевих координатах набувають вигляду (3.1.12)–(3.1.15)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial r^\nu}{\partial s} = \langle V \rangle \,, \\
&u = \frac{\partial r}{\partial t}, \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + \nu r^\nu \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \\
&\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} + \nu p \frac{\partial r^{\nu-1} u}{\partial s} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

Для зручності викладок введемо нові позначення для незалежних змінних: $t \to \tau$, $s \to \zeta / v_0$, а також $\langle V \rangle \to v$. Параметр ν, який визначає симетрію двофазного потоку, приймає значення 1, 2 або 3 відповідно для плаской, циліндричної або сферичної симетрій. Інші позначення є загальновживаними. Індекс 0 позначає величини в незбуреному середовищі. Зауважимо, що ейлерова просторова координата $r = r(\zeta, \tau)$ — залежна змінна. В межах прийнятих припущень рівняння стану двофазного середовища, згідно з публікаціями [97, 155, 174], запишемо у вигляді

$$\langle E\rangle = \frac{pv\,(1-\varepsilon)}{\gamma - 1}. \tag{3.3.2}$$

Звернімо увагу, що рівняння стану (3.3.2) не збігається з рівнянням стану ідеального газу з конкретним ефективним показником адіабати та містить об'ємну частку конденсованої фази як додаткову змінну:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{v_0}{v}. \tag{3.3.3}$$

Для адіабатичного потоку ($\gamma = \mathrm{const}$) рівняння енергії (3.3.2) зведемо до вигляду [63]

$$\left(\frac{\partial p\,(v - \varepsilon_0 v_0)^\gamma}{\partial \tau}\right)_\zeta = 0. \tag{3.3.4}$$

Отже, замкнена система рівнянь складається з перших трьох рівнянь (3.3.1) і рівнянь (3.3.3), (3.3.4).

Зазначимо, що співвідношення між ейлеровою r і лагранжевою просторовими ζ координатами має вигляд

$$dr = \frac{\zeta^{\nu-1}}{r^{\nu-1}} \frac{v}{v_0} d\zeta + u d\tau. \tag{3.3.5}$$

Покажемо, що для стаціонарних (з певною точністю і для автомодельних) потоків можна знайти нові змінні, в яких усі рівняння повністю подібні до рівнянь ідеального газу та явно не залежать від ε. Для таких потоків знайдемо зв'язок (перетворення) між старими нештрихованими (двофазне середовище) та новими штрихованими (ідеальний газ) змінними.

Такі фізичні аргументи дають підґрунтя для виключення об'єму конденсованої фази з рівнянь (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4). Дійсно, якщо об'єм конденсованої фази не змінюється, тобто збурення в ній передається миттєво (умова а)), і вона не дає внеску в тиск (умова б)) та рухається разом з газовою фазою (умова в)), то можна сподіватися, що виключення об'єму, який займає конденсована фаза, повинно значно спростити математичний опис руху.

3.3.2 Подібність стаціонарних рухів газу та двофазного середовища

Приведемо початкову систему рівнянь (3.3.1)–(3.3.4) до системи рівнянь, яка описує ідеальний газ (змінні позначено штрихом):

$$\begin{gathered}\left(\frac{r'}{\zeta'}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial r'}{\partial \zeta'}\right)_{\tau'}=\frac{v'}{v'_0},\quad u'=\left(\frac{\partial r'}{\partial \tau'}\right)_{\zeta'},\\ \left(\frac{\partial u'}{\partial \tau'}\right)_{\zeta'}+v'_0\left(\frac{r'}{\zeta'}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial p'}{\partial \zeta'}\right)_{\tau'}=0,\quad \left(\frac{\partial p'(v')^{\gamma}}{\partial \tau'}\right)_{\zeta'}=0.\end{gathered} \tag{3.3.6}$$

Для цієї системи рівнянь зв'язок між ейлеровою і лагранжевою просторовими координатами набуває вигляду

$$dr'=\left(\frac{\zeta'}{r'}\right)^{\nu-1}\frac{v'}{v'_0}d\zeta'+u'd\tau'. \tag{3.3.7}$$

Одна з ключових вимог полягає в тому, що час має бути однаковим в усіх системах координат, тобто $t=\tau=\tau'$.

Хвилі в нестисливому компоненті поширюються з безмежно великою швидкістю. Отже, об'єм цієї фази може бути виключено, тоді зв'язок між рівняннями (3.3.4) та (3.3.6) матиме вигляд

$$v'=v-\varepsilon_0 v_0, \tag{3.3.8}$$

$$p'=p. \tag{3.3.9}$$

Співвідношення (3.3.8) показує, що частину об'єму, яку займає нестислива фаза, виключено, а всю масу розподілено рівномірно на весь об'єм, що залишився.

Порівнявши рівняння неперервності між собою, тобто перші рівняння системи (3.3.1) та системи (3.3.6), маємо задовольнити вимозі

$$\varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)\left(\frac{r'}{\zeta'}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial r'}{\partial \zeta'}\right)_{\tau'} = \left(\frac{r}{\zeta}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right)_{\tau}. \quad (3.3.10)$$

Також потрібно узгодити рівняння імпульсу, які після деяких перетворень набувають вигляду

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_{\zeta} - \gamma p_0 \left(\frac{r}{\zeta}\right)^{\nu-1}\left(\frac{v_0'}{v'}\right)^{\gamma+1}\frac{1}{1-\varepsilon_0}\left(\frac{\partial v'}{\partial \zeta}\right)_{\tau} = 0, \quad (3.3.11)$$

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial \tau'}\right)_{\zeta'} - \gamma p_0' \left(\frac{r'}{\zeta'}\right)^{\nu-1}\left(\frac{v_0'}{v'}\right)^{\gamma+1}\left(\frac{\partial v'}{\partial \zeta'}\right)_{\tau'} = 0. \quad (3.3.12)$$

Скористаємося підказкою, яку дає перетворення між системами рівнянь в ейлерових координатах для плаского випадку ($\nu = 1$) [32, 35, 67]. Ключове співвідношення між незалежними (в ейлерових координатах) просторовими змінними має вигляд (1.6в) з публікації [35]:

$$dr' = (1-\varepsilon)dr + \varepsilon u dt. \quad (3.3.13)$$

Зібравши разом члени з ε та скориставшись виразом (3.3.5), отримуємо співвідношення $\varepsilon dr - \varepsilon u dt = \varepsilon_0 d\zeta$. Підказка (3.3.13) вказує на те, що зв'язок між штрихованою та нештрихованою системами рівнянь, можливо, має вигляд

$$r'^{\nu-1}dr' = r^{\nu-1}dr - \varepsilon_0 \zeta^{\nu-1}d\zeta. \quad (3.3.14)$$

У такий спосіб ми задовольняємо важливу умову: величина dr' є повним диференціалом, що, в свою чергу, дає змогу переписати співвідношення (3.3.14) в інтегральному вигляді

$$r'^{\nu} = r^{\nu} - \varepsilon_0 \zeta^{\nu}. \quad (3.3.15)$$

Безпосередньо з (3.3.14) випливає зв'язок між масовими швидкостями

$$r'^{\nu-1}u' = r^{\nu-1}u. \quad (3.3.16)$$

Прямою підстановкою цього співвідношення перевіряємо вимогу (3.3.10), яка зводиться до перетворення

$$\zeta'^{\nu} = (1 - \varepsilon_0)\zeta^{\nu}. \tag{3.3.17}$$

Перетворивши рівняння (3.3.11), маємо нове рівняння, яке крім усіх членів рівняння (3.3.12) містить додатковий член, а саме

$$u' \left(\frac{r'}{r}\right)^{\nu-1} \left(\frac{\partial (r/r')^{\nu-1}}{\partial \tau}\right)_{\zeta}. \tag{3.3.18}$$

Для всіх пласких потоків ($\nu = 1$) додатковий член (3.3.18) відсутній. Крім того, для ($\nu \neq 1$) позбутися додаткового члена можна, розглянувши стаціонарні потоки. Іншими словами, можна стверджувати, що не тільки для пласких потоків, а й для циліндричної та сферичної симетрій стаціонарний рух двофазного середовища повністю подібний до стаціонарного руху газу.

Нижче детально проаналізовано перетворення (3.3.8), (3.3.9), (3.3.15)–(3.3.17) між системами рівнянь (3.3.1)–(3.3.4) для автомодельних рухів з метою оцінити похибку, яку вносить член (3.3.18).

3.3.3 Автомодельні потоки з ударними хвилями

Зазначений вище метод надає певні переваги для розв'язування автомодельних задач. Застосуємо метод для розв'язування задачі про сильну стадію вибуху в двофазному середовищі. Нехай певна кількість енергії E_0 миттєво виділяється в безмежно малому об'ємі двофазного середовища. Обмежившись розглядом відстаней поширення ударних хвиль, за яких ще можна знехтувати початковою внутрішньою енергією середовища порівняно з E_0, проаналізуємо поширення ударної хвилі. Її швидкість визначимо як

$$D = \frac{dr_f}{dt}, \tag{3.3.19}$$

де r_f — координата фронту ударної хвилі; $r_f = r_f(t)$ є функцією тільки часу. Зазначимо, що $\zeta_f = r_f$.

Визначимо нові незалежні змінні для систем рівнянь, що описують двофазний потік (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4):

$$\begin{aligned} &P = v_0 p/D^2, \quad U = u/D, \quad \mathcal{V} = v/v_0, \quad \mu = \zeta/\zeta_f, \\ &\eta = r/\zeta_f, \quad \chi = \zeta_f/\tau_0 D, \quad z = \frac{\zeta_f}{D^2}\frac{dD}{d\tau}, \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

а також газ (3.3.6):

$$\begin{aligned} &P' = v_0' p'/D'^2, \;\; U' = u'/D', \quad \mathcal{V}' = v'/v_0', \;\; \mu' = \zeta'/\zeta_f', \\ &\eta' = r'/\zeta_f', \;\; \chi' = \zeta_f'/\tau_0 D', \;\; z' = \frac{\zeta_f'}{D'^2}\frac{dD'}{d\tau'}, \;\; D' = \frac{d\zeta_f'}{d\tau}. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Із співвідношення (3.3.15) маємо

$$r_f'^{\,\nu} = (1-\varepsilon_0) r_f^{\,\nu}, \qquad r_f'^{\,\nu-1} D' = (1-\varepsilon_0) r_f^{\,\nu-1} D. \tag{3.3.22}$$

На стадії сильної ударної хвилі за фронтом реалізується автомодельний потік, тобто похідні за χ дорівнюють нулю, а величина $z = z' = -\nu/2$ [63, 100, 174, 186]. Тоді можна переписати системи рівнянь так:
для двофазного середовища

$$\begin{aligned} &\frac{\eta^{\nu-1}}{\mu^{\nu-1}}\frac{d\eta}{d\mu} = \mathcal{V}, \quad zU - \mu\frac{dU}{d\mu} + \frac{\eta^{\nu-1}}{\mu^{\nu-1}}\frac{dP}{d\mu} = 0, \\ &P\left(\mathcal{V} - \varepsilon_0\right)^{\gamma} \mu^{\nu} = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

з граничними умовами

$$U = P = \frac{2(1-\varepsilon_0)}{\gamma+1}, \qquad \mathcal{V} = \frac{\gamma - 1 + 2\varepsilon_0}{\gamma+1};$$

для газу

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\eta'}{\mu'}\right)^{\nu-1}\frac{d\eta'}{d\mu'} = \mathcal{V}', \quad z'U' - \mu'\frac{dU'}{d\mu'} + \left(\frac{\eta'}{\mu'}\right)^{\nu-1}\frac{dP'}{d\mu'} = 0, \\ &P'\mathcal{V}'^{\gamma}\mu'^{\nu} = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

з граничними умовами

$$U' = P' = \frac{2}{\gamma + 1}, \qquad \mathcal{V}' = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

Перетворення (3.3.8), (3.3.9), (3.3.15)–(3.3.17) легко зводяться до безрозмірного вигляду

$$(1 - \varepsilon_0)\,\mathcal{V}' = \mathcal{V} - \varepsilon_0,\ (1 - \varepsilon_0)\,P' = P,\ (1 - \varepsilon_0)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\nu - 1} U' = U,$$

$$\eta^{\nu} = (1 - \varepsilon_0)\eta'^{\nu} + \varepsilon_0 \mu^{\nu},\ \mu = \mu'. \tag{3.3.25}$$

Виявляється, що навіть для автомодельного руху з ударною хвилею (на відміну від стаціонарних рухів) не вдалося знайти тотожне перетворення між системами (3.3.22) і (3.3.23), тобто для $\nu \neq 1$ існує різниця між системою, яка виникає з (3.3.23) за допомогою перетворення (3.3.25), та системою (3.3.22). Дійсно, перетворена система рівнянь містить додатковий член

$$U'\eta' \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\nu - 1} \frac{d(\eta/\eta')^{\nu - 1}}{d\eta}.$$

На прикладі задачі про точковий вибух оцінимо похибку, яку вносить додатковий член. Безрозмірні питомий об'єм $\mathcal{V}$, швидкість U і тиск P були обчислені двома методами. По-перше, систему рівнянь (3.3.23) розв'язано для деяких конкретних значень ε_0, по-друге, змінні $\mathcal{V}$, U, P знайдено за допомогою перетворення (3.3.25) з розв'язку системи рівнянь для газу (3.3.24).

Результати числових розрахунків для сильної стадії вибуху представлено на рис. 3.1—3.4. Для наочності їх порівняння скористаємося безрозмірною густиною замість безрозмірного питомого об'єму $R = \mathcal{V}^{-1}$. На рис. 3.1—3.4 криві *1*, *1'* стосуються газу ($\varepsilon_0 = 0$, $\gamma = 1,4$), криві *2*, *2'* й *3*, *3'* — двофазного середовища з $\varepsilon_0 = 0,1$; $\gamma = 1,1$ та $\varepsilon_0 = 0,5$; $\gamma = 1,005$ відповідно. Майже повний збіг значень спостерігається для U, R, отриманих двома методами. Розрахункові різниці для цих величин настільки малі, що їх не видно на рисунках. Водночас найбільша похибка

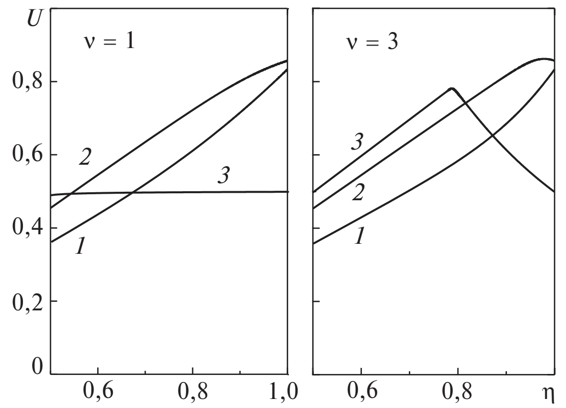

Рис. 3.1. Профілі безрозмірної швидкості. Точні та наближені розв'язки повністю збігаються

з'являється для P (див. рис. 3.3) за сферичної симетрії. Звернімо увагу на те, що для кривих *3*, *3′* початкова об'ємна частка $\varepsilon_0 = 0,5$. Це означає, що половину початкового об'єму займає конденсована фаза. Видно, що навіть за такого великого об'єму, який займає нестисливий компонент, найбільша розбіжність не перевищує 15 %. Отже, розв'язок задачі про сильну стадію вибуху в перетвореній системі координат зводиться до розв'язку системи рівнянь (3.3.24) (тут можна скористатися відомими автомодельними розв'язками і табличними даними, наприклад із праць [63, 100], а потім, застосувавши перетворення (3.3.25), оцінити U, P, $\mathcal{V}$).

Вплив об'ємної частки конденсованої фази ε_0 на закони руху ударної хвилі і величину параметрів на ударному фронті встановити аналітично досить просто, не вдаючись до знаходження розподілів U, P, $\mathcal{V}$ [200]. Достатньо простежити за балансом енергії в об'ємі, що охоплює середовище за ударним фронтом:

$$E_0 = \sigma(\nu) \int\limits_0^{r_f} \left(\frac{p(1-\varepsilon)}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2} \right) r^{\nu-1} dr, \tag{3.3.26}$$

де $\sigma(\nu) \equiv 2(\nu-1)\pi + (\nu-2)(\nu-3)$. З цією метою запишемо рівняння (3.3.26) за допомогою виразу (3.3.25) у вигляді

$$\begin{aligned} E_0 &= \sigma(\nu)\rho_0 D^2 r_f^\nu \int\limits_0^1 \left(\frac{P(1-\varepsilon)}{\gamma-1} + R\frac{\mathcal{V}^2}{2} \right) (\eta)^{\nu-1} d\eta = \\ &= \sigma(\nu)\rho_0 D^2 r_f^\nu \frac{(1-\varepsilon_0)^2}{\gamma-1} \int\limits_0^1 \left(P' + \frac{\gamma-1}{2} R'(\mathcal{V}')^2 \right) (\eta')^{\nu-1} d\eta'. \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

Використавши методи теорії розмірності, отримаємо рівняння траєкторії ударної хвилі

$$\begin{aligned} r_f &= \left(\frac{E_0}{\alpha\rho_0}\right)^{1/(\nu+2)} \left(\frac{\tau}{1-\varepsilon_0}\right)^{2/(\nu+2)}, \\ D &= \frac{2}{(\nu+2)(1-\varepsilon_0)} \sqrt{\frac{E_0}{\alpha\rho_0}}\, r_f^{-\nu/2}, \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

$$\alpha = \frac{4\sigma(\nu)\psi}{(\nu+2)(\gamma-1)}, \quad \psi = \int\limits_0^1 \left(P' + \frac{\gamma-1}{2} R'(\mathcal{V}')^2 \right) (\eta')^{\nu-1} d\eta'.$$

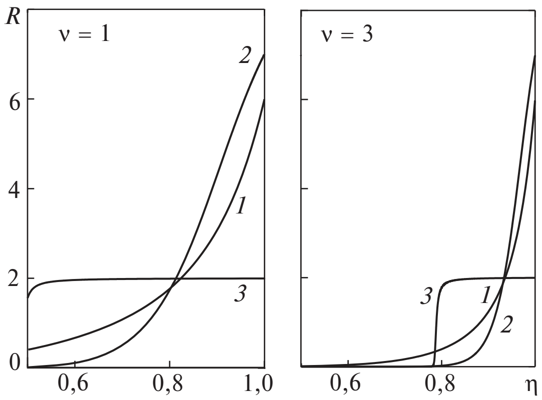

Рис. 3.2. Профілі безрозмірної густини $R = \mathcal{V}^{-1}$. Точні та наближені розв'язки повністю збігаються

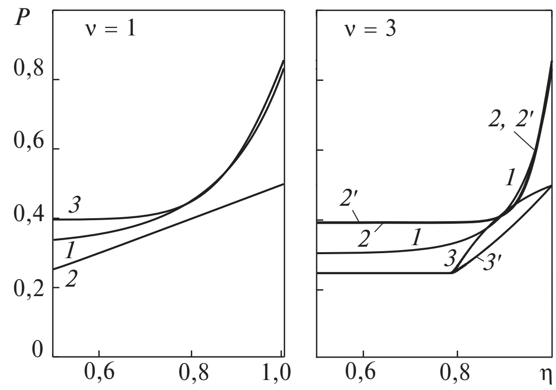

Рис. 3.3. Профілі безрозмірного тиску: *1* — газове середовище; *криві*: *2*, *3* — точні розв'язки, *2′*, *3′* — наближені розв'язки для двофазного середовища

Для $\gamma \to 1$ інтеграл прямує до обмеженої величини $\psi = (2\nu)^{-1}$. Обчисливши ψ з табличних даних (див., наприклад, працю [100]), знаходимо, що в усьому діапазоні значень γ від 1,1 до 1,4 величина інтеграла є близькою до граничного значення $\psi(\gamma = 1) = (2\nu)^{-1}$, відрізняючись від нього не більше ніж на ± 3 %. При

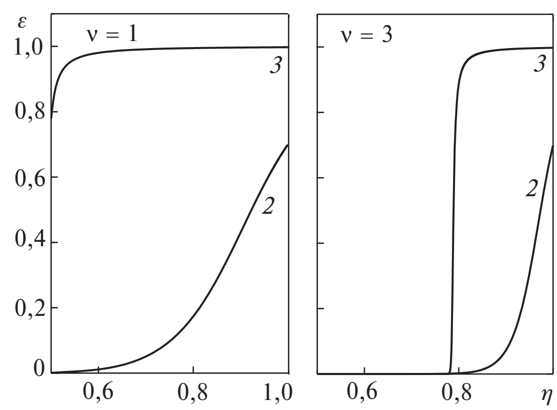

Рис. 3.4. Профілі об'ємної частки конденсованого компонента

цьому наближений вираз для α запишемо як

$$\alpha = \left(\frac{2}{\nu+2}\right)^2 \frac{\sigma(\nu)}{2\nu(\gamma-1)}. \tag{3.3.29}$$

Використавши співвідношення (3.3.28), (3.3.29), отримаємо зв'язок тиску на фронті ударної хвилі залежно від відстані від центра вибуху:

$$p = \frac{2(1-\varepsilon_0)}{\gamma+1}\rho_0 D^2 = \frac{4\nu}{\sigma(\nu)}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\frac{E_0}{1-\varepsilon_0}\,r_f^{-\nu}. \tag{3.3.30}$$

Проаналізувавши знайдені співвідношення, робимо висновок, що збільшення параметрів ударної хвилі за наявності в середовищі нестисливої фази можна пояснити збільшенням швидкості ударної хвилі в $(1-\varepsilon_0)^{-1}$ разів порівняно з $\varepsilon_0 \to 0$ за фіксованого відношення масових концентрацій. У граничному випадку при $\varepsilon_0 \to 1$ швидкість ударної хвилі прямує до нескінченності, що з фізичної позиції стає зрозумілим, оскільки швидкість поширення збурення у нестисливому середовищі безмежно велика.

З рівняння (3.3.30) випливає, що на фіксованій відстані від центра вибуху мінімальний тиск буде в середовищі, для якого характерна максимальна ударна стисливість газової фази (за означенням ударну стисливість задають величиною $(\gamma+1)/(\gamma-1)$) за мінімального об'ємного вмісту конденсованої фази ε_0. Загалом за умови довільного ε_0 тиск і швидкість ударної хвилі в двофазному середовищі залежать не лише від густини середовища ρ_0, енергії вибуху E_0 та γ [43], а й від об'ємної частки конденсованої фази ε_0.

Отже, запропоновано перетворення, за допомогою якого можна з певною точністю переносити відомі розв'язки гідродинамічних задач для газу на двофазні середовища з довільною об'ємною часткою конденсованої фази.

Розділ 4

Ударна хвиля у середовищі з тепловою релаксацією

Особливості динамічної поведінки двофазного середовища, вплив релаксаційних ефектів міжфазної взаємодії на закономірності поширення ударних хвиль можна з'ясувати з розв'язку задачі про точкове виділення енергії. Ця задача становить значний інтерес також у зв'язку з практичною можливістю оцінити ефективність середовища як локалізатора дії ударної хвилі. З'ясуємо, в результаті яких основних характеристик і властивостей самого середовища досягається той чи інший ступінь загасання ударної хвилі. При цьому цікаво визначити вплив на загасання ударної хвилі ще й параметрів ударного навантаження, зокрема, енергії вибуху.

4.1 Система рівнянь для опису сильного вибуху

Нехай у двофазному середовищі з внутрішніми релаксаційними процесами в момент $t = 0$ на площині $\nu = 1$ або на лінії $\nu = 2$, або ж у точці $\nu = 3$ залежно від симетрії миттєво виділяється обмежена величина енергії E_0, яка генерує ударну хвилю. Вважають, що енергія E_0 значно перевищує внутрішню енергію середовища, яке охоплено ударною хвилею, тобто $E_0 \gg \rho_0 E(p_0, \rho_0) r_f^{\nu}$. Ця умова узгоджується з обмеженням $p_0 \ll p_f$, тому початковим тиском p_0 можна знехтувати порівняно з тиском на ударному фронті p_f. Задача полягає в тому, щоб знайти потік за фронтом ударної хвилі залежно від теплофізичних властивостей середовища і повноти завершеності релаксаційних процесів.

Для опису ударно-хвильових течій застосуємо розвинену в підрозд. 3.1 асимптотичну усереднену модель (3.1.18)—(3.1.20), (3.2.7)

$$\frac{\partial \langle V \rangle^{-1}}{\partial t} - \frac{1}{r^{\nu-1}} \frac{\partial r^{\nu-1} \langle V \rangle^{-1} u}{\partial r} = 0, \tag{4.1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \langle V \rangle \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{4.1.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} \right) \langle E \rangle + \frac{p}{r^{\nu-1}} \frac{\partial r^{\nu-1} u}{\partial r} = 0, \tag{4.1.3}$$

$$\tau_E \frac{d}{dt} \left[\langle E \rangle - \frac{p \langle V \rangle (1-\varepsilon)}{\gamma - 1} \right] + \left[\langle E \rangle - \frac{p \langle V \rangle (1-\varepsilon)}{\Gamma_0 - 1} \right] = 0. \tag{4.1.4}$$

Об'ємний вміст конденсованої фази ε — однозначна функція усередненого питомого об'єму $\langle V \rangle$: $\varepsilon = \varepsilon_0 \langle V_0 \rangle / \langle V \rangle$.

У задачі про сильний вибух з'являється ще одна розмірна змінна $r_f = r_f(t)$ (можна використовувати змінну $D = \dfrac{dr_f}{dt}$). Тому для повного замикання системи рівнянь необхідно мати ще одне рівняння — рівняння загального балансу енергії в області, обмеженій ударною хвилею. Якщо в середовищі виділилася енергія E_0, то таке співвідношення матиме вигляд

$$\begin{aligned} E_0 + \frac{\sigma(\nu)}{\nu} \rho_0 E(p_0, \rho_0) r_f^{\nu} = \frac{\sigma(\nu)}{\nu} \int\limits_0^{s_f} \left\langle E + \tfrac{1}{2} u^2 \right\rangle ds = \\ = \sigma(\nu) \int\limits_0^{r_f} \left(\frac{\langle E \rangle}{\langle V \rangle} + \frac{u^2}{2 \langle V \rangle} \right) r^{\nu-1} dr, \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

$\sigma(\nu) \equiv 2(\nu - 1)\pi + (\nu - 2)(\nu - 3).$

Рівняння стану (4.1.4) можна переписати у вигляді

$$\langle E \rangle = \frac{p\langle V \rangle(1-\varepsilon)}{\hat{\Gamma} - 1}, \qquad \hat{\Gamma} = \gamma - (\gamma - \Gamma) \bigg/ \left(1 + \tau_E \frac{d}{dt}\right). \quad (4.1.6)$$

Оператор $\hat{\Gamma}$ за фізичною суттю характеризує теплофізичні властивості середовища та їх зміни як результат міжфазних релаксаційних процесів. За умови миттєвого стиснення (заморожені теплові процеси) маємо $\hat{\Gamma} = \gamma$, а за рівноваги (повільного процесу щодо часу τ_E) — $\hat{\Gamma} = \Gamma_0$. Хвильові процеси з характерним часом процесу одного порядку з часом релаксації τ_E опишемо, використовуючи співвідношення (4.1.6).

Конкретизуємо вираз $\hat{\Gamma}$ для ударної хвилі. Нерівноважність між фазами, як вважають, виникає в ударному фронті, за яким поступово вирівнюються температури обох фаз. У першому наближенні приймемо, що під час повільної зміни параметрів за ударним фронтом не вноситься додатковий внесок у нерівноважність між фазами. У такому випадку можна спростити вираз (4.1.6), допустивши, що характерний час релаксації τ_E — стала величина. Таке уявлення про потік не є точним, проте дає змогу подати співвідношення (4.1.6) в алгебричному вигляді, тобто проаналізувати основні особливості поширення ударних хвиль за наявності нерівноважності.

Перетворимо співвідношення (4.1.6), враховуючи сталість величини $\tau_E = \text{const}$. Параметр $\hat{\Gamma}$ визначає повноту завершеності релаксації в конкретному мікрооб'ємі, а отже, залежить від часу знаходження мікрооб'єму за ударним фронтом τ', тому на ударному фронті $\tau' = 0$ і $\hat{\Gamma} = \gamma$, а при $\tau' \to \infty$ маємо $\hat{\Gamma} = \Gamma_0$. За таких умов з рівняння (4.1.6) неважко отримати алгебричний вираз для ефективного параметра Γ, відповідального за релаксаційні процеси [31, 33, 155]:

$$\Gamma = \Gamma_0 + (\gamma - \Gamma_0)\exp(-\tau'/\tau_E). \quad (4.1.7)$$

На траєкторії частинки величина τ' дорівнює часу t. У загальному випадку τ' є функція часу t та просторової координати

$\tau' = \tau'(r,t)$ і задовольняє диференційному рівнянню

$$\frac{\partial\tau'}{\partial t} + u\frac{\partial\tau'}{\partial r} = 1. \tag{4.1.8}$$

Задачу про сильний вибух доповнимо граничними умовами [174]

$$u = 0 \quad \text{для} \quad r = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &u_f = \frac{2(1-\varepsilon_0)}{\gamma+1}D, \quad p_f = \frac{2(1-\varepsilon_0)}{\gamma+1}\rho_0 D^2, \\ &\langle V\rangle_f^{-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2\varepsilon_0}\rho_0 \end{aligned}\right\} \text{для } r = r_f. \tag{4.1.9}$$

Як і раніше, $r_f(t)$ — відстань до ударного фронту від центра симетрії; $D = dr_f(t)/dt$ — швидкість ударного фронту.

Таким чином, маємо замкнену систему рівнянь (4.1.1)–(4.1.3), (4.1.5)–(4.1.8) з граничними умовами (4.1.9), що дає змогу проаналізувати вплив теплової релаксації на характер ударно-хвильових течій. Наведена система рівнянь складається з семи рівнянь і містить як залежні змінні такі величини: $\langle V\rangle$, u, p, $\langle E\rangle$, Γ, τ', r_f.

Залежність від об'ємної частки нестисливої конденсованої фази ε_0, як доведено в підрозд. 3.3, можна розглядати окремо. Тому систему рівнянь розв'яжемо за умови $\varepsilon_0 = 0$. Для сильної ударної хвилі у виразі (4.1.5) можна знехтувати членом $\rho_0 E(p_0, \rho_0) r_f^\nu$ порівняно з E_0.

Систему рівнянь зводимо до безрозмірного вигляду за допомогою перетворення залежних змінних

$$R = \frac{\langle V\rangle_0}{\langle V\rangle}, \quad U = \frac{u}{D}, \quad P = \frac{p\langle V\rangle_0}{D^2}, \quad \theta = \frac{\tau'}{\tau_E} \tag{4.1.10}$$

і незалежних змінних

$$\eta = \frac{r}{r_f}, \quad \chi = \frac{r_f}{\tau_E D}, \quad \tau_E\frac{d\chi}{dt} = 1 - z, \quad z = \frac{r_f}{D^2}\frac{dD}{dt}. \tag{4.1.11}$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
&(1-z)\chi\frac{\partial R}{\partial \chi}+(U-\eta)\frac{\partial R}{\partial \eta}+\frac{R}{\eta^{\nu-1}}\frac{\partial \eta^{\nu-1}U}{\eta}=0,\\
&(1-z)\chi\frac{\partial U}{\partial \chi}+(U-\eta)\frac{\partial U}{\partial \eta}+zU+\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\eta}=0,\\
&\left((1-z)\chi\frac{\partial}{\partial \chi}+(U-\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}+2z\right)\frac{P}{\Gamma-1}+\frac{\Gamma P}{(\Gamma-1)\eta^{\nu-1}}\frac{\partial \eta^{\nu-1}U}{\eta}=0,\\
&(1-z)\chi\frac{\partial \theta}{\partial \chi}+(U-\eta)\frac{\partial \theta}{\partial \eta}=\chi,\\
&(1-z)\chi\frac{d\psi}{d\chi}+(2z+\nu)\psi=0, \quad \psi=\int\limits_0^1\left(\frac{P}{\Gamma-1}+R\frac{U^2}{2}\right)\eta^{\nu-1}d\eta,\\
&\Gamma=\Gamma_0+(\gamma-\Gamma_0)\exp(-\theta).
\end{aligned}
\tag{4.1.12}
$$

Граничні умови в безрозмірних змінних зводимо до співвідношень

$$
\begin{aligned}
&U=0 \quad \text{для} \quad \eta=0,\\
&U_f=\frac{2}{\gamma+1}, \quad P_f=\frac{2}{\gamma+1}, \; R_f=\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \text{ для } \eta=1.
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

У граничних умовах (4.1.13) вважаємо $\Gamma=\gamma$, тобто релаксаційні процеси на фронті ударної хвилі відсутні.

Початкові умови для цієї системи рівнянь задаємо виходячи з того, що енергія виділяється миттєво в точці $\nu=3$ (або на площині $\nu=1$, або на лінії $\nu=2$), причому у початковий момент релаксаційні процеси не встигли проявитися. Тому за початкові параметри потоку можна брати параметри з автомодельного розв'язку [63, 100]. На відміну від поширення сильної ударної хвилі в однорідному середовищі (газ, рідина), загалом в релаксівному середовищі не існує автомодельного розв'язку через наявність ще одного розмірного параметра, в цьому випадку часу релаксації. Отже, рух за ударним фронтом буде складніший, ніж автомодельний потік. Це призводить до складніших залежностей параметрів потоку від властивостей середовища.

Система рівнянь (4.1.12) відрізняється від автомодельної системи рівнянь залежністю Γ від часу χ і координати η. Ця відмінність характерна тільки для рівняння енергії (4.1.12), що містить додатковий член

$$\left((1-z)\chi\frac{\partial}{\partial\chi}+(U-\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\ln(\Gamma-1).$$

Зрозуміло, що в початковий момент $\chi \simeq 0$ і за великих часів $\chi \gg 1$ додатковий член стає малим, тобто розв'язки для цих часів близькі до автомодельних розв'язків, але з різними параметрами: $\Gamma = \gamma$ при $\chi \simeq 0$ і $\Gamma = \Gamma_0$ при $\chi \gg 1$. У початковий момент часу $\chi = 0$ система рівнянь переходить у звичайну систему рівнянь першого порядку, що має за вищезаданих граничних умов автомодельний розв'язок [63, 100, 156, 168]. Саме автомодельний розподіл функцій за координатою η вибраний як початкові умови для системи диференційних рівнянь (4.1.12). Дослідження виписаної системи показало, що вона є гіперболічною.

Розв'язування системи рівнянь істотно ускладнюється особливостями, що виникають як у початковий момент, так і в околі центра симетрії. При $\eta = 0$ виникають особливості типу сідлової точки. Крім того, у початковий момент за переходу від $\chi = 0$, де задано початкові умови, до $\chi > 0$ підвищується порядок системи рівнянь, що також ускладнює прямий розрахунок. Метод розв'язування системи з метою подолання особливості, пов'язаної зі зникненням членів з частинними похідними за χ, полягає у такому. У момент $\chi \simeq 0$, коли процеси релаксацій неістотно змінили поле течії порівняно з початковим автомодельним, всі відхилення залежних змінних можна шукати у вигляді лінійних поправок до автомодельного розподілу. Лінеаризувавши задачу відносно поправок, розв'язуємо чисельно лінійну систему рівнянь. Для $\eta < \eta^*$ (значення η^* підібрано з числового експерименту) використано асимптотичні наближення, щоб уникнути особливості типу сідлової точки при $\eta = 0$. В результаті знаходимо розв'язок системи рівнянь (4.1.12), який справедливий до деякого χ^*, тобто коли члени другого порядку за χ^* у розкладі шуканих величин ще набагато менші, ніж члени першого порядку. Величину χ^* встановлюємо за числовим експериментом для конкретної задачі.

За числового інтегрування системи нестаціонарних диференційних рівнянь (4.1.12) для часів $\chi > \chi^*$ перевагу було віддано неявній скінченно-різницевій схемі. Реалізація такого методу більш трудомістка, ніж для явної скінченно-різницевої схеми, але неявна схема дає змогу уникнути надмірно строгих обмежень на крок для просторової та часової змінних.

4.2 Розрахунок ударних хвиль

Наявність теплової релаксації між фазами ускладнює опис течії. Особливості виникають у зміні параметрів як ударного фронту, так і профілів тиску, швидкості та густини за фронтом. Релаксаційні ефекти впливають на швидкості загасання ударної хвилі, на зміну відношення кінетичної і внутрішньої енергії, на величину імпульсу тиску ударної хвилі [200].

У загальному випадку параметри ударних хвиль залежать від властивостей середовища ρ_0, γ, Γ_0, τ_E та енергії вибуху E_0. Основні відмінності течії в релаксівному середовищі проявляються вже у початковий момент часу. Результати розрахунку показали, що в початковий момент $t \leq \tau_E$ параметри потоку з точністю до 10 % лінійно відхиляються від автомодельних параметрів [33, 36]. При цьому швидке гальмування швидкості ударної хвилі за наявності теплової релаксації приводить до зростання відносної масової швидкості, внаслідок чого відносна частка маси в центральній області зменшується, а поблизу фронту збільшується.

Для часів $t > \tau_E$ зміну параметрів ударних хвиль неможливо описати лінійним відхиленням від автомодельних значень [33,36]. Якби хвиля поширювалася достатньо довго ($t \gg \tau_E$) і при цьому залишалася ще сильною ($p \gg p_0$), то всі релаксаційні процеси відбувалися б лише у зоні поблизу ударного фронту. За цією зоною поле течії можна було б з достатньою точністю описати за допомогою автомодельного розв'язку з рівноважним параметром Γ_0.

З рис. 4.1, на якому показано залежність тиску на фронті хвилі $P_f = p_f \tau_E^{6/5}(\rho_0 A^2)^{-1}$ від безрозмірної відстані $l = r_f(\tau_E^{2/5} A)^{-1}$, видно вказану особливість. За прийнятих припущень вихід кривих на асимптотику відбувається приблизно на однакових безрозмірних відстанях від центра джерела енергії. Зазначимо, що збільшення показника степеня $\mu = -2z$ у функційній залежності $p \sim r_f^{-\mu}$ порівняно з автомодельним значенням $\mu = -2z = \nu$ пов'язане виключно з релаксаційним ефектом. Зауважимо, що цей ефект при поширенні сильних ударних хвиль характерний для широкого класу багатокомпонентних середовищ: пін [43,66], бульбашкових середовищ [42,84,92,170], запилених газів [157,173].

Важливою характеристикою, що відображує інтенсивність і ефективність загасання ударних хвиль у середовищі, є залежність відношення внутрішньої енергії середовища до його кінетичної

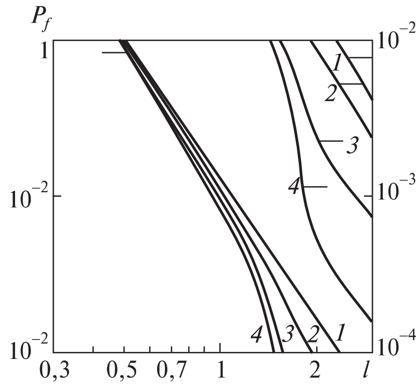

Рис. 4.1. Розрахункова залежність безрозмірного тиску на ударному фронті P_f від безрозмірної відстані l. Величина $\gamma = 1,4$: *1* — $\Gamma_0 = 1,4$; *2* — $\Gamma_0 = 1,2$; *3* — $\Gamma_0 = 1,05$; *4* — $\Gamma_0 = 1,01$

енергії від плину часу релаксаційного процесу. Залежності перерозподілу енергії вибуху між внутрішньою і кінетичною енергіями середовища від безрозмірного часу подано на рис. 4.2. Як видно, перерозподіл енергії з часом, а потім досягання граничного значення, що відповідає термодинамічній рівновазі у середовищі, відбувається швидше для більших значень параметра Γ_0. Проте для фіксованого моменту часу в середовищі з меншим значенням параметра Γ_0 відношення внутрішньої енергії до кінетичної є завжди більшим. При цьому із зменшенням Γ_0 відмінність у перерозподілах енергії зменшується і врешті-решт відношення енергій наближається до залежності, що відповідає граничному значенню $\Gamma_0 = 1$ (крива *4*, рис. 4.2).

Питання загасання ударних хвиль у релаксівних середовищах тісно пов'язані із задачами зниження їх інтенсивності, аби запобігти руйнуванню різноманітних конструкцій. На практиці здебільшого ступінь руйнування об'єктів вивчають залежно від імпульсу тиску ударної хвилі або від комплексної величини імпульсу і тиску на ударному фронті [112, 227].

Закономірність зміни імпульсу ударної хвилі під час релаксаційного процесу, з урахуванням широкого застосування релаксівних багатокомпонентних середовищ для локалізації ударних хвиль, є важливою характеристикою. На рис. 4.3 показано цю

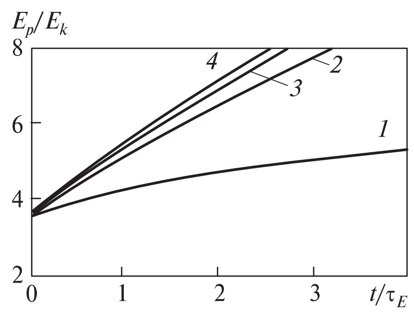

Рис. 4.2. Перерозподіл енергії вибуху між внутрішньою E_p та кінетичною E_k енергіями суміші, $\gamma = 1,4$: *1* — $\Gamma_0 = 1,2$; *2* — $\Gamma_0 = 1,05$; *3* — $\Gamma_0 = 1,01$; *4* — $\Gamma_0 = 1,0$

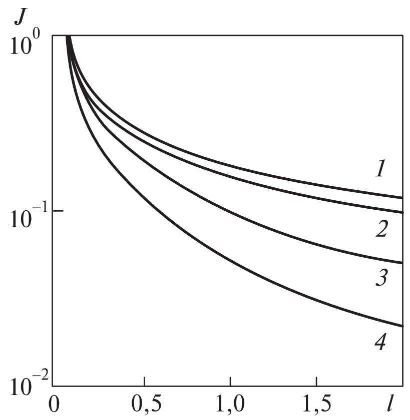

Рис. 4.3. Розрахункова залежність безрозмірного імпульсу тиску від безрозмірної відстані, $\gamma = 1,4$: *1* — $\Gamma_0 = 1,4$; *2* — $\Gamma_0 = 1,2$; *3* — $\Gamma_0 = 1,05$; *4* — $\Gamma_0 = 1,01$

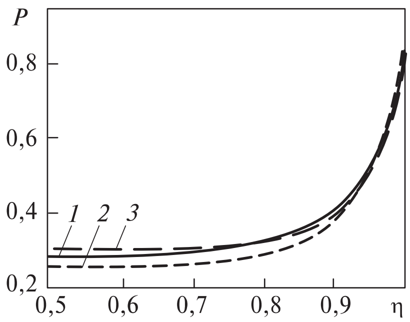

Рис. 4.4. Профілі тиску ударної хвилі за різних часів поширення, $\gamma = 1,4$, $\Gamma_0 = 1,2$: *1* — відповідає $t/\tau_E = 0$; *2* — $t/\tau_E = 1$; *3* — $t/\tau_E = 6$

закономірність у вигляді залежності безрозмірного імпульсу тиску

$$J = I\tau_E^{1/5}(\rho_0 A)^{-1}, \qquad I = \int\limits_{t(r_1)}^{\infty} p(r_1, t)dt \tag{4.2.1}$$

від відстані l. Зменшення параметра Γ за умови сталого ρ_0 приводить до зменшення імпульсу тиску на фіксованій відносній відстані, при цьому інтенсивність зниження імпульсу зростає із збільшенням теплоємності середовища. Підкреслимо, що збільшення густини середовища, за інших рівних умов, як це видно з рис. 4.3, може спричинити збільшення імпульсу тиску порівняно з нерелаксівним середовищем меншої густини, незважаючи на зниження пікового тиску (див. рис. 4.1).

Вплив процесів релаксацій на зміну розподілу тиску за ударним фронтом показано на рис. 4.4. У центральній області в початковий момент часу тиск p зменшується, проте надалі, з досяганням термодинамічної рівноваги у середовищі, він зростає, наближаючись до значення, що відповідає автомодельній течії при Γ_0.

4.3 Вибух у газорідинній піні

Типовим представником двофазного середовища, що яскраво проявляє релаксаційні ефекти під час поширення у ньому ударної хвилі, є газорідинна піна. Це середовище привертає увагу тим, що в ньому спостерігається сильне зниження ударної і шумової дії [66]. У цьому підрозділі експериментальні дані зіставлено з розрахунковими результатами. Експериментальні дослідження, навіть тільки макропараметрів (таких як швидкість і тиск), дали змогу розвинути модельні уявлення і підходи до вивчення складного явища — нестаціонарного поширення хвиль у релаксівному середовищі [200]. Певна річ, експериментальними дослідженнями визначено межі достовірності початкових припущень, які використано в теоретичних підходах, унаслідок чого окреслено область та умови, за якими результати математичного моделювання з належною точністю описуватимуть спостережувані ефекти.

4.3.1 Експериментальні результати

На рис. 4.5 зображено залежність швидкості поширення ударної хвилі в піні з масовою концентрацією конденсованого компонента $\sigma = 10...15$ кг/м^3, а також у повітрі від приведеного радіуса

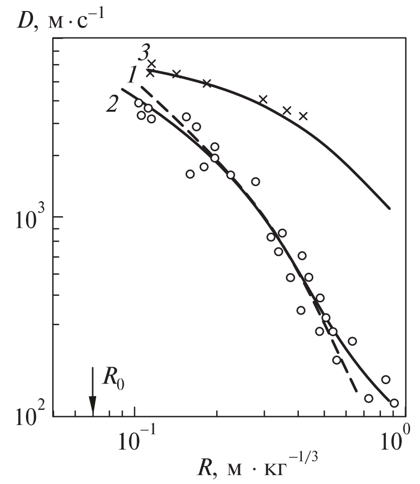

Рис. 4.5. Залежність швидкості ударного фронту від приведеної відстані: *1* — розрахункова крива, що моделює експеримент у піні; *2* — експеримент у піні; *3* — експеримент у повітрі; R_0 — радіус заряду

$R = r_f/Q^{1/3}$ (r_f — відстань від центра симетрії до фронту хвилі, Q — маса вибухової речовини). Відмітка R_0 вказує на початковий радіус заряду. Як видно, з наближенням до заряду різко знижується різниця швидкостей поширення ударних хвиль у піні і повітрі. Зі збільшенням відстані від заряду швидкість поширення збурення зменшується, причому зміна логарифма швидкості досягає величини

$$\frac{d\ln D}{d\ln R} = -2. \tag{4.3.1}$$

Пряме вимірювання тиску проведено у вужчій області відстаней. На рис. 4.6 суцільна лінія відповідає експериментальним результатам поширення ударної хвилі. Тиск у хвилі, що віддалилася на відстань $R > 0,4$ м/кг$^{1/3}$, різко падає, досягаючи зміни логарифма тиску з відстанню:

$$\frac{d\ln P}{d\ln R} = -4. \tag{4.3.2}$$

Коли тиск стає нижчим за 1 МПа, необхідно враховувати внутрішню енергію суміші, що охоплена ударною хвилею. Тут крутість спаду швидкості і тиску зменшується. Для порівняння на рис. 4.5 і 4.6 наведено залежності відповідної величини для повітря за даними публікацій [2, 3, 14, 15, 99, 112, 118].

Залежність приведеного імпульсу тиску J (див. (4.2.1)) від приведеної відстані показано на рис. 4.7. На відстанях, що були досліджені, імпульс зменшується монотонно. Порівняння з експериментальними значеннями для повітря [3] вказує на різну поведінку залежності імпульсу тиску у цих середовищах. У повітрі немонотонна зміна пов'язана, на думку авторів [3], з формуванням ударної хвилі. Водночас монотонна залежність імпульсу в піні може вказувати на раніше формування цієї хвилі.

Експериментальні результати підтверджують, що газорідинна піна — одне з середовищ, в якому релаксаційні ефекти яскраво виражені, причому характерний час релаксації та характерний час поширення ударної хвилі є величинами одного порядку.

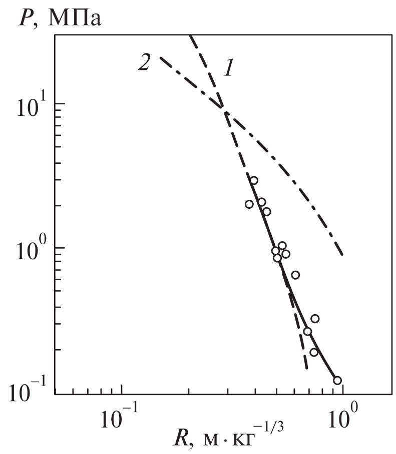

Рис. 4.6. Залежність тиску на ударному фронті від приведеної відстані для хвилі, що проходить: *1* — криву обчислено за експериментальними значеннями швидкості ударного фронту в піні (див. рис. 4.5); *2* — експеримент у повітрі; суцільна лінія — експеримент у піні

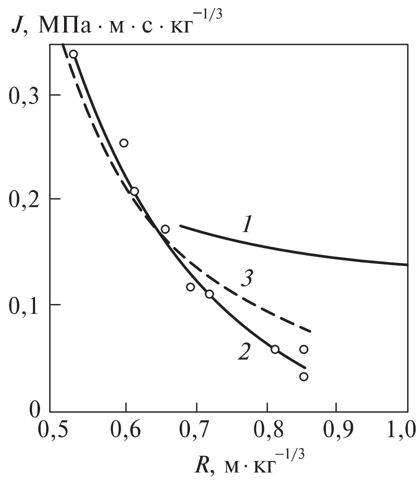

Рис. 4.7. Залежність імпульсу тиску ударної хвилі від приведеної відстані: *1* — у повітрі; *2* — у піні; *3* — розрахункова крива, що моделює експеримент у піні

Саме за наявності таких процесів під час поширення ударних хвиль проявляються ефекти, що сильно відрізняються від явищ за рівноважних умов. Наявність релаксаційних процесів, що проходять за ударним фронтом, підтверджується більшою швидкістю падіння тиску з відстанню: показник $d\ln(P)/d\ln(R) = -4$ менший за показник $d\ln(P)/d\ln(R) = -\nu = -3$, якщо незворотні процеси відбуваються тільки на фронті хвилі.

4.3.2 Порівняння експериментальних даних з розрахунком

Зіставлення експериментальних залежностей швидкості ударної хвилі D і тиску на ударному фронті p_f на відстанях, де проводили прямі вимірювання тиску, вказує, що з точністю похибки експерименту виконується співвідношення

$$\frac{p_f}{p_0} \simeq M^2, \tag{4.3.1}$$

де p_f — тиск на ударному фронті; p_0 — початковий тиск; $M = D/c_0$ — число Маха; $c_0^2 = \Gamma_0 \dfrac{p_0}{\rho_0(1-\varepsilon_0)}$ — рівноважна швидкість звуку в незбуреному середовищі.

Для виконання співвідношення (4.3.1) набагато важливішим є досягання кінематичної рівноваги, ніж теплової. Дійсно, c_0 слабо залежить від заміни Γ_0 на γ, тобто від повноти завершеності теплової релаксації, але істотно залежить від густини середовища. Щоб задовольнити співвідношення (4.3.1), достатньо наявності кінематичної (без теплової) рівноваги між фазами. Таким чином, на підставі співвідношення (4.3.1) можна вважати з достатньою точністю, що швидкості фаз однакові там, де досягається максимальний тиск на фронті. А тому профілі хвилі за ударним фронтом визначатимуть інші міжфазні процеси. Все зазначене вище для області, де виконується співвідношення (4.3.1), дає змогу залучати одношвидкісну модель для опису релаксаційних ефектів.

На користь такого наближення вказують результати статті [136]. У ній вказано, що в початковий момент точкового вибуху в запиленому газовому середовищі часточки пилу відстають від руху газу, проте надалі їх швидкість збільшується через наявність сили опору, і навіть може перевищувати швидкість руху газу. Значна частка захоплених часточок переміщується до ударного фронту, а їхня швидкість є достатньою, щоб генерувати ударну хвилю.

Картину формування і поширення ударної хвилі у двофазному середовищі, що генерується хімічною вибуховою речовиною, можна уявити так. Після підриву заряду вибухової речовини продукти вибуху, маючи високу густину, починають поступово передавати енергію у навколишнє середовище. До того ж, через нижчу швидкість поширення збурення у двофазному середовищі, ніж у газі, енергія передаватиметься продуктами вибуху швидше у піні, ніж у газі, який має меншу густину. Отже, у піні ударна хвиля повинна формуватися раніше, ніж у газі. Зазначимо, що формування ударної хвилі на ранішому етапі підтверджується результатами порівняння імпульсу тиску у піні і газі (рис. 4.7). Відповідно до даних експерименту в піні, можна стверджувати, що в зоні, де проводили прямі вимірювання тиску та імпульсу, хвиля вже сформувалася.

Після формування хвилі механізм, який енергетично підтримує поширення збурення, ймовірно зумовлений, з одного боку, тиском газової фази, з іншого — кінетичною енергією конденсованої фази. Саме остання обставина сприяє швидкому вирівнюванню швидкостей фаз після попадання середовища в ударну хвилю.

Близьке формування ударної хвилі у піні біля заряду дає змогу використати припущення про кінематичну рівновагу, а отже, визначити тиск на фронті за числом Маха у ближній зоні, де не проводили прямі вимірювання тиску (штрихова лінія *1* на рис. 4.6). Згідно з оцінками, тиск у піні перевищує тиск на фронті хвилі у повітрі. Збільшення тиску в двофазному середовищі у ближній зоні заряду порівняно з тиском повітря необхідно враховувати для проектування пристроїв локалізації вибуху.

За ударним фронтом, де, як вважають, настає кінематична рівновага, релаксаційні ефекти пов'язані з іншими міжфазними взаємодіями, такими як теплообмін, випромінювання, частковий масообмін між фазами тощо. Саме така взаємодія призводить до втрат енергії, від якої залежить тиск середовища. Процес теплової релаксації повільніший, ніж наростання тиску на фронті хвилі. Зумовлений цими процесами перехід енергії від одного виду до іншого не відразу позначається на значеннях параметрів на ударному фронті. Передачу збурень з глибини хвилі на ударний фронт визначають гідродинамічними закономірностями. Отже, доходимо висновку: щоб описати поширення ударної хвилі, потрібно залучити нестаціонарні гідродинамічні рівняння. Моделювання поширення ударної хвилі від точкового вибуху в релаксівному середовищі розглянуто у підрозд. 4.1 і 4.2.

Зіставимо числові та експериментальні результати щодо поширення ударних хвиль у піні, якій властиві релаксаційні ефекти. Ідеальність енергоджерела, закладена у розрахунках (точковість заряду та миттєве виділення енергії), не дає змоги безпосередньо зіставити числові дані з експериментальними результатами, в яких хвилі генерувалися хімічними вибуховими речовинами. Дійсно, порівняння тиску від точкового і реального джерела, наприклад, для повітря, приводить до того, що на відстанях, де залежність $p \sim R^{-3}$ є справедливою, енергетичний еквівалент точкового джерела дорівнює 60 % енергії реального заряду [14, 15]. Виходячи з цього, необхідно: а) з'ясувати енергетичний еквівалент точкового джерела відносно реального, що дасть змогу обчислювати абсолютні значення параметрів ударних хвиль; б) порівняти відносні величини, тобто значення змінних потоку в релаксівному середовищі, віднесені до відповідних значень у нерелаксівному середовищі. У другому випадку закономірно зіставляти експериментальні та числові значення параметрів ударних хвиль у піні з параметрами середовища, яке описують рівнянням стану газу, але в якому ще не проявляються релаксаційні властивості. Таким середовищем насамперед може бути газове середовище. Наприклад, можна скористатися відомими результатами з вибуху у повітрі [2, 3, 112, 118]. Частку енергії реального джерела, яка безпосередньо формує ударну хвилю (енергія точкового джерела), визначають, зіставивши обчислене значення $p_f l^3$ і експериментальне — pR^3, причому обчислюють величину pR^3 у ближній зоні заряду, коли можна знехтувати релаксаційними ефектами, вважаючи, що хвиля вже сформувалась. Для газорідинних пін енергетичний еквівалент точкового джерела становить 50–60 % енергії реального заряду. За такої енергії вибуху і характерного часу релаксаційних процесів $\tau_E = 150 - 180$ мкс експериментальні та розрахункові значення для швидкості ударної хвилі й тиску на фронті задовільно узгоджуються між собою. На рис. 4.5, 4.6 криві обчислених значень указаних величин зображено штриховими лініями. У ближній зоні заряду $R < 0,15$ м/кг$^{1/3}$ обчислені значення швидкості в піні перевищують виміряні величини в повітрі. Це вказує на те, що зона формування ударної хвилі у піні менша, ніж у повітрі. На відстанях, більших за $R > 0,7$ м/кг$^{1/3}$, обчислені значення перепаду тиску і швидкості хвилі через неврахування протитиску є нижчими за реально заміряні значення. Нехтування протитиском під час обчислення імпульсу тиску ударної хвилі призводить до більших похибок, ніж під час обчислення тиску і швидкості. Це пов'язане з різними профілями тиску на великих відстанях. Проте на деяких відстанях, коли вже перепад тиску на ударному фронті зрівнюється з p_0, при обчисленні імпульсу J похибки від протитиску і хвилі розрідження частково взаємокомпенсуються. Виявилося, що в межах відстаней, де проведено прямі експериментальні вимірювання імпульсу, обчислені та виміряні величини імпульсу тиску узгоджуються (див. рис. 4.7).

Крім обчислення абсолютних величин були порівняні відносні величини, віднесені до відповідних значень у повітрі. Такою відносною величиною може слугувати коефіцієнт загасання тиску. Нагадаємо, що обчислюваний коефіцієнт загасання визначають як відношення тиску падаючої хвилі у нерелаксівному середовищі до тиску у релаксівному середовищі на одній і тій самій відстані. Разом з тим експериментально знайдений коефіцієнт загасання тиску обчислюють як відношення тиску в повітрі до тиску в піні на фіксованій приведеній відстані. Зазначимо, що у зоні, де джерело енергії неможливо вважати точковим, коефіцієнт загасання, визначений вказаним способом, є меншим, ніж теоретично обчислений. Це зумовлено тим, що в середовищі з більшою густиною, тобто в піні, ударна хвиля "забуває" неідеальність джерела енергії на ближчих відстанях, ніж у повітрі. Зокрема, тиск ударної хвилі на фронті у піні через неідеальність джерела енергії у ближній зоні формування ударної хвилі має перевищувати тиск у повітрі.

На рис. 4.8 показано експериментальну (штрихова лінія) і розрахункову (суцільна лінія) залежності коефіцієнта загасання тиску від приведеного радіуса R. При цьому для заданих концентрацій конденсованої фази, енергії вибуху, вибравши за опорну точку $R = 0,4$ м/кг$^{1/3}$, можна визначити характерний час релаксаційних процесів. Виявилося, що він добре узгоджується із значеннями 150–180 мкс. Такі самі значення характерного часу релаксаційного процесу можна отримати з нахилу експериментальь-

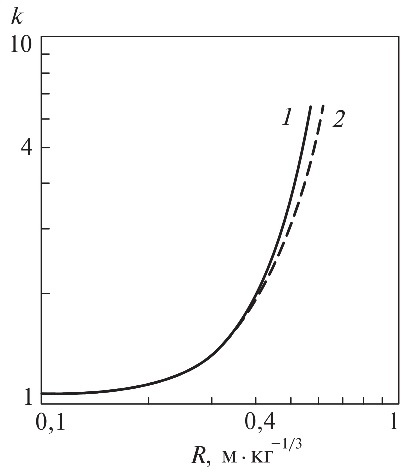

Рис. 4.8. Залежність коефіцієнта загасання від відстані: *1* — розрахунок; *2* — експеримент

них кривих залежностей D від R (див. рис. 4.5) і p від R (див. рис. 4.6). Максимальне значення параметра $-d\ln(p)/d\ln(R)$, як уже наголошувалось, досягається на відстанях, де хвилю ще можна вважати сильною: $-d\ln(p)/d\ln(R) = 4$. За початкової (заданої в експериментальних дослідженнях) концентрації води у піні і теплофізичними властивостями обох фаз параметр Γ_0 лежить у межах 1,01—1,001. Виходячи з цього і знаючи повний час приходу хвилі на відстань, де $-d\ln(p)/d\ln(R) = 4$ (так само $-d\ln(D)/d\ln(R) = 2$), знаходимо характерний час релаксаційного енергообміну: $\tau_E = 150 - 180$ мкс.

Таким чином, у рамках запропонованої моделі за наявності у розрахункових залежностях параметра τ_E для прогнозування поширення ударних хвиль у газовмісних середовищах з тепловою релаксацією необхідно мати опорну експериментальну точку. Отже, щоб визначити абсолютне значення параметрів ударної хвилі у таких середовищах, достатньо провести мінімальну кількість експериментальних вимірювань, а потім, спираючись на знайдені розрахункові залежності, відновити повністю поле течії на широкому відрізку відстаней.

Доходимо висновку, що задовільний збіг розрахункових і експериментальних результатів вказує на достовірність запропонованої модельної кінетики і методу розрахунку для опису релаксаційних ефектів у газорідинній піні. З обмеженої кількості експериментальних даних вдається оцінити характерний час теплової релаксації та енергетичний еквівалент енергоджерела. Використовуючи розрахункові залежності, можна визначити основні параметри ударних хвиль, такі як залежність перепаду тиску, швидкості поширення ударної хвилі, коефіцієнта загасання від відстані і часу, а також оцінити імпульс тиску. Запропоновані розрахункові співвідношення дають змогу з'ясовувати поведінку ударно-хвильових течій залежно від теплофізичних властивостей середовища й потужності енергоджерела. Розрахунки можуть бути використані для широкого класу двофазних газовмісних середовищ, характерною особливістю яких є незворотний перехід енергії до виду, що не робить внеску в тиск.

Розділ 5

Діагностика середовища довгими нелінійними хвилями

У розділах 1—4 розглянуто так звані прямі задачі, пов'язані з впливом структури середовища на хвильові поля. Водночас виникає питання, чи достатньо інформації міститься в хвильовому полі, щоб відтворити структуру середовища. Це — обернена задача. З'ясувалося, що, визначивши хвильові поля, з певною точністю можна діагностувати концентрацію окремих компонентів.

5.1 Посилення нелінійного ефекту в середовищах зі структурою

Доведемо твердження, що під час поширення довгих хвиль нелінійний ефект завжди більший у середовищі, яке має внутрішню структуру. Спочатку порівняємо швидкості звуку в однорідному c_{hom} та багатокомпонентному $\tilde{c}$ середовищах. Доведемо в загальному випадку, що зі збільшенням тиску швидкість звуку збільшується швидше для середовища зі структурою, ніж для однорідного середовища:

$$\tilde{c} \geq c_{\mathrm{hom}}. \tag{5.1.1}$$

Виключно для спрощення пояснення розглянемо середовище, в якому швидкість звуку в окремих компонентах не залежить від тиску:

$$c \neq f(p), \quad dc/dp = 0. \tag{5.1.2}$$

З'ясуємо, у якому випадку реалізується рівність у виразі (5.1.1), а в якому — нерівність. Доведемо, що знак рівності в (5.1.1) досягається у разі початкового тиску в результаті нормування і для спеціально структурованого середовища, в якому відношення $V(\xi)/c^2(\xi)$ функціонально не залежить від швидкої змінної ξ.

Для однорідного середовища, яке, певна річ, містить тільки один компонент, з (5.1.2) маємо

$$c_{\mathrm{hom}} \neq f(p), \quad dc_{\mathrm{hom}}/dp = 0. \tag{5.1.3}$$

Для багатокомпонентного середовища похідну $d\tilde{c}/dp$ знаходимо із співвідношення

$$\frac{d\tilde{c}}{dp} = \frac{2\langle V\rangle}{\langle V^2/c^2\rangle}\left(\langle V\rangle\left\langle\frac{V^3}{c^4}\right\rangle - \left\langle\frac{V^2}{c^2}\right\rangle^2\right) \geq 0. \tag{5.1.4}$$

Нерівність (5.1.4) випливає з відомої нерівності Коші–Шварца (див., наприклад, працю [62]). Вона забезпечує доказ того, що із збільшенням тиску швидкість звуку $\tilde{c}$ збільшується. Зіставивши співвідношення (5.1.4) і (5.1.3), отримаємо нерівність (5.1.1).

Крім того, при $p > p_0$ крива ударної адіабати для середовища із структурою завжди лежить вище, ніж для однорідного середовища (вони дотикаються тільки у початковій точці p_0). Доведемо, що

$$\frac{d^2p}{d\langle V\rangle^2} \geq \left(\frac{d^2p}{dV^2}\right)_{\mathrm{hom}}. \tag{5.1.5}$$

Дійсно, відношення цих похідних приймає вигляд

$$\frac{d^2p}{d\left\langle V\right\rangle^2}\bigg/\left(\frac{d^2p}{dV^2}\right)_{\text{hom}} = \frac{\left\langle V^3/c^4\right\rangle\left\langle V^2/c^2\right\rangle^{-3}}{c_{\text{hom}}^2\left\langle V\right\rangle^3} = \\ = \frac{\left\langle V^3/c^4\right\rangle\left\langle V\right\rangle c_{eff}^2}{c_{\text{hom}}^2\left\langle V^2/c^2\right\rangle^2} \geq \frac{\left\langle V^3/c^4\right\rangle\left\langle V\right\rangle}{\left\langle V^2/c^2\right\rangle^2} \geq 1.$$

Отже, довга хвиля значної амплітуди реагує на структуру середовища, причому швидкість звуку у цьому середовищі зростає порівняно з однорідним середовищем. Нелінійність є навіть тоді, коли окремі компоненти описують лінійним законом.

Винятком, як це вже зазначалось, є структуровані середовища, в яких $V(\xi)/c^2(\xi) \neq f(\xi)$. Для таких середовищ знак рівності реалізований у співвідношеннях (5.1.1) та (5.1.5). Окремі елементи структури реагують на зміну тиску p, а це, в свою чергу, означає, що відносна структура середовища не змінюється, тобто відношення $V(\xi,p)/V(\xi,p_0)$ не залежить від ξ. У цьому випадку значення $\tilde{c} = \sqrt{\langle c^2\rangle}$ є усередненою характеристикою (див. рівняння (1.4.4)), тому систему рівнянь (1.3.4) можна переписати, використавши усереднені змінні: p, u, $\langle V\rangle$, $\tilde{c} = \sqrt{\langle c^2\rangle}$. Неоднорідність не вносить додаткової нелінійності у такі середовища, а структура середовища не впливає на рух хвиль.

Доведемо, що нелінійні ефекти у структурованих середовищах збільшуються порівняно з однорідним середовищем. Розглянемо еволюційне рівняння із слабкою нелінійністю і порівняємо коефіцієнти нелінійності для цих середовищ. Запишемо еволюційне рівняння в ейлеровій системі координат, що містить слабку нелінійність. Перш за все зазначимо, що масова швидкість u пов'язана з тиском p співвідношенням

$$u = \int\limits_{p_o}^{p} \sqrt{\langle V^2/c^2\rangle}dp. \tag{5.1.6}$$

Функційна залежність усередненого питомого об'єму від приросту тиску $p' = p - p_0$ з точністю до членів другого порядку $O(p'^2)$

розвивається в ряд

$$\langle V\rangle(p) = \langle V\rangle_0 + \left.\frac{d\langle V\rangle}{dp}\right|_{p=p_0} p' + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2}\right|_{p=p_0} p'^2.$$

Систему рівнянь (1.3.4) тоді можна переписати так:

$$\langle V\rangle_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \left\langle \frac{V^2}{c^2}\right\rangle_0 \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2}\right|_{p=p_0} \frac{\partial p'^2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle V\rangle_0 \frac{\partial p'}{\partial x} = 0.$$

Для виведення першого рівняння було використано співвідношення $u\dfrac{\partial p'}{\partial x} = p'\dfrac{\partial u}{\partial x}$, яке справедливе з прийнятою точністю $O(p'^2)$ і випливає з еволюційного рівняння для однієї змінної:

$$\langle V\rangle_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \left\langle \frac{V^2}{c^2}\right\rangle_0 \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2}\right|_{p=p_0} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} = 0. \qquad (5.1.7)$$

Надалі індекс 0, що позначає незбурений стан, опускаємо. Розглянемо хвилі, що поширюються в один бік. З указаною точністю оператор у рівнянні (5.1.7) перепишемо у вигляді

$$-\frac{\sqrt{\langle V^2/c^2\rangle}}{\langle V\rangle}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \to 2\frac{\partial}{\partial x}$$

(див., наприклад, розд. 93 у праці [76]). Отже, після факторизації маємо еволюційне рівняння в ейлеровій системі координат

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \tilde{c}\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{2}\langle V\rangle \left\langle \frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-3/2} \frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2} p'\frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \qquad (5.1.8)$$

Коефіцієнт нелінійності α_p, зумовлений структурою середовища, для випадку $c \neq f(p)$ можна записати у такому вигляді:

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{2}\langle V\rangle \left\langle \frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-3/2} \frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2} = \frac{d(u+\tilde{c})}{dp} = \langle V\rangle \left\langle \frac{V^3}{c^4}\right\rangle \left\langle \frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-3/2}.$$

Причому завжди $\alpha_p > 0$. Для однорідного середовища маємо $dc/dp = 0$, $\alpha_{p\,\mathrm{hom}} = V/c$. Винятковими середовищами є неоднорідні середовища, в яких величина $V(\xi)/c^2(\xi)$ не змінюється на періоді. Для таких середовищ неоднорідність не вносить додаткової нелінійності порівняно з однорідними. Такі структуровані середовища поводяться подібно до однорідних середовищ під час поширення нелінійних хвиль.

Розглянемо відношення коефіцієнтів нелінійності для структурованого і однорідного середовищ, заздалегідь узгодивши їхні властивості із використанням умови (1.4.3). Мається на увазі, що у просторі безрозмірних нормованих змінних при $p = p_0$ задано $\langle V \rangle_0 = 1$, а також $\left\langle V^2/c^2 \right\rangle_0 = 1$ для середовищ, які ми порівнюємо. Тому

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_{p\,\mathrm{hom}}} = \langle V \rangle \left\langle \frac{V^3}{c^4} \right\rangle \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{-2} \geq 1. \tag{5.1.9}$$

Нерівність є ніщо інше, як відома нерівність Коші—Шварца (див. формули (4.6-60), (15.2-3) і розд. 14.2-6 у праці [62]). Врахувавши, що $V \geq 0$, $V/c^2 \geq 0$, доведемо, що

$$\langle V \rangle \left\langle V^3/c^4 \right\rangle \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} V d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V^3}{c^4} d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2} \left(\frac{V}{c^2} \right)^{-1} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2} \frac{V}{c^2} d\xi \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{V^2}{c^2} \left(\frac{V}{c^2} \right)^{-1}} \cdot \sqrt{\frac{V^2}{c^2} \frac{V}{c^2}} d\xi \right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2} d\xi \right)^2 \equiv \left\langle V^2/c^2 \right\rangle^2.$$

Залишилося визначити умову, коли виконується знак рівності. Для цього скористаємося векторним записом нерівності Коші–Шварца (див. формулу (14.2-5) у праці [62])

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}),$$

причому знак рівності реалізується тоді і лише тоді, коли вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні, тобто $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ ($k = \mathrm{const}$). У нашому випадку це означає, що

$$\sqrt{\frac{V^2}{c^2} \left(\frac{V}{c^2} \right)^{-1}} \Bigg/ \sqrt{\frac{V^2}{c^2} \frac{V}{c^2}} = \mathrm{const}.$$

Таким чином, знак рівності виконується тоді і лише тоді, коли $V/c^2 = \mathrm{const}$, тобто $V/c^2 \neq f(\xi)$ не змінюється на періоді. Якщо величина V/c^2 змінюється на періоді, то для решти середовищ з мікроструктурою виконується нерівність (5.1.9). Констатуємо, що в структурованому середовищі коефіцієнт нелінійності α_p завжди більший, ніж в однорідному $\alpha_{p\,\mathrm{hom}}$, тобто доведено, що структура середовища в загальному випадку вносить додаткову нелінійність. У підрозд. 5.2 показано, яким чином зазначений ефект можна використати для розробки математичних основ нового методу діагностики, в якому властивості багатокомпонентного середовища вдається визначити за особливостями поширення довгих нелінійних хвиль.

5.2 Метод діагностики властивостей середовища

Доведемо, що вплив структури на нелінійні довгохвильові збурення настільки великий, що за закономірностями еволюції хвильових полів вдається встановити властивості середовища. Розглянемо лише такі структуровані середовища, в яких відсутня релаксація, а швидкості звуку окремих компонент не залежать від тиску.

Опишемо метод діагностики структури середовища, якщо відомі закономірності поширення хвиль [20,30,202]. Зазначимо одну важливу особливість. Оскільки в асимптотичній усередненій моделі період структури вважаємо безмежно малим стосовно довжини хвилі, то у запропонованому методі діагностики місцеположення елементів структури на періоді не вдається вказати точно. Робимо висновок, що дві структури, які відрізняються одна від одної функційною залежністю V/c^2 від ζ, наприклад, ті, що показані на рис. 5.1, мають однаково впливати на рух хвилі. Отже, такі середовища неможливо розрізнити за допомогою довгих нелінійних хвиль. Врахувавши це обмеження, надалі для визначеності вважатимемо, що залежність V/c^2 від швидкої ейлерової координати $\zeta \equiv x/\varepsilon$ є спадною інтегровною взаємооднозначною

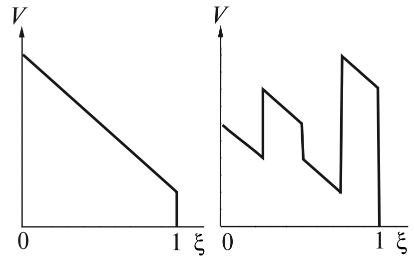

Рис. 5.1. Еквівалентні розподіли питомого об'єму в елементарній комірці з позиції методу діагностики

функцією на відрізку $\zeta \in [0, 1]$, а поза ним дорівнює нулю. Змінну $\zeta = x/\varepsilon$ визначаємо так само, як і швидку змінну для лагранжевих координат $\xi = m/\varepsilon$ (x — повільна ейлерова просторова змінна), і маємо зв'язок (1.3.5)

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial\zeta}\right)_t = \rho(\xi).$$

Доведемо, що функцію $\zeta = \zeta(V/c^2)$, обернену до шуканої $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$, можна визначити через обернене фур'є-перетворення [20, 30, 202]

$$\zeta = F^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\langle V(Vc^{-2})^{n+1}\right\rangle}{(n+1)!\,\langle V\rangle} \mathrm{i}^n q^n\right]. \tag{5.2.1}$$

Коефіцієнти $\left\langle V(Vc^{-2})^n\right\rangle$ $(n = 3, 4, \ldots)$ для цієї формули легко обчислити, якщо знати функційну залежність $\langle V\rangle$ від p або $\langle V^2/c^2\rangle$ від p. Їх послідовно визначають з рекурентного співвідношення

$$\frac{d\left\langle V(Vc^{-2})^n\right\rangle}{dp} = -(n+1)\left\langle V(Vc^{-2})^{n+1}\right\rangle, \tag{5.2.2}$$

яке випливає безпосередньо з рівняння стану. Середнє значення $\langle V\rangle$, як наголошено раніше, однозначно пов'язане з густиною середовища в ейлерових координатах. Скористаємося відомим фактом з теорії ймовірності [62]. Функцію розподілу $f(x)$

(однозначна інтегровна позитивна функція) запишемо через її центральні моменти

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \tag{5.2.3}$$

з використанням характеристичної функції

$$\chi(q) = F[f(x)](q), \tag{5.2.4}$$

де $F[\cdot]$ — фур'є-перетворення. Отже, довільну невід'ємну інтегровну функцію можна записати так:

$$f(x) = F^{-1}[\chi(q)](x). \tag{5.2.5}$$

Використаємо відомий факт [62], що центральні моменти α_n однозначно визначають характеристичну функцію

$$\chi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathrm{i}^n \frac{q^n}{n!}. \tag{5.2.6}$$

Ці відомості з теорії ймовірності [62] застосовуємо, щоб довести таке твердження: якщо $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$ є позитивна інтегровна функція на скінченному відрізку і, крім того, монотонно спадає, а поза відрізком дорівнює нулю, то обернену функцію щодо заданої вдається відтворити формулою (5.2.1) через середні значення

$$\left\langle V(V/c^2)^n \right\rangle \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(V/c^2)^n d\xi.$$

Дійсно, для монотонної і однозначної функції $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$ можна в останньому інтегралі перейти до оберненої функції $\zeta = \zeta(V/c^2)$, оскільки якобіан перетворення не дорівнює нулю. Тоді маємо

$$\begin{aligned}\left\langle V(V/c^2)^n \right\rangle &= \int\limits_0^1 V(\xi)\left(\frac{V}{c^2}\right)^n d\xi = \frac{\int\limits_0^1 V\left(\frac{V}{c^2}\right)^n \rho d\zeta}{\int\limits_0^1 \rho d\zeta} = \\ &= \langle V \rangle \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V}{c^2}\right)^n \frac{d\zeta}{d(V/c^2)} d(V/c^2).\end{aligned}$$

Геометрично це співвідношення відображує інтегрування на області між кривою $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$ і осями координат $O\zeta$ та $O(V/c^2)$, що можна здійснити інтегруванням як за ζ, так і за V/c^2. Однозначність при цьому виконується для монотонно спадної функції $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$.

Проведемо перетворення з урахуванням того, що функція $\zeta = \zeta(V/c^2)$ є визначеною на скінченному відрізку, позитивною і обмеженою зверху:

$$\begin{aligned} \left\langle V(V/c^2)^n \right\rangle &= \langle V \rangle \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V}{c^2}\right)^n \frac{d\zeta}{(dV/c^2)} d(V/c^2) = \\ &= -n \langle V \rangle \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V}{c^2}\right)^{n-1} \zeta d(V/c^2). \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

У цьому співвідношенні значення $\alpha_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (Vc^{-2})^{n-1} \zeta \, d(V/c^2)$ є ніщо інше, як центральні моменти оберненої функції. Тому (5.2.7) набуває вигляду

$$\left\langle V(V/c^2)^n \right\rangle = -n \langle V \rangle \alpha_{n-1}. \tag{5.2.8}$$

Отже, характеристична функція $\chi(q)$ оберненої функції $\zeta = \zeta(V/c^2)$ виражається через $\left\langle V(V/c^2)^n \right\rangle$ за формулою

$$\chi(q) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\langle V(Vc^{-2})^{n+1} \right\rangle}{(n+1)! \langle V \rangle} \mathrm{i}^n q^n. \tag{5.2.9}$$

Застосувавши обернене перетворення Фур'є, остаточно одержуємо формулу (5.2.1).

Отже, основне співвідношення (5.2.1) для методу діагностики дає змогу визначити властивості окремих елементів структурованого середовища за допомогою нелінійних довгих хвиль.

5.3 Визначальні параметри хвиль для методу діагностики

Використання запропонованого методу пов'язане із знаходженням коефіцієнтів $\left\langle V(V/c^2)^n\right\rangle$ степеневого ряду (5.2.1). Ці коефіцієнти тим чи іншим способом вдається отримати із закономірностей еволюції хвильових полів. Укажемо декілька способів.

Найпростішим, на наш погляд, є спосіб, в якому експериментально визначають функційну залежність $\langle V\rangle = \langle V\rangle(p)$ простим зважуванням тестовного шматка (якщо така процедура можлива) при різних значеннях тиску. Звичайно, при цьому потрібно бути впевненим у тому, що виконуються умови моделі баротропного середовища. Потім, застосувавши рекурентну формулу (5.2.2), отримуємо потрібний ряд $\left\langle V(V/c^2)^n\right\rangle$ при $n \geq 2$ для визначення співвідношення (5.2.1). Проте ясно, що не завжди є можливість провести такий експеримент, наприклад, з геофізичним середовищем у природних умовах. Переваги діагностики за допомогою хвильової дії очевидні. Особливо це стосується середовищ складної структури, зокрема геофізичного середовища.

Можливим способом визначення функційної залежності $\langle V\rangle(p)$ є експеримент, в якому швидкість ударної хвилі знаходимо в лагранжевих масових координатах. Згідно з першим співвідношенням виразу (1.4.8)

$$D = \sqrt{(p_1 - p_0)/(\langle V_0\rangle - \langle V_1\rangle)}$$

на ударній хвилі вдається визначити $\langle V\rangle(p)$ за відомими D і p. Можна також застосувати друге співвідношення (1.4.8) для знаходження $\langle V\rangle = \langle V\rangle(p)$

$$u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0)(\langle V_0\rangle - \langle V_1\rangle)}.$$

Визначивши в експерименті масову швидкість u_1 і тиск p_1 за ударним фронтом, обчислюємо $\langle V_1\rangle$. Необхідно проводити експеримент з вимірювання параметрів ударної хвилі для різних перепадів тиску. Тоді отримаємо залежність $\langle V\rangle = \langle V\rangle(p)$. У такий спосіб знаходимо коефіцієнти $\left\langle V(V/c^2)^n\right\rangle$ для формули (5.2.1).

Для визначення коефіцієнтів $\left\langle V(V/c^2)^n \right\rangle$ універсальним інструментом можна вважати автомодельну хвилю розрідження. Розглянемо поширення цієї хвилі у періодичному середовищі. На автомодельну хвилю розрідження як окремий випадок простої хвилі безпосередньо впливає структура періодичного середовища. Простежимо за закономірностями поширення хвилі розрідження з метою їх використання для діагностики властивостей середовища. Автомодельна хвиля розрідження виникає у періодичному нерелаксівному середовищі після зняття навантаження на межі. Фронт хвилі рухається з деякою постійною швидкістю. На рис. 5.2 показано хвилі розрідження для деяких середовищ. Відношення початкового тиску в середовищі p до тиску на межі p_0 було задано рівністю $p/p_0 = 10$. Елементарна структура періодичного середовища складається з двох прошарків однакової довжини в лагранжевих масових координатах ($\varkappa = 0,5$) з відно-

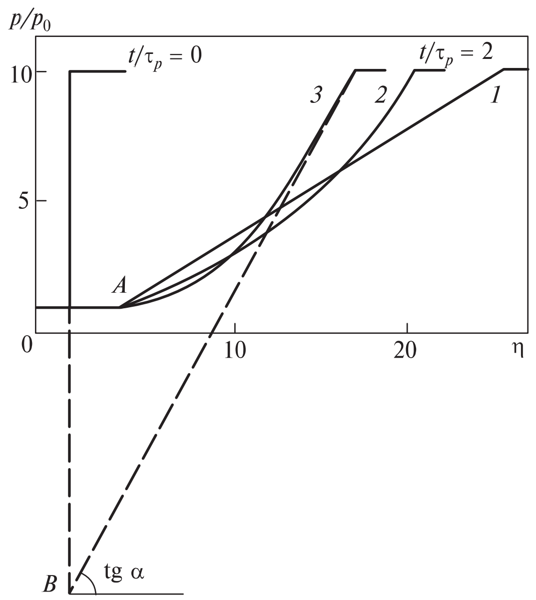

Рис. 5.2. Автомодельні хвилі розрідження: *1* — однорідне середовище; *2* — періодичне з $c_1/c_2 = \sqrt{2}/5$; *3* — періодичне з $c_1/c_2 = 5/\sqrt{2}$

шенням об'ємів $V_1/V_2 = 2$ ($V_1 = 4/3$, $V_2 = 2/3$). Щоб співвіднести результати різних середовищ, проведено нормування за усередненим питомим об'ємом та швидкістю поширення малих збурень. У безрозмірних змінних це означає, що $\langle V \rangle = \langle V^2/c^2 \rangle = 1$ при $p = p_0$. Масова швидкість і тиск зв'язані через співвідношення (5.1.6). Профілі тиску, які вирахувано з (1.4.5), показано на рис. 5.2 у вигляді безрозмірних залежностей тиску p/p_0 від лагранжевої масової координати $\eta = s/\tau_p(p_0/\langle V \rangle)^{1/2}$.

Для гранично великого тиску швидкість окремих ділянок хвилі розрідження можна записати так:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} = \frac{\Delta p}{\sqrt{\langle c^2 \rangle}} + \frac{\langle c^4/V_0 \rangle}{(\langle c^2 \rangle)^{3/2}}. \tag{5.3.1}$$

Тому при $p \gg \langle V_0^2/c^2 \rangle^{-1/2}$ нахил профілю хвилі прямує до величини $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\langle c^2 \rangle}/t$ (рис. 5.2). Отже, за нахилом профілю хвилі вдається визначити значення $\sqrt{\langle c^2 \rangle}$. До того ж, в окремому випадку $s = 0$ з рівняння (5.3.1) маємо

$$\Delta p_1 = -\langle c^2 \rangle^{-1} \left\langle \frac{c^4}{V_0} \right\rangle.$$

Величину Δp_1 визначаємо з рис. 5.2. Вона чисельно дорівнює відрізку AB, який відсікається асимптотикою, проведеною до профілю хвилі. Знайшовши відрізок AB, вдається визначити усереднену характеристику періодичного середовища $\langle c^4/V_0 \rangle$. Вказані характеристики можуть виявитися корисними при визначенні властивостей середовища. Задавши різні величини p, знаходимо функційну залежність $\langle c^4/V \rangle(p)$, диференціювання якої за p дає $\langle c^2 \rangle$. Порівняння величини $\langle c^2 \rangle$, знайденої таким способом, із середньою квадратичною швидкістю, визначеною за нахилом профілю хвилі розрідження, вкаже на точність застосування моделі баротропного середовища.

В окремому випадку для середовищ, в яких співвідношення $\langle V/c^2 \rangle$ не залежить від ζ ($c_1/c_2 = \sqrt{2}$), профіль автомодельної хвилі розрідження буде прямолінійним, як і в однорідному середовищі (рис. 5.2, крива *1*). Тому вказані середовища в цьому розумінні не відрізняються від однорідних. Для інших періодичних середовищ профіль хвилі розрідження відхилятиметься від прямолінійного. Початкові властивості зазначених середовищ підібрано так, щоб при $p \to \infty$ усереднена характеристика $\langle c^2 \rangle$ для них збігалася. Викладене засвідчує, що асимптотики кривих *2* і *3* мають однаковий нахил. Водночас видно, що для помірного тиску профілі 2 і 3 розрізняються через значний вплив неоднорідностей.

Автомодельність руху хвилі розрідження, як уже наголошувалося, дає швидкість поширення ds/dt за різного тиску, що визначає залежність $\langle V^2/c^2 \rangle = \langle V^2/c^2 \rangle(p)$. Знову ж, для $n \geq 3$ всі інші величини $\langle V(V/c^2)^n \rangle$ знаходимо за формулою (5.2.2). Якщо за певного тиску кривина профілю хвилі розрідження найбільша, тобто, якщо структура дуже змінює збурення, точність визначення коефіцієнтів є найвищою, а отже, структуру середовища можна визначити щонайточніше.

5.4 Апроксимація середовища шарувато-періодичним середовищем

Проаналізуємо особливості практичного застосування формули (5.2.1). По-перше, нас цікавить точність визначення коефіцієнтів степеневого ряду $\langle V(V/c^2)^n \rangle$ з експериментальних даних. По-друге, розглянемо точність опису структури середовища скінченним рядом (5.2.1).

Зупинимося на першому зі згаданих вище питань. Вважатимемо, що з експерименту відомі хвилі розрідження (рис. 5.2). Оцінимо точність визначення коефіцієнтів $\langle V(V/c^2)^n \rangle$ для ряду (5.2.1). За кривиною профілю тиску числовим диференціюванням визначаємо послідовність $\langle V(V/c^2)^n \rangle$ для $n \geq 3$. Таку саму послідовність можна отримати іншим способом. У розрахунках задаємо конкретну, наперед визначену структуру. Структура залежить від тиску, тобто кожному тиску відповідає своя структура:

$$\rho(\xi) = \rho_0(\xi) + \Delta p/c^2,$$

а це означає, що з розрахунків відома і величина $V(\xi)/(c(\xi))^2$. Виконавши усереднення, знаходимо величину $\langle V(V/c^2)^n\rangle$. Порівняння послідовностей $\langle V(V/c^2)^n\rangle$, які знайдені двома способами, показує, що при малих n вони узгоджуються добре, а із збільшенням n їх значення розходяться, не перевищуючи похибки 10 %. Ця похибка пов'язана з тим, що в числовому диференціюванні використовують скінченні різниці. Тому в разі застосування числового диференціювання профілю хвилі для визначення коефіцієнтів $\langle V(V/c^2)^n\rangle$ отримуємо похибку в межах 10 %. Крім того, існує деяка суто експериментальна похибка під час визначення профілю хвилі розрідження. Втім звернемо увагу тільки на точність самого методу.

Проаналізуємо друге із згаданих питань — точність опису структури середовища скінченним рядом (5.2.1). Покажемо, що скінченний ряд з $2N-1$ членами апроксимує діагностовне середовище N компонентним середовищем. Випишемо ланцюжок тотожностей для довільної функції

$$\begin{aligned} 2\pi f(-x) &= F\left[F[f(x)](q)\right](x) = F\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n q^n}{n!}\alpha_n\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n\alpha_n}{n!}2\pi(-\mathrm{i})^n\delta^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Тут використано відомі співвідношення [62]

$$F\left[F[f(x)](q)\right](x) = 2\pi f(-x),$$

$$F[q^n](x) = 2\pi(-\mathrm{i})^n\delta^{(n)}(x).$$

Тому довільну функцію можна записати у вигляді ряду

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n!}\delta^{(n)}(x). \tag{5.4.1}$$

Покажемо, що скінченний ряд (5.2.1) апроксимує шукану функцію східчастою функцією. Розглянемо східчасту функцію, що складається з N сходинок:

$$f_1(x) = \begin{cases} \varphi_1, & 0 < x \le b_1, \\ \varphi_2, & b_1 < x \le b_2, \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_N, & b_{N-1} < x \le b_N\,. \end{cases} \tag{5.4.2}$$

Її можна записати через функції Хевісайда

$$\begin{aligned} f_1(x) \quad &= \varphi_1[\Theta(x) - \Theta(x-b_1)] + \varphi_2[\Theta(x-b_1) - \Theta(x-b_2)] + \ldots \\ &\ldots + \varphi_N[\Theta(x-b_{N-1}) - \Theta(x-b_N)]. \end{aligned}$$

Очевидно, що збільшивши числа розбиття N і підібравши величини φ_i та b_i, можна наблизити будь-яку інтегровну функцію $f(x)$ східчастою функцією f_1. Зручно використовувати запис

$$\begin{aligned} f_1(-x) = \varphi_1[\Theta(x+b_1) - \Theta(x)] + \varphi_2[\Theta(x+b_2) - \Theta(x+b_1)] + \ldots \\ \ldots + \varphi_N[\Theta(x+b_N) - \Theta(x+b_{N-1})], \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

який випливає безпосередньо з попереднього співвідношення, якщо згадати очевидний зв'язок

$$\Theta(x) = 1 - \Theta(-x).$$

Розвинемо функцію Хевісайда $\Theta(x+b)$ у ряд Тейлора біля точки x:

$$\Theta(x+b) = \Theta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \Theta^{(n)}(x). \tag{5.4.4}$$

Відомо [39], що похідна від функції Хевісайда $\Theta(x)$ є $\delta(x)$-функція, тому $\Theta^{(n+1)}(x) = \delta^{(n)}(x)$. Тепер перепишемо співвідношення (5.4.3), використавши вирази (5.4.1) і (5.4.4). Досі кількість сходинок у функції $f_1(x)$ вважали безмежно великою:

$$\varphi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_1^{n+1}}{(n+1)!}\, \delta^{(n)}(x) + \varphi_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_2^{n+1} - b_1^{n+1}}{(n+1)!} \delta^{(n)}(x) + \ldots$$

$$\ldots + \ \varphi_N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_N^{n+1} - b_{N-1}^{n+1}}{(n+1)!} \delta^{(n)}(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \delta^{(n)}(x). \quad (5.4.5)$$

Це співвідношення показує, що використання скінченного ряду $\sum_{n=0}^{2N-1} \frac{\alpha_n}{n!} \delta^{(n)}(x)$ справа і N перших членів зліва дає змогу наблизити шукану функцію $f(x)$ східчастою функцією $f_1(x)$, причому число сходинок дорівнюватиме N. Іншими словами, якщо необхідно відтворити структуру середовища за допомогою N прошарків, які періодично повторюються, необхідно знати $2N - 1$ моментів α_n.

Для зручності можна переписати співвідношення (5.4.5) у розгорненому вигляді. Для цього домножимо його на x^n і проінтегруємо вздовж усієї осі x. Одержимо нелінійну систему рівнянь відносно невідомих $b_1, b_2, \ldots, b_N, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_N$:

$$\varphi_1 b_1 + \varphi_2(b_2 - b_1) + \varphi_3(b_3 - b_2) + \ldots + \varphi_N(b_N - b_{N-1}) = \alpha_0,$$

$$\varphi_1 b_1^2 + \varphi_2(b_2^2 - b_1^2) + \varphi_3(b_3^2 - b_2^2) + \ldots + \varphi_N(b_N^2 - b_{N-1}^2) = 2\alpha_1,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\varphi_1 b_1^{2N-1} + \varphi_2(b_2^{2N-1} - b_1^{2N-1}) + \varphi_3(b_3^{2N-1} - b_2^{2N-1}) + \ldots$$

$$\ldots + \ \varphi_N(b_N^{2N-1} - b_{N-1}^{2N-1}) = (2N-1)\alpha_{2N-2}. \quad (5.4.6)$$

Величина φ_1 наперед відома, згідно з нормуванням $\varphi_1 = 1$.

Тепер, якщо під b_i розуміти розбиття $(V/c^2)_i$, а під φ_i — розбиття ζ_i, отримаємо систему рівнянь для визначення структури шарувато-періодичного середовища. Розв'язок цієї системи рівнянь дає залежність величини V/c^2 на періоді $\zeta \in [0,\, 1]$ структури у вигляді східчастої функції.

Підкреслимо окремий випадок періодичного середовища, для якого величина V/c^2 є сталою на періоді. Таке середовище, як уже наголошено у підрозд. 5.1, не відрізняється від однорідного під час поширення у ньому довгих нелінійних хвиль. Такий самий результат випливає із системи (5.4.6). Дійсно, для однорідного середовища моменти визначають за формулою

$$\alpha_n = \frac{\langle V(Vc^{-2})^{n+1}\rangle}{(n+1)\langle V\rangle} = \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

Тут, як і раніше, використано умови нормування $\langle V^2/c^2\rangle_0 = (V^2/c^2)_0 = 1$, $\langle V\rangle_0 = V_0 = 1$. Тому значення з правого боку системи рівнянь дорівнюють $b \equiv Vc^{-2} = \text{const}$. Легко перевірити, що розв'язком системи буде $b_1 = b_2 = \ldots = b_N = b = 1$, $\varphi_1 = 1$, а значення величин φ_i — будь-які для $i \geq 2$. Це відповідає шарувато-неоднорідному середовищу з $V/c^2 \neq f(\zeta)$, зокрема, таким середовищем може бути однорідне середовище.

Згідно з асимптотичною усередненою моделлю структурованого середовища, період структури безмежно малий, тому запропонований метод діагностики не може вказати на точне розміщення окремих елементів структури в періоді. Отже, за допомогою описаного методу можна визначати лише масовий вміст окремих компонентів.

Для прикладу на рис. 5.3 представлено розрахункові результати з визначення структури шарувато-періодичного середовища, яке належним чином можна наблизити до діагностовного середовища. На рис. 5.3, *а* початковим є середовище із структурою на періоді $V/c^2 = 1-\zeta$, водночас на рис. 5.3, *б* задано структуру $V/c^2 = 0,2 + 0,8(1-\zeta)^2$. Щоб апроксимувати діагностовне середовище шарувато-періодичним середовищем, яке має N прошарків на періоді, необхідно знати $2N-1$ величину $\langle V(Vc^{-2})^n\rangle$ для скінченного ряду (5.2.1). Якщо вважати, що $2N-1$ усереднених величин $\langle V(Vc^{-2})^n\rangle$ збігаються попарно для діагностовного і шарувато-неоднорідного середовищ, то ці усереднені величини $\langle V(Vc^{-2})^n\rangle$ для $n \leq 2N-1$ можуть бути обчислені з відомого розподілу $V/c^2 = 1-\zeta$ для рис. 5.3, *а*, а також з розподілу $V/c^2 = 0,2+0,8(1-\zeta)^2$ для рис. 5.3, *б*. Величини $\langle V(Vc^{-2})^n\rangle$ є різними при $n > 2N-1$ для діагностовного і шарувато-періодичного

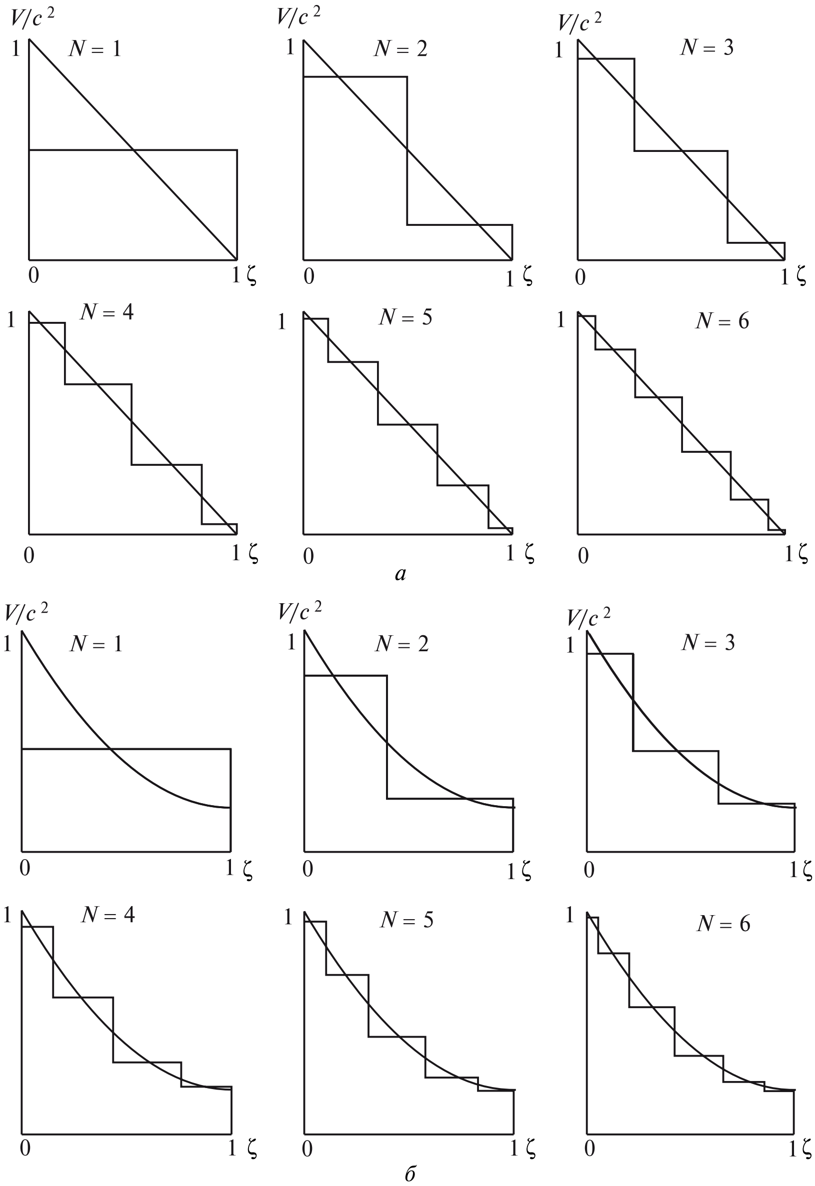

Рис. 5.3. Наближення періодично-неоднорідних середовищ з розподілом $V/c^2 = 1 - \zeta$ (a) і з розподілом $V/c^2 = 0,2 + 0,8(1-\zeta)^2$ ($б$) шарувато-періодичними середовищами (N — число прошарків на періоді)

середовищ. З одного боку, розрахункові розподіли для шарувато-періодичних середовищ найліпше апроксимують наперед задане середовище. З іншого боку, рис. 5.3 ілюструє точність наближення діагностовного середовища скінченним рядом (5.2.1).

У цьому розділі теоретично обґрунтовано метод діагностики властивостей середовищ довгими нелінійними хвилями в рамках асимптотичної усередненої моделі структурованого середовища. Показано, що за допомогою запропонованого методу можна апроксимувати діагностовне середовище N компонентним середовищем і визначити масовий вміст цих компонентів.

Розділ 6

Рівняння стану пісковику за квазістатичного навантажування

Осадові породи, наприклад пісковики, характеризуються зернистою структурою [124, 130, 193], в якій окрема зернина значно твердіша за міжзерновий цементувальний матеріал [138, 139]. Одним із проявів недосконалої міжзернової цементації є пористість [124, 130, 193], тобто характеристика, що визначає проникність породи і слугує важливим технологічним чинником під час видобутку нафти [124, 130]. Крім того, пористість полегшує проникнення води у зони міжзернових контактів [124, 130], що знижує пружні модулі [109, 121, 230] та впливає на фактори сейсмічної дисипації [109, 121, 194, 230] відповідної породи.

Пісковики крім звичайних статичних властивостей мають непередбачувані й навіть незвичні динамічні властивості [115, 129, 138, 139, 141, 142, 169]. Вивчення таких властивостей насамперед спрямоване на побудову рівнянь стану природних середовищ. Розуміння внутрішніх процесів розкриває можливості для фізичного та математичного моделювання динаміки пісковику під дією механічних навантажувань. Однак дослідити в деталях перебіг усіх складних внутрішніх процесів поки що неможливо. Насправді, важливий не стільки детальний перебіг внутрішніх процесів, скільки їх вплив на співвідношення між макропараметрами, що характеризують динамічну поведінку середовищ. Для механічних навантажувань до таких визначальних макропараметрів належать деформація і напруження, а зв'язок між цими величинами є нічим іншим, як рівнянням стану. Певна річ, що рівняння стану є ключовим співвідношенням під час моделювання поведінки гірських порід у різноманітних геофізичних умовах [141].

Експериментальні залежності деформації від напруження для гірських порід під дією механічних навантажувань вказують на нелінійну поведінку цих середовищ. Нижче запропоновано феноменологічну модель для опису деформації пісковику під дією повільного (квазістатичного) навантажування.

Пісковики під дією механічних навантажувань проявляють суттєво неоднозначну залежність деформації від напруження. Зокрема, експериментальні дані щодо гістерезисних петель за повільних циклічних навантажувань зразків пісковику добре відомі, і їх можна вважати класичними [111,115,129,142]. Моделювання відомих експериментів важливе для визначення поведінки гірських порід у різноманітних геофізичних умовах, наприклад, під час сейсмічного пошуку або розпізнавання відгуку від землетрусу, вибуху тощо [141]. Моделювання залежності деформації від напруження по суті дає змогу визначити рівняння стану для пісковику. Виявляється, що побудова адекватної моделі механічної поведінки пісковику є досить складною задачею, оскільки в експерименті, як правило, вимірюють тільки макропараметри (наприклад напруження та деформацію) і немає можливості дослідити процеси всередині зразка. Згідно з експериментами [129], характерні властивості пісковику визначаються малим об'ємом матеріалу між контактами зерен. Проте ці експерименти ще не дають повного уявлення про внутрішні процеси, які відбуваються в пісковику під дією квазістатичного навантажування. Існують моделі, що якісно описують окремі властивості співвідношення між напруженням і деформацією. Передусім слід указати на моделі Герца—Міндліна (Hertz-Mindlin model) [169] і Преісаха—

Маєргойза (Preisach-Mayergoyz model) [141]. Однак застосування цих моделей ускладнюється проблемою встановлення відповідності між модельними елементами та реальними фізичними процесами всередині зразка. Крім того, штучний характер зв'язку між розподілом допоміжних гістерезисних елементів і максимальним рівнем навантажування значно звужує можливості цих моделей для прогнозування поведінки пісковиків.

Низку відомих експериментів [115, 129, 138, 139, 141, 142] вдається описати у межах моделі, запропонованої для моделювання поведінки гірських порід за повільних навантажень [23, 25, 223, 224]. Відгук внутрішніх процесів, які зумовлені порушенням рівноваги під дією інтенсивних навантажувань, на макрорівні моделюється трьома механізмами:

- релаксаційним стандартного твердого тіла;
- пружним з прилипанням;
- перманентної пластичної деформації.

Належна комбінація цих механізмів дає змогу вивести деяку загальну залежність між напруженням і деформацією, хоча й без детального опису внутрішніх обмінних процесів. За допомогою такої феноменологічної моделі вдається описати якісно і кількісно зв'язок напруження—деформація, а також відтворити характерні експериментальні закономірності Дж. Боітнотта (Boitnott), Л.Б. Гільберта та ін. (Hilbert et al.), Т. Дарлінга та ін. (Darling et al.) [115,129,138,141,142] для пісковику Береа (Berea).

6.1 Аналіз експериментальних спостережень

Класичними експериментальними результатами щодо залежностей деформації від напруження прийнято вважати роботи Дж. Боітнотта [115, 141] (рис. 6.1, *а*), Л.Б. Гільберта та ін. [141, 142] (рис. 6.1, *б*), Дарлінга та ін. [129, 138] (рис. 6.1, *в*).

Вимірюваними величинами є одновісне навантаження та деформація. Експерименти [115, 129, 141, 142] проведено для зразків пісковику Береа. Зазначимо, що дуже часто, цитуючи роботу

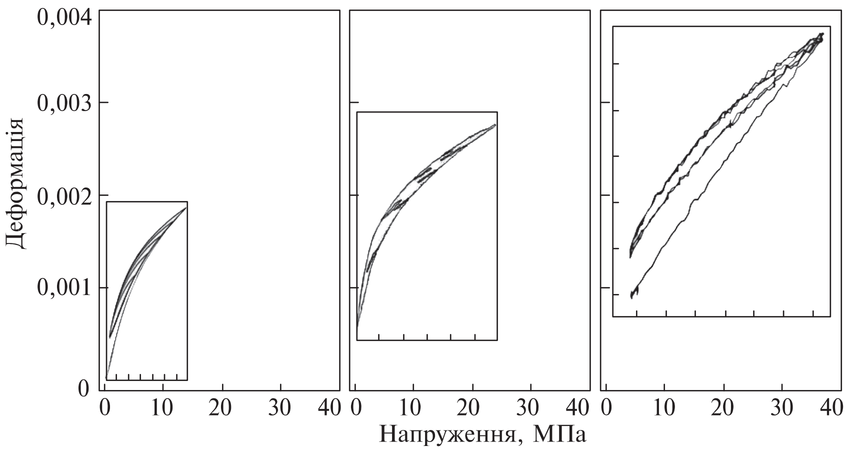

Рис. 6.1. Експериментальні дані для пісковику Береа (Berea): *а* — G.N. Boitnott [115]; *б* — R.A. Guyer et al. [141], L.B. Hilbert et al. [142]; *в* — T.W. Darling et al. [129]

[142], не вказують на початковий етап швидкого навантажування та розвантажування, після якого пісковик переходить у кондиційований стан. Надалі зразок пісковику у кондиційованому стані циклічно навантажують і розвантажують. У такому процесі вивчають залежність деформації від напруження (рис. 6.1, *б*).

Слід зазначити, що в різних експериментах початкову координату деформації вводять різними способами. Щоб зіставити всі експериментальні криві напруження—деформація, їх розміщують у спільних координатах на одному рисунку, виходячи з припущення, що для всіх трьох експериментальних кривих кінцеві точки з максимальним напруженням потрібно розмістити на найнижчій із можливих некондиційованих кривих, тобто на нижній кривій рис. 6.1, *в*. При цьому спільну початкову координату деформації потрібно вибрати з рис. 6.1, *а*, де показано початкову точку координат для некондиційованого стану пісковику. Усталеній термінології терміна "некондиційована крива" відповідає початкова крива, що виходить з нульової точки напруження для зразка, який не зазнавав навантажування протягом довгого періоду — порядку багатьох годин або діб (рис. 6.1, *а*). І навпаки, кривим на рис. 6.1, *б* відповідає “кондиційований” стан, тобто стан після багаторазового циклічного навантажування. На рис. 6.1, *б* початкову точку не показано, і, за винятком найвищої кінцевої точки, некондиційована крива відсутня. Оригінальні експериментальні рисунки мають різні масштаби, тому на рис. 6.1 експериментальні криві (з вилученням масштабних цифр на координатах) розміщено в спільних координатах. У цій процедурі для рис. 6.1, *а* збережено його власні координати, тоді як рис. 6.1, *б*, *в* зміщені для включення нульової точки напруження. Зміщення на рис. 6.1, *а* відсутнє, для рис. 6.1, *б* воно дорівнює 0,000 42, для рис. 6.1, *в* — 0,000 97.

Доречно зазначити, що цей підхід для визначення спільних координат не є ідеальним, оскільки вважали, що початкова (некондиційована) крива не залежить від швидкості навантажування, що, взагалі кажучи, виконується з певною точністю. З огляду на те що залежність від швидкості навантажування виявлена експериментально переважно для значних напружень, в першому (задовільному) наближенні такою залежністю можна знехтувати без відчутних наслідків для розташування кривих у межах спільної системи відліку.

Насамперед, з наведених графічних залежностей напруження від деформації видно їх екстремальну нелінійність, гістерезисність та пам’ять про кінцеву точку (в геофізиці цей ефект часто називають дискретною пам’яттю). У кондиційованому стані, який суттєво відрізняється від початкового, більшість гірських порід мають траєкторії напруження—деформація у вигляді петель під дією циклічних навантажувань. Ці петлі майже повторюють одна одну і, як правило, вигнуті. Як показує експеримент [129], процеси, що визначають поведінку пісковику і приводять до вказаних ефектів для багатьох гірських порід різного типу, відбуваються у невеликому об’ємі на контактах між зернами. Неоднозначна залежність деформації від напруження зумовлена внутрішніми обмінними процесами, які на макрорівні проявляються у релаксаційній поведінці пісковику.

Перший ефект, який впадає у вічі під час детального аналізу, — це характерна петлеподібна затримка деформації у відповідь на збільшення або зменшення зовнішнього навантажування.

Для підтвердження релаксаційної природи процесів у пісковику навіть за повільних навантажувань наведемо результати експерименту з відгуку зразка пісковику на короткі східцеподібні імпульси навантажування [175]. Зміна деформації не миттєво реагує на зміну навантажування, що свідчить про певні внутрішні релаксаційні процеси. Релаксаційна природа явища відгуку деформації на навантажування може бути також виявлена на кривих напруження–деформація, виміряних навіть у більш стандартних режимах для найрізноманітніших пісковиків [129], особливо для пісковику Меуле (Meule). Зокрема, звернемо увагу на те, що після того, як навантажування стає сталим, зразок продовжує деформуватися ще впродовж деякого часу. Виходячи з цього, опишемо релаксаційні особливості пісковику в альтернативних термінах феноменологічного релаксаційного механізму стандартного твердого тіла, що виникає як нелінійне узагальнення добре обґрунтованої релаксаційної моделі в межах стандартного лінійного твердого тіла.

Аналізуючи експериментальні залежності із статті [129] (зокрема, рис. 1), звернемо увагу на те, що протилежні сторони кожної петлі не повністю збігаються навіть за безмежно повільного навантажування, тобто петлі виникають незалежно від швидкості навантажування. Це вказує на те, що крім релаксаційних процесів існують ще й інші незворотні внутрішні процеси, що зумовлюють утворення гістерезисної петлі. Допускаємо, що модельному механізму, який відповідальний за вказаний ефект, потрібно приписати певний вид тертя. Тому, зосередившись на механізмі, який надалі цитуватимемо як пружний механізм з прилипанням (див. с. 133), опишемо окремі напруженодеформаційні властивості пісковику, які не підпорядковуються релаксаційному механізму.

Нарешті, цілісна концепція поведінки пісковику була б неповною без третього механізму — механізму перманентної пластичної деформації (див. стор. 133). Цей механізм потрібний для пояснення експериментальних даних, які вказують, що некондиційованому та кондиційованому станам відповідають різні експериментальні криві.

6.2 Механізми квазістатичного навантажування

Розглянемо одновісне квазістатичне навантажування зразка гірської породи. У цьому випадку рівняння руху для більшої частини зразка може бути написано через одну просторову координату

$$\rho\ddot{u} = \partial\sigma/\partial x. \tag{6.2.1}$$

Для квазістатичних навантажувань можна вважати, що ліва частина рівняння дорівнює нулю. Як завжди, це наближення дійсне, якщо час поширення хвилі $\tau_L = L/c$ (де L — довжина зразка, c — швидкість звуку) набагато менший за час навантажування $\tau_\sigma = \sigma/\dot{\sigma}$, тобто, $\tau_L \ll \tau_\sigma$. Тут напруження σ пов'язане з деформацією $\varepsilon \equiv \partial u/\partial x$ як через пружний, так і непружний механізм. У такому наближенні напруження є однорідним по довжині зразка і дорівнює з точністю до знака абсолютній величині зовнішнього навантажування, яке відіграє роль зовнішнього параметра керування. Саме з цієї причини приймаємо, що напруження σ і деформації ε мають додатні значення, як це часто вважають в експериментах з квазістатичного навантажування.

Фактично для інтерпретації квазістатичних експериментів достатньо проаналізувати зв'язок між напруженням і деформацією. Ретельно виконані експерименти [115, 129, 141, 142] забезпечують добре підґрунтя для розуміння головних пружних та непружних механізмів, важливою властивістю яких є нелінійність. Вдається формалізувати модельні уявлення і перевірити достовірність початкових теоретичних положень, зіставивши одержані теоретичні результати з експериментальними. Цілісну картину динамічної поведінки гірських порід вдається описати трьома механізмами, які моделюють внутрішні процеси в зразках за квазістатичного навантажування.

6.2.1 Релаксаційний механізм стандартного твердого тіла

Вважаємо, що перша частина ε^r загальної деформації ε пов'язана з релаксаційним механізмом, що зумовлений внутрішніми обмінними процесами. Саме верхній індекс r вказує на внесок ε^r зазначеного механізму в загальну деформацію ε.

Аналіз експериментальних графіків (рис. 6.1) показав, що деформація ε може залежати від часу t не лише опосередковано через напруженість $\sigma(t)$, а й явно, тобто $\varepsilon = \varepsilon(\sigma(t), t)$. Явна залежність ε від часу зумовлена нерівноважним станом середовища. Дійсно, у такому стані ε змінюється з часом t навіть при $\sigma = \mathrm{const}$. Таким чином, деформація може набувати різних значень за одної і тої самої величини навантажування. Однак наше головне припущення, яке буде підтверджено, полягає в тому, що деформація також чутлива до зміни навантажування, а точніше — до похідної навантажування від часу $\dot{\sigma}$.

Найзагальніша лінійна теорія, яка враховує усі зазначені вище ефекти (тобто залежність деформації від часу як явну, так і опосередковану через напруженість σ та похідну напруженості від часу $\dot{\sigma}$), може бути отримана з добре відомої феноменологічної моделі стандартного лінійного твердого тіла [229]

$$\tau\dot{\varepsilon}^r + \varepsilon^r = \frac{\sigma}{M_e} + \frac{\dot{\sigma}\tau}{M_f}. \tag{6.2.2}$$

Співвідношення (6.2.2) характеризується трьома параметрами, які часто трактують як час релаксації τ і два пружні модулі — рівноважний M_e та заморожений M_f. Обмежившись квазістатичними навантажуваннями, вважаємо $\tau_L \ll \tau$.

Щодо можливого фізичного обґрунтування моделі стандартного лінійного твердого тіла часто звертаються до уявлень про прихований внутрішній релаксаційний процес [76,81]. У підрозд. 1.1 розглянуто феноменологічний формалізм, що приводить до динамічного рівняння стану, якщо враховувати внутрішню релаксацію. Такі підходи, як зазначено вище, є перспективними з огляду на можливість розвивати релаксаційні моделі, не конкретизуючи внутрішні процеси. Здебільшого релаксаційні моделі застосовують для опису динамічних процесів. На відміну від цього ми використали релаксаційний підхід і для опису квазістатичного навантажування.

Одним з важливих результатів цієї теорії є те, що відгук на гармонічне збурення $\sigma = \sigma_a \cos(\omega t + \varphi)$ для великих часів (тобто при $t/\tau \gg 1$) може мати два принципово різні режими: рівноважний $\varepsilon^r = \sigma/M_e$ для низьких частот $\omega\tau \ll 1$ та заморожений $\varepsilon^r = \sigma/M_f$ для високих частот $\omega\tau \gg 1$.

На жаль, інший засадничий результат, що описує відгук за великих часів (тобто $t/\tau \gg 1$) для навантажувань зі сталою швидкістю $\dot{\sigma} = \sigma/t = \sigma_0/t_0 = \text{const}$:

$$\varepsilon^r = \frac{\sigma_0}{M_e}\frac{t}{t_0} - \sigma_0 \frac{M_f - M_e}{M_f M_e}\frac{\tau}{t_0}, \tag{6.2.3}$$

зазвичай подають без другого члена справа, нехтування яким призводить до втрати важливої інформації. Виявляється, що малий (другий) член справа відіграє критичну роль для розуміння експериментальних даних із квазістатичного навантажування. Внески двох членів у рівнянні (6.2.3) різні за своєю природою. Перший член містить рівноважний модуль M_e і може бути визначений за безмежно повільного навантажування. Другий член відповідає за регулярний пружний зсув, який пропорційний різниці $M_f - M_e$, часу релаксації τ і швидкості навантажування $\dot{\sigma} = \sigma_0/t_0$. Навпаки, на початку навантажування ($t/\tau \ll 1$) миттєвий відгук на ту саму величину навантажування $\sigma = (\sigma_0/t_0)t$ має тільки пружний внесок σ/M_f і характеризується замороженим пружним модулем M_f:

$$\varepsilon^r = \frac{\sigma_0}{M_f}\frac{t}{t_0}. \tag{6.2.4}$$

Щоб краще зрозуміти наведені вище особливості впливу внутрішніх релаксаційних процесів на макропараметри за квазістатичного навантажування, розглянемо розрахункові залежності деформації від напруження (рис. 6.2). За навантажування зі сталою швидкістю $\dot{\sigma} = \mathrm{const}$ (рис. 6.2, *а*) криві асимптотично прямують до прямих, паралельних рівноважній прямій (штрихпунктирна лінія). Причому зсув асимптотики Δ відносно рівноважної лінії пропорційний швидкості навантажування $\dot{\sigma}$ і часу релаксації τ, тобто $\Delta \sim \tau\dot{\sigma}$. Початкова умова стає неістотною через деякий час Δt, більший за час релаксації $\Delta t > \tau$. Дійсно, вихід на асимптотику відбувається за час τ (рис. 6.2, *а*). Гістерезисна петля з'являється для часового інтервалу розвантажування Δt_{AB}, значно більшого за час релаксації τ (рис. 6.2, *б*). У цьому випадку петля замикається через точку повернення A. Проте якщо час розвантажування не перевищує час релаксації ($\Delta t_{CD} < \tau$, $\Delta t_{EF} < \tau$), то петлі або не утворюються взагалі, або замикаються вище точки повернення C (рис. 6.2, *в*). Згадані особливості залежності деформації від напруження прояснюють вплив внутрішнього релаксаційного процесу на макропараметри, а також вказують на можливість застосування аналогічного підходу до моделювання експериментальних результатів.

Подібно до моделі стандартного лінійного твердого тіла, головна особливість нашого підходу полягає в принциповій можливості стежити як за зовнішнім навантажуванням σ, так і за його часовою похідною $\dot{\sigma}$. Скориставшись основними ідеями, які закладені в моделі стандартного лінійного твердого тіла, ми розробили загальну теорію, що додатково допускає опис ефектів нелінійної пружності [197]. У результаті запропоновано динамічне рівняння стану

$$\tau \frac{d}{dt}\left[\varepsilon^r - \varepsilon^r_f(\sigma)\right] + \varepsilon^r - \varepsilon^r_e(\sigma) = 0, \tag{6.2.5}$$

яке задає співвідношення між деформацією ε^r, напруженням σ та їх першими похідними $\dot{\varepsilon}^r$, $\dot{\sigma}$ і враховує нелінійності через суттєво нелінійні функційні залежності деформацій від напруження як для термодинамічного рівноважного стану $\varepsilon^r_e(\sigma)$ за безмежно повільного навантажування, так і для замороженого псевдорівноважного стану $\varepsilon^r_f(\sigma)$ за безмежно швидкого навантажування. Час повільного та швидкого процесів визначають у порівнянні з типовим часом релаксації прихованого внутрішнього процесу τ. Формально залежність $\varepsilon_e^r = \varepsilon_e^r(\sigma)$ можна трактувати як рівняння стану в граничному випадку миттєвої релаксації $\tau \to 0$, а залежність $\varepsilon_f^r = \varepsilon_f^r(\sigma)$ — як рівняння стану у випадку відсутності релаксації $\tau \to \infty$.

Звернемо увагу на те, що подібно до лінійної теорії, немає потреби конкретизувати внутрішні обмінні процеси для виведення рівняння (6.2.5). Так чи інакше, але макроскопічні характеристики $\varepsilon_e^r(\sigma)$, $\varepsilon_f^r(\sigma)$ і τ мають зрозумілий фізичний сенс. Тому

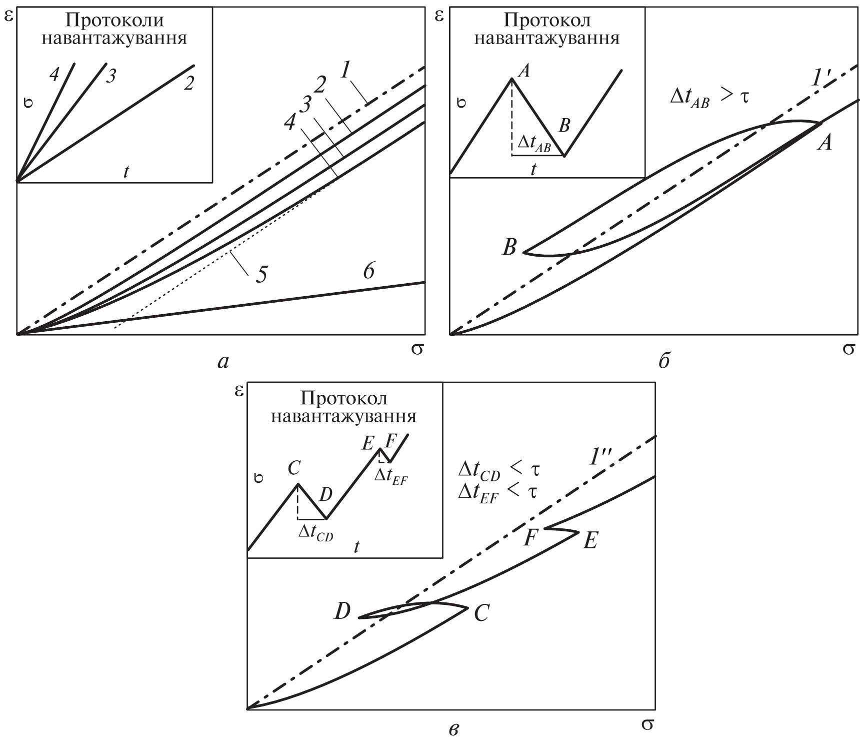

Рис. 6.2. Розрахункові залежності деформації від напруження для моделі стандартного лінійного твердого тіла. *Криві*: *1*, *1′*, *1″* — рівноважний стан, *2*—*4* — розрахункові дані за різних навантажувань, *5* — асимптотика, *6* — заморожений стан

вид функційних залежностей $\varepsilon_e^r(\sigma)$ та $\varepsilon_f^r(\sigma)$ вдається підібрати з аналізу відомих експериментальних результатів.

Модель, яку визначено динамічним рівнянням стану (6.2.5), називаємо моделлю релаксаційного механізму стандартного твердого тіла. Така назва передусім відображує характерний зв'язок двох різних нелінійних пружних рівнянь стану, що подібний до зв'язку двох лінійних рівнянь стану в теорії лінійного твердого тіла (6.2.2) [229]. Рівняння рівноважного стану $\varepsilon_e^r(\sigma)$ визначимо звичайною формулою

$$\varepsilon_e^r(\sigma) = (E_e(\sigma))^{-1}\sigma, \tag{6.2.6}$$

причому залежність модуля Юнга $E_e(\sigma)$ запишемо через емпіричне співвідношення для апроксимації низки експериментальних даних (див. статтю [153] і зроблені там посилання)

$$E_e(\sigma) = E_e^+ + (E_e^- - E_e^+)\exp(-D\sigma). \tag{6.2.7}$$

Сталі E_e^-, E_e^+, D виберемо з числового експерименту поблизу значень, наведених у статті [153]. Для визначеності задамо функційну залежність для замороженого стану таким наближенням:

$$\varepsilon_f^r(\sigma) = a\varepsilon_e^r(\sigma), \tag{6.2.8}$$

де множник a — стала величина ($0 < a < 1$). Наприклад, у лінійній теорії співвідношення (6.2.8) точно підтверджується тим, що відношення рівноважної швидкості звуку до замороженої швидкості звуку не залежить від тиску.

Вибравши деяку конкретну залежність навантажування від часу $\sigma = \sigma(t)$ (тобто протокол навантажування), можна розв'язати рівняння (6.2.5)–(6.2.8). Як правило, використовуватимемо початкові умови у вигляді $\varepsilon^r(t=0) = \varepsilon_e^r(\sigma(t=0))$.

З того часу як величину $\varepsilon_f(\sigma)$ визначено через співвідношення (6.2.8), динамічне рівняння стану (6.2.5) можна вважати заданим, якщо відомо рівняння рівноважного стану пісковику $\varepsilon_e = \varepsilon_e(\sigma)$ і характерний час релаксації τ. Релаксаційний механізм, властивий внутрішнім обмінним процесам, проілюстровано на рис. 6.3. Протоколи навантажування якісно відповідають протоколам навантажування із роботи Дж. Боітнотта (див. рис. 1 у статті [141]), а також з роботи Л.Б. Гільберта і співавт. (див. рис. 2 у статті [141]). Сталі для рівнянь стану (6.2.5)–(6.2.8) для обох випадків приймаємо однаковими. Найкращого наближення з експериментами досягнуто для часу релаксації $\tau = 18$ с, тоді як інші сталі мали такі значення: $E_e^- = 1,5$ ГПа; $E_e^+ = 32$ ГПа; $D = 0,05$ МПа$^{-1}$; $a = 0,7$.

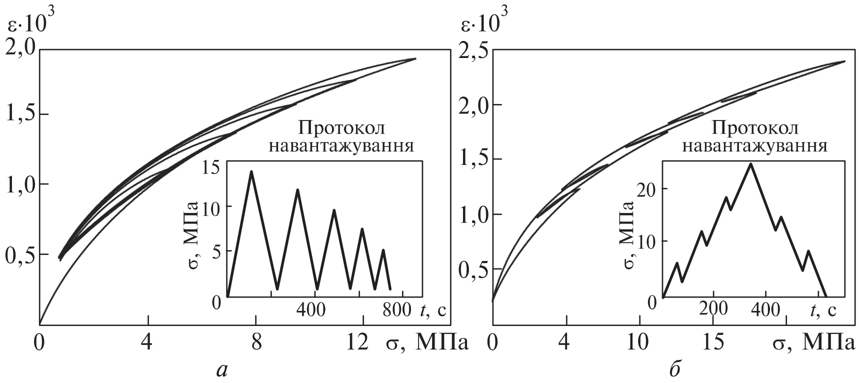

Рис. 6.3. Моделювання експерименту Дж. Боітнотта [115] (*а*) і Л.Б. Гільберта зі співавт. [142] (*б*). Теоретичну криву для некондиційованого стану на рисунку *б* не показано, оскільки на експериментальних кривих з рис. 6.1, *б* немає її відповідника

Порівняння рис. 6.3, *а* і 6.1, *а* показало, що моделювання експерименту Дж. Боітнотта [115] приводить майже до ідеального результату. Теоретичні криві в цьому випадку не тільки якісно відтворюють експериментальні криві, а й значною мірою збігаються з ними кількісно. На відміну від поданих вище результатів, експерименти Л.Б. Гільберта і співавт. [142] не можуть бути описані винятково релаксаційним механізмом (див. рис. 6.1, *б* і рис. 6.3, *б*), оскільки не вдається замкнути малі петлі через точку повернення для будь-яких варіацій сталих величин у рівнянні стану (6.2.5). З урахуванням рис. 6.2 знаходимо відповідь на запитання, чому релаксаційним механізмом не вдається пояснити замкненість малих петель через точку повернення. Дійсно, щоб мала петля була замкнена через точку повернення, в розрахунках потрібно зменшувати час релаксації τ щодо сталої швидкості навантажування (див. рис. 6.2, *в*). Водночас зменшення τ зумовлює виродження великої петлі у лінію (див. рис. 6.2, *а*, *б*). Отже, релаксаційного механізму недостатньо, щоб відтворити ефект пам'яті про кінцеву точку.

6.2.2 Пружний механізм з прилипанням

Важливою особливістю в траєкторіях напруження—деформація є ефект пам'яті про кінцеву точку. Для пояснення цього ефекту детально розглянемо експериментальні залежності деформації від напруження для пісковику Меуле (Meule) із статті [129]. Найважливіші деталі цієї залежності якісно зображено на рис. 6.4. Точки A', B', C', D', E', F' відповідають точкам з протоколу навантажування A, B, C, D, E, F. В інтервалах часу AB, CD та EF навантажування є сталою величиною. В межах лише релаксаційного механізму неможливо пояснити той факт, що точки A', C', E' не збігаються з відповідними точками B', D', F'. Дійсно, за наявності тільки релаксації точки D' і F' і навіть точка B' мають збігатися із точками A, C, E. Отже, доходимо висновку, що для подолання вказаної проблеми та розуміння поведінки експериментальних кривих потрібно включати до розгляду деякий додатковий механізм.

Головними особливостями додаткового механізму (названого пружним механізмом з прилипанням), з одного боку, має бути його здатність описувати гістерезис траєкторії напруження—деформація, з іншого — на відміну від релаксаційного цей механізм не повинен залежати від швидкості навантажування. Прототип до пружного механізму з прилипанням показано на рис. 6.4 (див. протокол навантажування). Система складається із корка і пробірки. Кількість газу в пробірці фіксована, а його тиск p утворює пружну зворотну силу. Важливою особливістю є наявність порогового тертя між корком і стінками пробірки. Вважаємо, що порогове тертя не залежить від швидкості корка. Таке тер-

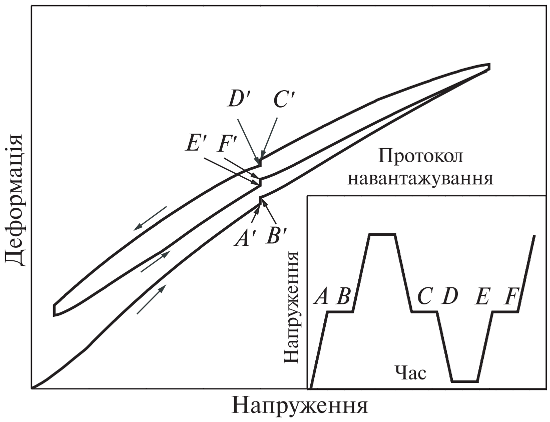

Рис. 6.4. Особливості траєкторії напруження—деформація для пісковику Меуле (Meule) [129]

тя може виникати в термодинамічній системі, коли внутрішній рівноважний процес є повільним порівняно з характерним часом навантажування.

У термінах пристрою корок—пробірка (рис. 6.5) корок починає рухатися, якщо зовнішній тиск p перевищує внутрішній p_i (або навпаки p_i перевищує p) на величину порогового тертя. З огляду на невагомість корка, його зсув χ по пробірці з плином ча-

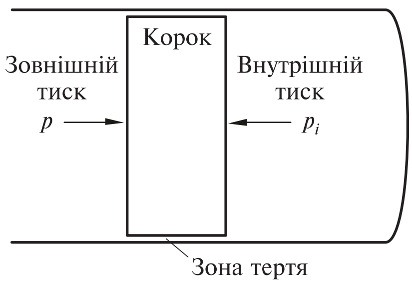

Рис. 6.5. Прототип пружного механізму з прилипанням

су підпорядкований диференційному рівнянню першого порядку

$$\frac{d\chi}{dt} = \theta(\dot{p})\theta(\chi_-(p) - \chi)\frac{d\chi_-(p)}{dp}\dot{p} + \theta(-\dot{p})\theta(\chi_+(p) - \chi)\frac{d\chi_+(p)}{dp}\dot{p}, \tag{6.2.9}$$

в якому функції

$$\chi_-(p) \equiv \chi_m(p - p_i), \qquad \chi_+(p) \equiv \chi_m(p + p_i) \tag{6.2.10}$$

визначають виразом

$$\chi_m(p) = l_0 - \frac{p_0 l_0}{p}. \tag{6.2.11}$$

Тут θ — функція Хевісайда; $p_0 l_0$ — константа, яка характеризує кількість газу в робочому об'ємі циліндра; l_0 — довжина, що фіксує початкову точку корка у трубці. Тому $l_0 - \chi$ задає положення корка відносно внутрішнього боку торця пробірки.

Деякі аспекти пружного механізму з прилипанням представлено на рис. 6.6. Рівняння (6.2.9) чисельно проінтегровано за початкових умов $\chi(t = 0) = 0$ за протоколом навантажування. Зазначимо важливу особливість пружного механізму з прилипанням — створення смуги неперервних стаціонарних станів між кривими $\chi = \chi_-(p)$ і $\chi = \chi_+(p)$. Тільки за дуже маленького порогового тиску $p_i \to +0$ ці криві збігаються і задають рівноважну криву $\chi = \chi_m(p)$. Виявляється, що середня крива ділить навпіл смугу і її можна вважати рівноважною кривою процесу у граничному випадку $p_i \to +0$. Інша важлива особливість цього механізму — наявність пружної складової, що проявляється через нахил смуги $\chi_-(p) < \chi < \chi_+(p)$ до осі p.

Взявши до уваги головні особливості пружного механізму з прилипанням (див. рівняння (6.2.9), (6.2.10)), постулюємо визначальне співвідношення між напруженням і деформацією для пісковику у вигляді

$$\frac{d\varepsilon^s}{dt} = \theta(\dot{\sigma})\theta(\varepsilon_-(\sigma) - \varepsilon^s)\frac{d\varepsilon_-}{d\sigma}\dot{\sigma} + \theta(-\dot{\sigma})\theta(\varepsilon^s - \varepsilon_+(\sigma))\frac{d\varepsilon_+}{d\sigma}\dot{\sigma}. \tag{6.2.12}$$

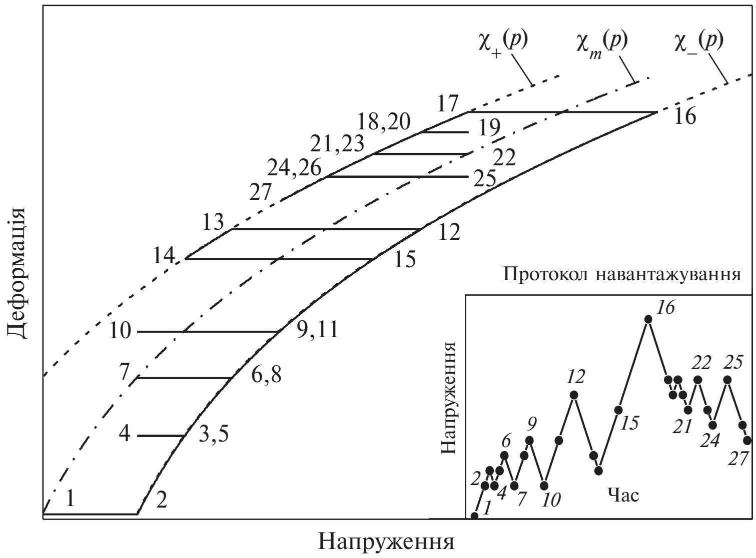

Рис. 6.6. Зміщення корка залежно від зовнішнього тиску. Штрих-пунктирною лінією позначено криву граничного рівноважного стану $\chi = \chi_m(p)$

Тут парціальна деформація ε^s пов'язана з внеском пружного механізму з прилипанням у повне напруження ε, тоді як функції $\varepsilon_-(\sigma)$ та $\varepsilon_+(\sigma)$ визначено через рівноважний стан $\varepsilon_m(\sigma)$ і два додатні порогові напруження σ_+ та σ_- таким чином:

$$\varepsilon_-(\sigma) \equiv \varepsilon_m^s(\sigma - \sigma_-), \qquad \varepsilon_+(\sigma) \equiv \varepsilon_m^s(\sigma + \sigma_+). \tag{6.2.13}$$

Зауважимо, що жодних обмежень на відповідальні за тертя порогові значення σ_- і σ_+ не накладено. В принципі, вони навіть можуть бути функціями напруження σ.

Для функції $\varepsilon_m^s(\sigma)$ припускаємо, що

$$\varepsilon_m^s(\sigma) = \varepsilon_e^r(\sigma). \tag{6.2.14}$$

Згідно з термодинамічними принципами, рівняння (6.2.14) вимагає, щоб кінцеве положення дійсного рівноважного стану було незалежним від внутрішніх процесів, що ведуть до цієї рівноваги.

Оскільки для пружного механізму з прилипанням використано менше регульованих параметрів (сталих), аніж у моделі Прейсаха—Маєргойза, скористаємося запропонованим механізмом (6.2.12), щоб описати квазістатичні навантажування у гірських породах. До того ж, розглянувши можливі фізичні інтерпретації пружного механізму з прилипанням, зазначимо, що він видається придатним для опису найважливіших закономірностей явища розкриття—закриття мікротріщин.

Нижче показано, що належна комбінація релаксаційного механізму стандартного твердого тіла та пружного механізму з прилипанням дає змогу моделювати на кондиційованій кривій як релаксаційні властивості за фіксованого напруження (див. рис. 6.4), так і ефект пам'яті про кінцеву точку. Проте, щоб включити некондиційовану частину кривих, необхідно додатково залучити механізм, завдяки якому враховуватимемо пластичну деформацію.

6.2.3 Механізм перманентної пластичної деформації

Механізм перманентної пластичної деформації можна розглядати в межах релаксаційного механізму стандартного твердого тіла за умови залучення додаткового набору параметрів релаксації. У зв'язку з тим що механізм перманентної пластичної деформації є відповідальним за різницю між некондиційованим і кондиційованим станами, вважаємо за краще виділити його окремо.

Зваживши на інтуїтивно зрозумілі особливості перманентної пластичної деформації, постулюємо, що під дією навантаження, тобто при $\dot{\sigma} > 0$, зразок має підпорядковуватися механізму перманентної пластичної деформації ε^p, додаючи внесок до загальної деформації ε, відповідно до лінійного закону Гука $\varepsilon^p = \sigma/E_p$ (вважаємо, що модуль Юнга E_p не залежить від напруження). Разом з тим указаний механізм має одночасно описувати незворотні внутрішні деформації. Тому якщо зовнішнє навантаження зменшується ($\dot{\sigma} < 0$), то пластична складова ε^p має залишатися сталою. Формалізувавши указані твердження, рівняння стану для механізму перманентної пластичної деформації запишемо у вигляді

$$\frac{d\varepsilon^p}{dt} = \theta(\dot{\sigma})\theta(\sigma/E_p - \varepsilon^p)\dot{\sigma}/E_p. \tag{6.2.15}$$

Згідно з цим механізмом, з досягненням пікового навантажування можливий запас пластичної деформації у гірській породі вичерпується. Від цього моменту для напружень, менших за попередньо досягнуте максимальне напруження, механізм перманентної пластичної деформації не проявляється у наступних циклах навантажування. Завдяки функції Хевісайда у співвідношенні (6.2.15) механізм перманентної пластичної деформації враховуємо тільки при першому стисканні. Надалі для кондиційованих кривих цей механізм не робить внесок у деформацію.

Розділення на пружний механізм з прилипанням і механізм перманентної пластичної деформації підтвердимо фізичною інтерпретацією. Дійсно, в експериментальних результатах [115,129, 141, 142] кожен приріст напруження (починаючи з нульового навантажування), який є вищим від попереднього найвищого навантажування, приводить до незворотних змін у гірській породі в силу ущільнення та зменшення шорсткості поверхонь ковзання. Ці незворотні зміни враховуємо через механізм перманентної пластичної деформації. Для циклічних навантажувань, менших за максимально досягнуті до цього часу навантажування, застосовано пружний механізм з прилипанням. Хоча у підході Прейсаха—Маєргойза покрито всю область напруження, все ж існує незаперечна перевага у запропонованому нами підході, оскільки руйнівні напруження відділено від режимів, в яких циклічні напруження пов'язані із зворотними змінами в гірських породах.

Цікаво зазначити таке: в експериментальних дослідженнях І.В. Бєлінський і співавт. [51] спостерігали виключно перманентну пластичну деформацію під час зіткнення сталевих куль у ланцюжку із свинцевими прошарками між ними.

6.3 Моделювання залежності напруження від деформації

Фізичне походження механізмів внутрішніх обмінних процесів у пісковику досліджено недостатньо, тому нижче використано феноменологічний підхід, в якому внутрішні процеси не конкретизовано. Під час комп'ютерного моделювання відомих експериментальних результатів були застосовані механізми з мінімальною кількістю феноменологічних параметрів. Проте якщо описувати точніші експерименти, запропоновану модель можна удосконалити, розширивши кількість релаксаційних процесів і пружних механізмів з прилипанням.

З огляду на всі три механізми (релаксаційний стандартного твердого тіла, пружний з прилипанням, перманентної пластичної деформації), у дослідження залучили мінімальну кількість процесів, тобто лише по одному процесу для кожного механізму. Для відомого навантажування, відповідно до протоколу навантажування, рівняння (6.2.5), (6.2.12) і (6.2.15) можна чисельно проінтегрувати з початковими умовами $\varepsilon^r(t=0) = \varepsilon^s(t=0) = \varepsilon^p(t=0) = 0$ та знайти сумарну деформацію ε у вигляді лінійної комбінації часткових деформацій:

$$\varepsilon = b(\varepsilon^r + \varepsilon^p) + (1-b)(\varepsilon^s + \varepsilon^p). \tag{6.3.1}$$

Тут b — стала ($0 < b < 1$). Ясно, що при $b = 1$ маємо тільки релаксаційний механізм і механізм перманентної пластичної деформації, тоді як при $b = 0$ зберігаємо лише пружний механізм з прилипанням і механізм перманентної пластичної деформації. Вибравши співвідношення (6.3.1) у вигляді лінійної комбінації та врахувавши означення (6.2.14), вдається підібрати єдиний параметр b, щоб отримати такі фізичні умови, за яких дійсний рівноважний стан не залежав би від будь-якого внутрішнього релаксаційного процесу.

Якщо навантаження зафіксувати в деякий момент часу, то релаксаційний механізм буде переміщувати всю систему у новий рівноважний стан за характерний час релаксації. Завдяки пружному механізму з прилипанням спільно з механізмом перманентної пластичної деформації можна реалізувати декілька

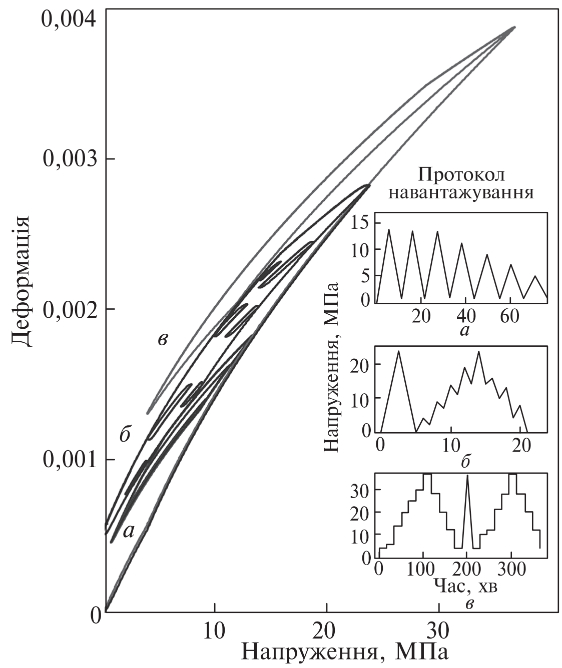

Рис. 6.7. Розрахункові залежності напруження—деформація при квазістатичних навантажуваннях для пісковику Береа: *а* — крива відповідає моделюванню експерименту із публікації [115], *б* — [141, 142], *в* — [129]

рівноважних станів при одному і тому самому напруженні. Неоднозначність залежності рівноважного стану від напруження розглянуто у статті [137].

Найкраще наближення розрахункових результатів до всіх трьох груп експериментів для пісковику Береа [115, 129, 141, 142] (рис. 6.7) отримано з параметрами, наведеними нижче.

Використані параметри

τ, с	E_e^-, ГПа	E_e^+, ГПа	D, МПа$^{-1}$	σ_-, МПа	σ_+, МПа	E_p, ГПа	a	b
3	5	23	0,03	4	4	70	0,2	0,8

Звернемо увагу на те, що на відміну від параметрів, які було знайдено під час аналізування лише релаксаційного механізму (див. підрозд. 6.2), наведені вище параметри встановлено із залученням усіх трьох механізмів.

Порівнявши розрахункові криві (рис. 6.7) з експериментальними даними (див. рис. 6.1), спостерігаємо задовільний збіг цих результатів як якісно, так і кількісно. Насамперед відтворено маленькі петлі на кривій *б* (рис. 6.7), які закриті у точці загострення. На жаль, на експериментальних кривих для пісковику Береа важко показати особливості, визначені для пісковику Меуле (рис. 8-1 у статті [129]), тобто ті особливості, що є результатом лише релаксаційного процесу за сталого навантаження (див. рис. 6.4). Ця трудність зумовлена малим характерним часом релаксації для пісковику Береа порівняно з часом повного процесу для експериментального протоколу навантажування. Саме тому особливості для пісковику Береа, що пов'язані з релаксацією, просто не проявляються на теоретичних кривих, що моделюють експеримент Т. Дарлінга та ін. [129]. Однак релаксаційний механізм не можна цілком виключити, тому що він відіграє важливу роль під час опису ефекту пам'яті про кінцеву точку. Зазначена особливість проявляється в маленьких петлях на теоретичній кривій *б* рис. 6.7, яка відтворює експеримент Л.Б. Гілберта та ін. З одного боку, малий, але скінченний час релаксації дає змогу замкнути малі петлі через точки загострення (крива *в*, рис. 6.7), з іншого — релаксація забезпечує можливість моделювання малих петель.

6.4 Втрати енергії за циклічних навантажувань

Вивчення властивостей пісковику під дією механічних навантажень передусім спрямоване на побудову рівнянь стану. Розуміння внутрішніх процесів, що відбуваються під час навантажування, розкриває можливості для фізичного та математичного моделювання. На сьогодні неможливо дослідити в деталях перебіг усіх складних внутрішніх процесів, що ускладнює побудову мо-

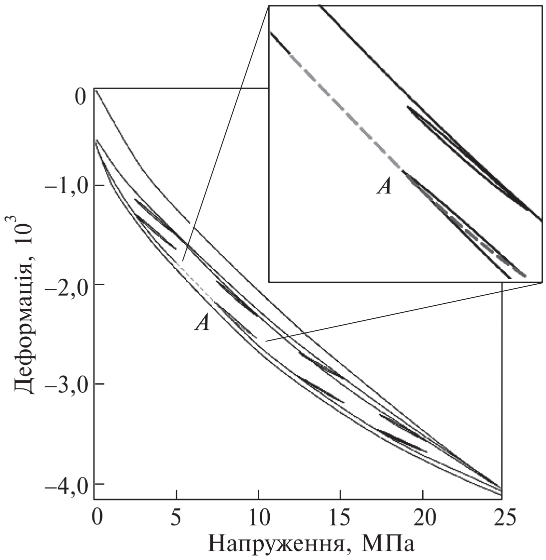

Рис. 6.8. Крива напруження—деформація для пісковику Береа [123]

делей. Однак важливим є не власне перебіг внутрішніх процесів, а їх вплив на зв'язок між макропараметрами. Для механічних навантажувань — це зв'язок між напруженням і деформацією, тобто рівняння стану.

У підрозд. 6.3 за допомогою запропонованої моделі [23, 25, 223, 224] вдалося описати низку відомих експериментів [115, 129, 138, 139, 141, 142].

Використавши таку модель, можна описати якісно і кількісно траєкторію напруження—деформація, а також відтворити характерні експериментальні закономірності.

Вже після створення моделі динамічної поведінки гірських порід з'явилися нові експериментальні результати з механічного деформування пісковику Береа [123, 138]. Насамперед виявлено:

• стрибок між нахилами внутрішньої та головної гістерезисних петель у точці A (так звана кінцева точка, або точка загострення (рис. 6.8));

• залежність площі головної гістерезисної петлі від швидкості навантажування—розвантажування (рис. 6.9).

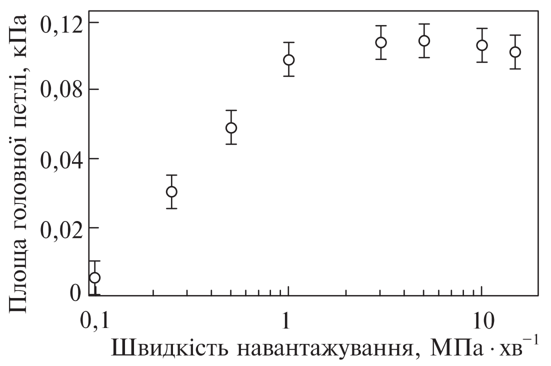

Рис. 6.9. Залежність площі головної петлі від експериментально визначеної швидкості навантажування [123]

6.4.1 Нахил головної гістерезисної петлі і малих гістерезисних петель

На рис. 6.8 у точці A видно не плавний перехід між внутрішньою і головною гістерезисними петлями, а стрибок між нахилами цих петель. Відмінність у нахилах можна пояснити за допомогою пружного механізму з прилипанням спільно з релаксаційним механізмом [223] (див. підрозд. 6.2). Виключно для зручності вважатимемо, що рівноважна крива є прямою лінією, а релаксаційний механізм вироджується у пружну деформацію (час релаксації $\tau \to 0$ або $\tau \to \infty$ у рівнянні (6.2.5)). Зазначимо, що за циклічних навантажувань після досягнення максимальної напруженості механізм перманентної пластичної деформації не дає внеску в залежність деформації від напруження. Проаналізуємо комбінацію пружного механізму з прилипанням та пружної деформації. Цей механізм спільно з пружним механізмом має траєкторію напруження—деформація, якісно зображену на рис. 6.10. Легко зрозуміти, що кут α відповідає куту, який зафіксовано в експериментах [123]. До того ж за кутами β і γ (рис. 6.10) можна знайти сталу b за формулою

$$b = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} \tag{6.4.1}$$

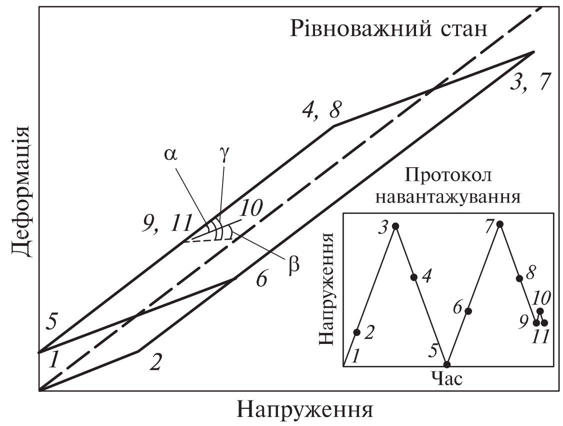

Рис. 6.10. Якісна залежність напруження—деформація для комбінації пружного механізму з прилипанням та пружної деформації

у співвідношенні (6.3.1) для того, щоб визначити баланс між релаксаційним механізмом та пружним механізмом з прилипанням. Слід зазначити, що величина b не залежить від порогового напруження. Отже, стала b, яку в підрозд. 6.3 вибрано з найкращого збігу експериментальних даних з результатами числового моделювання, набуває іншого змісту і може бути оцінена за стрибком нахилів малої гістерезисної та головної петель. Йдеться лише про оцінку величини b, оскільки в реальності в експерименті існує ще й релаксація, яка ускладнює фізичну картину, що впливає на точність визначення кутів β і γ.

6.4.2 Енергетичні втрати за циклічних навантажувань

Енергетичні втрати, спричинені внутрішніми процесами в пісковику, оцінюють за допомогою площі, яка обмежена гістерезисною кривою напруження—деформація. Тому залежність площі головної петлі від виду навантажування є важливою характеристикою.

Спочатку покажемо якісно [23], чи існує залежність площі гістерезисної петлі від швидкості навантажування у вигляді, спостережуваному в експерименті (див. рис. 6.9). Детально розглянемо релаксаційний механізм (див. підрозд. 6.2). З рис. 6.2, *а* видно, що криві напруження—деформація прямують до асимптотик для різних швидкостей навантажування $\dot{\sigma}$. За сталої величини $\dot{\sigma}$ криві виходять на асимптотики, паралельні рівноважній кривій, причому, чим більша швидкість навантажування, тим далі лежить асимптотика від рівноважної лінії.

Розглянемо циклічні навантажування з трикутноподібною формою протоколів навантажування. Для кожного наступного рисунка починаючи з рис. 6.11, *а* швидкість навантажування—розвантажування $\dot{\sigma}$ подвоюється. Видно, що зі зростанням швидкості навантажування площа гістерезисної петлі спочатку збільшується (рис. 6.11, *а*, *б*), потім виходить на максимум (рис. 6.11, *б*, *в*) і при фіксованому $\sigma_{\max} = \text{const}$ зменшується (рис. 6.11, *в*, *г*).

Збільшення площі петлі пов'язуємо із впливом релаксаційних обмінних процесів, тоді як вихід на сталу величину, а потім

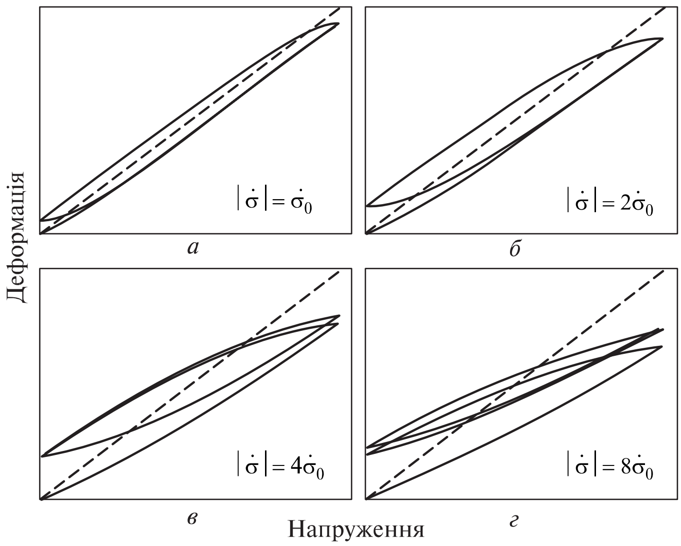

Рис. 6.11. Якісні криві напруження—деформація за циклічних навантажувань для різних $\dot{\sigma}$ та $\sigma_{\max} = \text{const}$

і зменшення площі гістерезисної петлі є результатом обмеження максимального значення напруження $\sigma_{\max}$. Цю величину, як і в експериментах, вважаємо сталою. Таким чином, всупереч твердженню [123], що за деяких швидкостей навантажування релаксаційним механізмом можна знехтувати, доходимо висновку, що релаксація завжди є і робить внесок у площу гістерезисної петлі, а зменшення площі петлі зумовлене обмеженням граничного максимального навантаження, яке прикладали до зразка пісковику в експерименті. Наші якісні пояснення підтверджені комп'ютерними розрахунками за раніше запропонованою моделлю динамічної поведінки пісковику при квазістатичному навантажуванні [223]. Модельні параметри для пісковику Береа наведено вище (див. підрозд. 6.3).

На рис. 6.12 кривою *2* змодельовано експериментальні результати, які подано на рис. 6.9. Зазначимо, що розрахункові та експериментальні криві не тільки якісно подібні, а також із задовільною точністю збігаються кількісно. Звернемо увагу на те, що всі розрахункові параметри (властивості) для пісковику Береа не були підібрані під новий експеримент [123]. Отже, за допомогою запропонованої нами моделі в статтях [223, 224] і в підрозд. 6.2 можна описати не тільки експериментальні результати, відомі

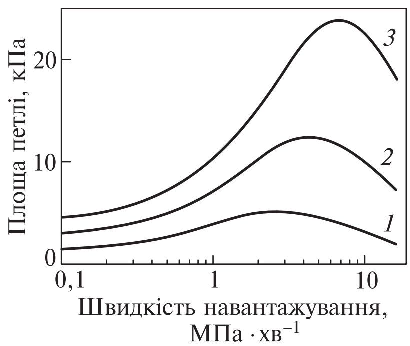

Рис. 6.12. Залежність площі гістерезисних петель від швидкості навантажування $\dot{\sigma}$. Розрахункові криві, максимальне навантаження $\sigma_{\max}$: *1* — 14, *2* — 24, *3* — 37 МПа

до побудови моделі, а й нові експериментальні дані [123], отримані вже після побудови моделі. Можливість моделювати нові експерименти вказує на достовірність запропонованої моделі динамічної поведінки пісковику.

Аналіз експериментальних спостережень спонукав залучити до запропонованої феноменологічної моделі декілька механізмів, відповідальних за внутрішні обмінні процеси в пісковику: релаксаційний механізм стандартного твердого тіла, пружний механізм з прилипанням і механізм перманентної пластичної деформації. Щоб виправдати ці механізми, використано підхід, в якому внутрішні процеси в зразку пісковику визначені опосередковано, що значно спрощує математичний опис. Лише об'єднавши належним чином усі три механізми, вдалося досягти задовільного моделювання експериментальних результатів. Крім того, перші два механізми (релаксаційний механізм стандартного твердого тіла і пружний з прилипанням) вдалося обмежити до одного модельного процесу, використавши мінімальну кількість феноменологічних параметрів (дев'яти регульованих параметрів). Цього виявилося достатньо для того, щоб відтворити надзвичайно складні траєкторії напруження—деформації. Надалі, якщо виникне потреба описати інші, можливо детальніші експерименти, модель можна узагальнити, додавши кілька релаксаційних часів у релаксаційний механізм стандартного твердого тіла, а також порогових величин тертя в пружний механізм з прилипанням. Зазначимо, що поки нам не відомо, як можна узагальнити механізм перманентної пластичної деформації більш ніж на один феноменологічний параметр.

У результаті дослідження з вивчення квазістатичних навантажувань пісковику побудовано модель, що адекватно описує головні закономірності експериментальних результатів Дж. Боітнотта [115, 141], Л.Б. Гілберта та ін. [141, 142], Т. Дарлінга та ін. [129], а також К.Е. Клайта та ін. [123] не тільки якісно, а й кількісно. Побудовано рівняння стану природних середовищ для квазістатичних навантажувань.

Розділ 7

Динаміка стрижня пісковику за резонансного навантажування

З особливостями зернової та пористої внутрішньої будови пісковику пов'язані його визначальні нелінійні механічні властивості, що виникають унаслідок дії квазістатичного і знакозмінного динамічного навантажування. Так, гістерезисні явища, встановлені за співвідношенням між напруженням і деформацією на зразках пісковику під час навантажувально-розвантажувальних циклів [115, 123, 129, 141, 142], згодом були виявлені і у співвідношенні між амплітудою прискорення та рушійною частотою на стрижнеподібних зразках, що зазнали дії зовнішнього періодичного збурення з протяганням частоти через область резонансу [138,139,151,152,190–192]. За великих рівнів періодичного збурення резонансна частота коливань зразка незвично майже лінійно зменшується від амплітуди деформації [190], а після припинення великого підготовчого збурення виникають довготермінові релаксаційні явища, такі як майже логарифмічне у часі відновлення (збільшення) резонансної частоти [191, 192].

Фрагментарне розуміння цих і деяких інших експериментальних результатів [140, 192] стимулювало розв'язувати всю проблему, зазвичай відому під назвою "повільної динаміки", систематичніше і запропонувати для неї замкнуту форму теорії [219–222, 225]. Ця теорія ґрунтується на прозорій, фізично вмотивованій формалізації єдиної пісковикової стрижнеподібної системи в термінах двох зв'язаних нелінійних підсистем, одна з яких порушує симетрію відгуку всієї системи на альтернативне зовнішнє збурення і діє подібно до м'якого храповика (клапана) або діода з незначним зворотним просочуванням [219, 220]. Ми специфікуємо ці підсистеми як швидку та повільну системи пошкоджених міжзернових та/або міжпластинкових когезійних зв'язків.

Нижче розглянуто детальну побудову моделі [219–222,225] та її дієздатність стосовно пояснення численних експериментальних спостережень (ефектів), що проявляються під час вимушених поздовжніх коливань стрижнів з пісковику. Велике коло експериментальних даних можна розуміти як прояв різноманітних граней одного і того самого внутрішньо узгодженого механізму. Більше того, запропонована нами теорія має також значну передбачувальну силу стосовно динамічної реалізації гістерезису з пам'яттю про кінцеву точку [220, 222], що фігурально нагадує його добре відомий квазістатичний прототип [125, 135] (див. також публікації [139,149]). Теоретичні прогнози підтверджені експериментами, проведеними Дж. ТенКейтом і Т. Шенкландом [222] у Лос-Аламоській Національній лабораторії (LANL).

7.1 Огляд експериментальних результатів

Американські дослідники Дж. ТенКейт (J. TenCate), Т. Шенкланд (T. Shankland), Е. Сміт (E. Smith), П. Гуєр (R.A. Guyer), П. Джонсон (P.A. Johnson), А. Сутін (A. Sutin) результати експериментів з резонансного навантажування гірської породи навели у публікаціях [151,152,190–192]. Схему експерименту, за допомогою якого були отримані сімейства резонансних кривих, показано на рис. 7.1.

На одному торці зразка пісковику Береа завдовжки 30 см і діаметром 50 мм прикріплено датчик тиску, що генерує періо-

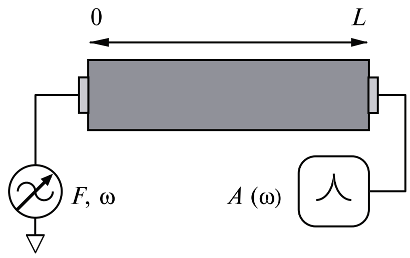

Рис. 7.1. Схема експерименту з резонансного відгуку в пісковику [190])

дичне навантажування. На іншому торці розміщено датчик прискорення, за допомогою якого фіксували амплітудно-частотну характеристику. Зразок резонував на частоті $f_r = 3920$ Гц під час низькоамплітудного навантажування (при резонансі деформація становила величину порядку 10^{-8}). На рис. 7.2 показано експериментальні резонансні криві для свіжого стрижня пісковику (тобто в некондиційованому стані) та після кількох протягань частоти (тобто для стрижня в кондиційованому стані). Діапазон частот 3800—4000 Гц. Крок за частотою і час між кроками дорівнювали 2 Гц та 300 мс відповідно. Загальний час протягання частоти від 4000 до 3800 Гц і назад до 4000 Гц становив ≈ 2 хв,

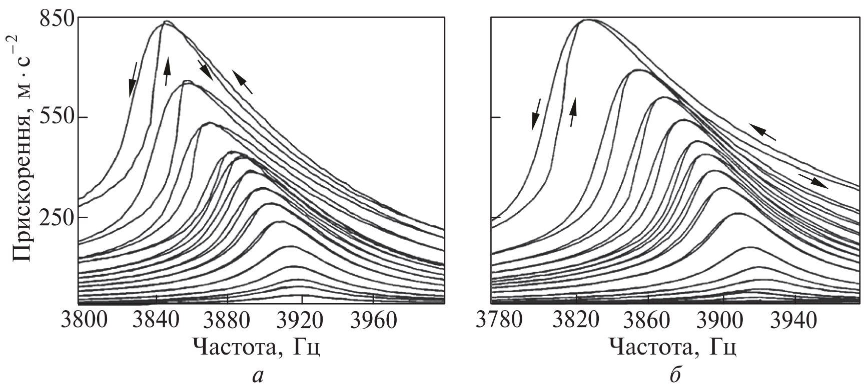

Рис. 7.2. Резонансні криві для свіжого зразка пісковику (*а*) і після кількох протягань частоти вгору вниз (*б*) [190]

тобто 200 точок на частотному відрізку. Зі збільшенням рушійного навантаження (амплітуди рушійної частоти) резонансна частота (рис. 7.2) зміщувалась у бік низьких частот, наприклад $f_r = 3850$ Гц для деформації в резонансі порядку 10^{-5}. Звертає на себе увагу той факт, що за значних навантажень (деформації понад 10^{-7} протягом частотного сканування) резонансні криві різняться для протягання частоти зверху вниз (4000—3800 Гц) і для протягання частоти знизу уверх (3800—4000 Гц).

Різницю в резонансних кривих для некондиційованого та кондиційованого станів показано на рис. 7.3. Перша резонансна крива, одержана на свіжому зразку (некондиційований стан), відрізняється від наступних кривих для протягання частоти знизу уверх (рис. 7.3, *а*) і зверху вниз (рис. 7.3, *б*). Початкові криві на рис. 7.3 позначено окремо. Для рис. 7.3, *а* початкова крива лежить нижче, а для рис. 7.3, *б* — вище всіх наступних резонансних кривих (кондиційований стан). Після досягнення максимальної точки на резонансній кривій як для рис. 7.3, *а*, так і для рис. 7.3, *б* зразок переходить у кондиційований стан, а всі наступні резонансні криві задовільно повторюються, тобто зразок "пам'ятає" значення максимальної амплітуди резонансної кривої у попередній час нагнітання. Важливо, що незалежно від протягання частоти знизу уверх чи зверху вниз максимального

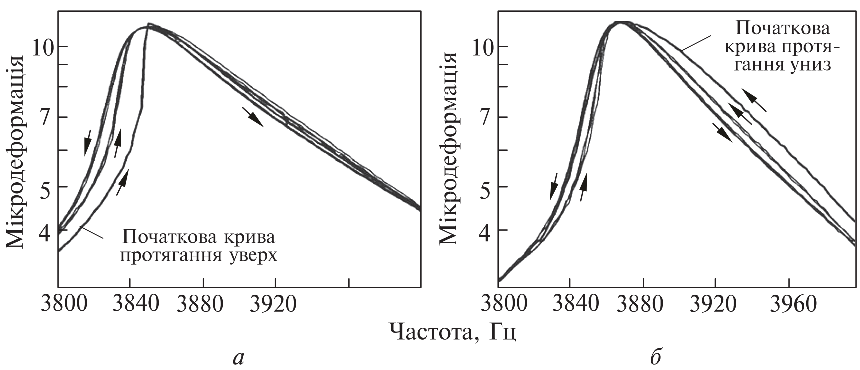

Рис. 7.3. Резонансні криві: *а* — перше протягання частоти виконано знизу вверх; *б* — те саме зверху вниз [190]

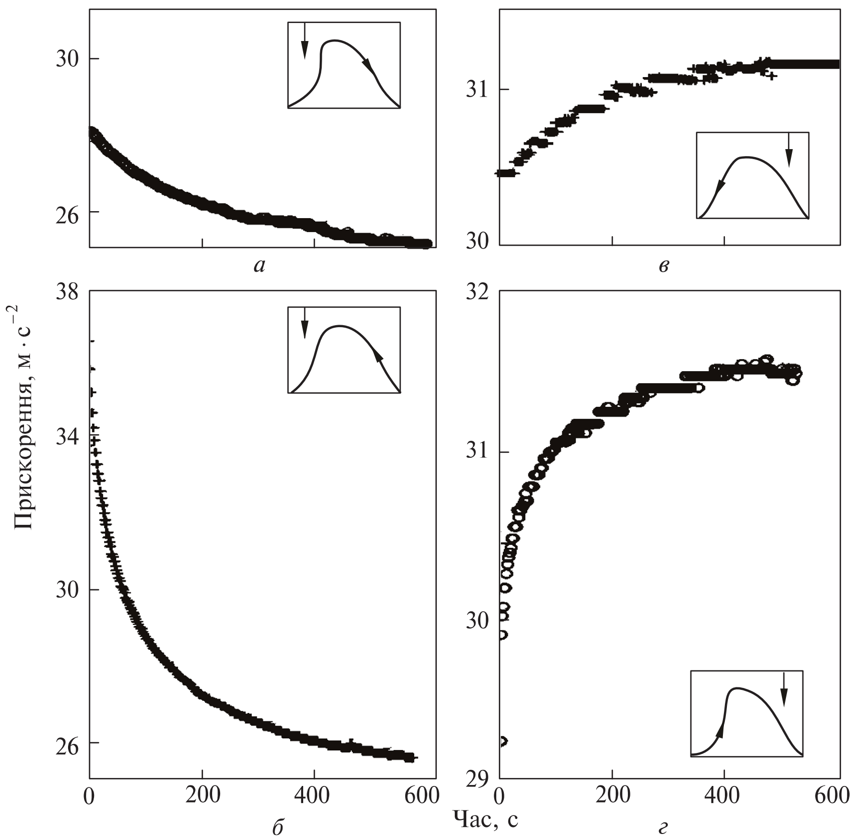

Рис. 7.4. Зміна прискорення з часом для фіксованої частоти [190]. Протягання зупиняли на частоті 3825 Гц у напрямках уверх (*а*) і вниз (*б*) та на частоті 3900 Гц — у напрямках униз (*в*) та уверх (*г*)

значення (одного й того самого) деформація досягла за одної і тої самої частоти, причому як для кондиційованого, так і для некондиційованого стану.

Особливістю експериментальних результатів [190] є залежність амплітудно-частотної характеристики від способу протягання частоти (швидкості протягання, фіксації частоти). Повторивши протягання уверх—вниз кілька разів і зупинившись на фіксованій частоті (3825 і 3900 Гц), спостерігали за прискоренням протягом ≈ 10 хв. Як показано на рис. 7.4, прискорення поступово зменшувалося в експериментах, в яких зупинка частоти була нижчою за резонансну частоту, тоді як визначене прискорення поступово збільшувалось, якщо зафіксована частота була більшою за резонансну. Цей експеримент показує, як зразок поступово втрачає "пам'ять" про попередні високі деформації. Після декількох хвилин значення прискорення асимптотично наближаються до відповідних однакових граничних рівнів (рис. 7.4).

Порівняно з попереднім експериментом, коли було зупинено прогін частоти (див. рис. 7.3), у наступному експерименті [190] додатково було виключено нагнітання на кілька секунд. Відгук для обох гілок резонансної кривої показано на рис. 7.5. В обох випадках спочатку зразок приводили у кондиційований стан нагнітанням на резонансній частоті 3850 Гц протягом ≈ 2 хв. Потім, протягуючи частоту вниз (рис. 7.5, *а*) або уверх (рис. 7.5, *б*) від резонансної, нагнітання вимикали на 30 с на частоті 3825 або 3900 Гц відповідно. Результати чітко показують розриви на

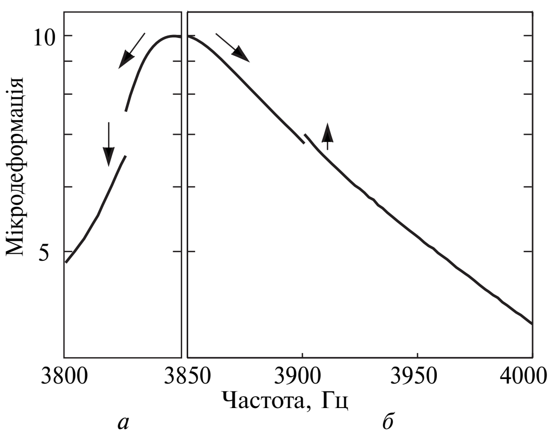

Рис. 7.5. Резонансні криві [190]: *а* — нижче резонансної частоти нагнітання зупинено на 30 с на частоті 3825 Гц; *б* — вище резонансної частоти нагнітання зупинено на 30 с на частоті 3900 Гц

резонансних кривих. Для частоти, яка нижча від резонансної частоти, стрибок відбувся вниз, а для частоти, більшої за резонансну — вверх. Порівняння результатів (див. рис. 7.4 і 7.5) [190] показало, що зразок втрачає "пам'ять" про інтенсивне нагнітання швидше (за кілька секунд замість кількох хвилин), якщо його повністю вимкнули. У статті [190] зазначено, що якісно стрибки на резонансних кривих (рис. 7.5) можна пояснити нелінійною залежністю модуля Юнга E від амплітуди деформації. Після інтенсивного навантажування резонансна крива пісковику зсувається вниз за частотою, тобто модуль E зменшується. Якщо тепер рушій вимкнути, то резонансна крива набуває зсуву назад, тобто модуль E зростає. Це означає, що пам'ять про високі деформації поступово зникає. Експерименти засвідчують (рис. 7.4, 7.5), що гірським породам властиві явища релаксаційної природи під час динамічного навантажування. Іншими словами, за фіксованої частоти та величини рушійного навантаження резонансні криві залежать від часу не лише опосередковано через навантажування (величини навантаження та швидкості протягання частоти), а й явно.

На рис. 7.6 наведено експериментальні результати, пов'язані з ефектом повільної динаміки [138, 151, 188, 191, 192]. Якщо спочатку довести зразок до кондиційованого стану, приклавши значне резонансне навантаження, а потім різко скинути амплітуду навантаження до набагато нижчого рівня та відслідкувати поведінку резонансних кривих за доволі низьких амплітуд, то початкові умови поступово відтворюються приблизно за 1 год (рис. 7.6, *а*). Звертає на себе увагу той факт, що залежність зсуву (повернення до початкового стану) резонансної частоти від часу майже логарифмічна [192] (рис. 7.6, *б*).

Часову залежність $\lg(t/t_0)$ зазвичай пов'язують з наявністю широкого спектра часових масштабів, що характеризують розглянуте явище [138,151]. У праці [138] наголошено, що необхідно обов'язково враховувати наявність великої кількості процесів з різними характерними часами, аби коректно пояснити експеримент. Принагідно зазначимо, що саме таку особливість ми вра-

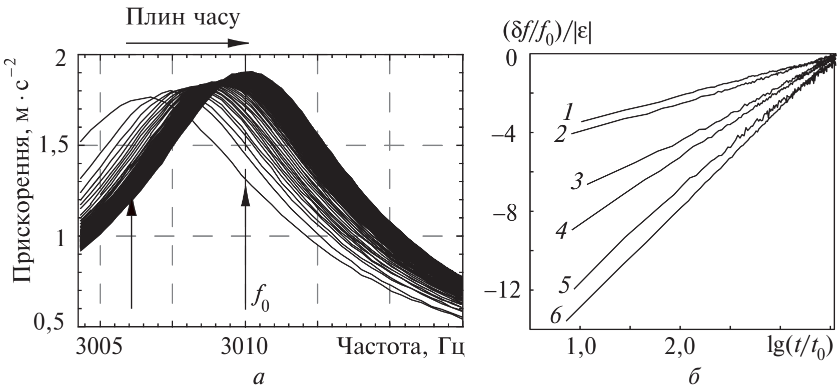

Рис. 7.6. Ефект повільної динаміки [191, 192]: *а* — час відновлювання початкових властивостей зразка порядку 1 год; *б* — залежність зсуву резонансних частот δf майже логарифмічна від часу: крива *1* — пісковик Береа у вакуумі (для зручності зображення величини зсуву зменшено у 20 разів), *2* — бетон суцільний (зсув зменшено в 100 разів); *3* — бетон з тріщинами (зсув зменшено в 100 разів); *4* — вапняк Лавоукс (Lavoux); *5* — пісковик Береа (Berea); *6* — пісковик Фонтенбло (Fontainebleau)

хували для побудови моделі динамічної поведінки гірських порід [219–221, 225] (див. також підрозд. 7.2).

Зазначимо, що в околі резонансної частоти пісковику поздовжнє періодичне навантажування приводить до сильних, по суті нетривіальних, нелінійних відгуків.

- За високих рівнів навантаження ефективна ширина резонансної кривої залежить від напрямку зміни частоти, тобто від її збільшення до вищих або зменшення до нижчих частот [190]. Виявляється, що цей ефект є типовим проявом повільної динаміки, а тому його можна трактувати як гістерезис на обох гілках (на низьких і високих частотах) резонансної кривої.
- Пік резонансу переміщується в напрямку нижчих частот майже лінійно із зростанням амплітуди рушійного навантаження [138, 139, 152, 190].

- За сталої амплітуди рушійного навантаження резонансна частота та максимальна деформація виходять на певні усталені значення, що вже не залежать від напрямку протягання частоти знизу вверх чи зверху вниз як для кондиційованого, так і для некондиційованого стану [190].

- Форма резонансних кривих залежить від часу не лише опосередковано через рушійне навантаження та швидкість протягання частоти, а й явно, що є проявом релаксаційної поведінки зразка в динамічних процесах.

- Повільна динаміка проявляється і в поступовому відновленні (зростанні) резонансної частоти до початкового значення після того, як зразок пісковику був приведений до кондиційованого стану інтенсивним навантажуванням, потім рушійну амплітуду значно понизили. Залежність зсуву (повернення до початкового стану) резонансної частоти від часу майже логарифмічна: $\delta f \sim \lg(t/t_0)$ [191, 192].

7.2 Модель динамічної поведінки пісковику за резонансного навантажування

Наведені факти не можуть бути пояснені в межах відомих теорій резонансного нелінійного відгуку [12]. Деякі аспекти проблеми були інтерпретовані в статті [140] за допомогою квазістатичної моделі [159]. У цьому підході використано поняття допоміжних гістерезисних елементів, які дають змогу ввести додаткові нетривіальні нелінійні члени в динамічне рівняння для поля поздовжніх зміщень. Однак таке теоретичне тлумачення недостатньо повне. Дійсно, будуючи модель, спочатку нехтують і динамікою гістерезисних елементів, і поступовою часовою еволюцією амплітудно-частотної характеристики (ключова точка трактування результатів), а потім ці особливості наново враховують. Хоч у статті [120] і запропоновано динамічну реалізацію квазістатичної моделі, все ж адекватне пояснення експериментальних даних потребує значного вдосконалення підходу.

З указаних причин ми відкидаємо ідею про допоміжні гістерезисні елементи як єдиний засіб для трактування усіх гістерезисних явищ. Проведемо детальний аналіз і розглянемо фізично мотивований підхід для опису резонансної поведінки стрижня гірської породи.

7.2.1 Фізичні уявлення про процес резонансного навантажування

На підставі наведених у підрозд. 7.1 експериментальних результатах створено модель динамічної поведінки гірських порід. Зсув резонансної частоти із збільшенням рушійного навантаження (див. підрозд. 7.1) пов'язуємо зі зменшенням модуля Юнга E. Для зручності на рис. 7.7, *а* зображено резонансну криву за умови сталого пружного модуля $E_1 = \mathrm{const}$. На рис. 7.7, *б* якісно показано дві резонансні криві для двох різних сталих модулів $E_1 > E_2$. Резонансна крива з L_2 зміщена вліво по осі абсцис (осі рушійної частоти).

Пояснимо поведінку резонансної кривої в динамічному процесі, коли відбуваються деякі внутрішні обмінні процеси в зразку під дією зовнішнього збурення, результатом якого є зміна пружних властивостей зразка, а саме модуля Юнга E. Вважаємо, що із збільшенням деформації значення E зменшується. Спочатку розглянемо випадок, коли внутрішні процеси рівноважні із зовнішнім збуренням. Зрозуміло, що резонансна крива на спадаючих гілках резонансної кривої, далеких від резонансної частоти, за низьких деформацій має бути близькою до кривої L_1 з модулем E_1. Водночас як для частот, близьких до резонансної частоти (тут найбільші напруження і деформація), резонансна крива має проходити по кривій L_2 з модулем E_2. Таким чином, коли внутрішні процеси встигають за зовнішнім збуренням, резонансна крива має якісний вигляд L_3 (рис. 7.7, *в*).

Залишилося врахувати релаксаційну природу внутрішніх процесів. В реальних умовах внутрішні процеси не встигають за змі-

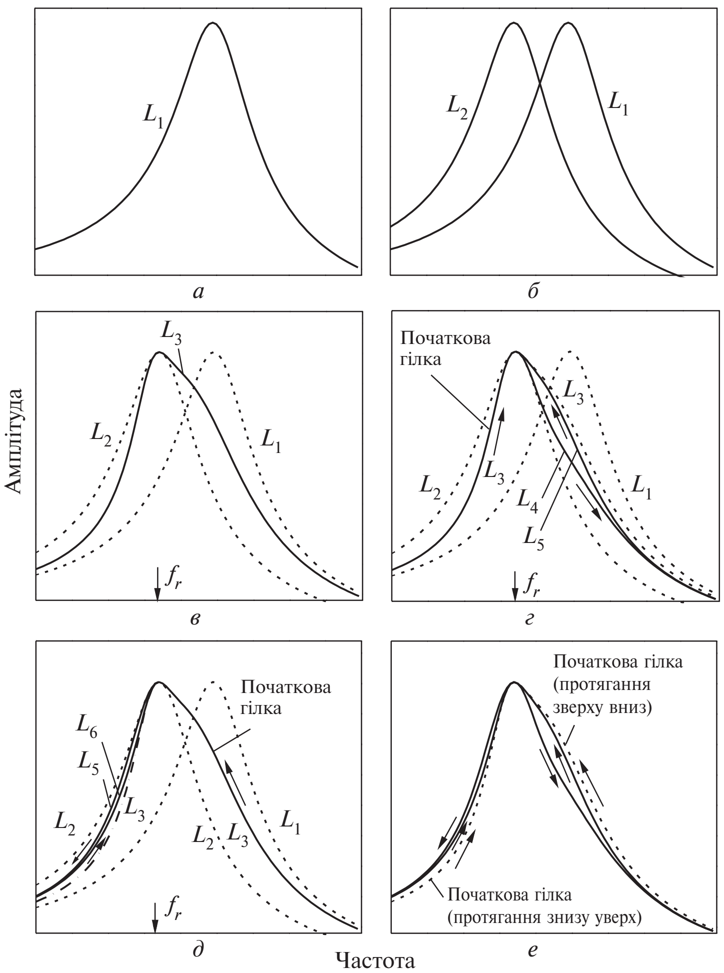

Рис. 7.7. Резонансні криві: *а* — класичний випадок, $E_1 = \mathrm{const}$; *б* — $E_2 < E_1$; *в* — рівноважний випадок L_3 для E, залежного від напруження; *початково свіжий пісковик з релаксівними властивостями під час протягання частоти*: *г* — знизу уверх і знову вниз до резонансної частоти f_r, *д* — зверху вниз і знову уверх до резонансної частоти f_r, *е* — якісні резонансні криві, що моделюють експериментальні результати

ною зовнішніх збурень. Результатом нерівноважності між зовнішнім навантажуванням та внутрішніми процесами буде немиттєве відстежування деформації за зміною напруження. Такий ефект і називають релаксацією, коли зв'язок між макропараметрами (у цьому випадку між напруженням і деформацією) додатково залежить від внутрішніх процесів, тобто реалізується неоднозначний зв'язок між макропараметрами. Математично цю особливість можна описати через явну залежність зв'язку між макропараметрами від часу. Під час фіксації рушійного навантаження (незалежного макропараметра) деформація (залежний макропараметр) все-таки може змінюватися, якщо відсутня рівновага, тобто деякий час ще проходять внутрішні обмінні процеси, зумовлені попередньою зміною рушійного макропараметра.

Нарешті, створивши модель динамічної поведінки гірських порід, враховуємо, що за умови сталої амплітуди нагнітання всі резонансні криві мають один і той самий максимум незалежно від протягання частоти чи знизу уверх, чи зверху вниз, а також від вибору початкового (кондиційованого або некондиційованого) стану. Задовольнити таку особливість і зберегти релаксаційні ефекти можна, якщо зробити таке припущення. Коли частота прямує до резонансної незалежно чи зліва, чи справа (а деформація зростає), припускаємо реалізацію миттєвого відстежування деформації за напруженням, водночас для протягання рушійної частоти від резонансної (тобто за зменшення деформації) вважаємо, що деформація через релаксацію відстає від напруження. Звертаємо особливу увагу на це припущення, оскільки воно суттєво різниться від опису, наприклад, хімічних реакцій, коли швидкість наближення до рівноваги не залежить від напрямку підходу до рівноваги, а саме пов'язана або з більшою концентрацією щодо рівноважної, або, навпаки, з меншою концентрацією щодо рівноважної.

Врахувавши всі наведені особливості, побудуємо якісні релаксаційні криві спочатку для свіжого стрижня (некондиційований стан) під час протягання рушійної частоти знизу уверх (рис. 7.7, *г*). Для лівої гілки до резонансної частоти резонансна крива повністю лягає на криву L_3. Досягнувши резонансної частоти f_r, в подальшому на правій гілці від резонансної частоти зразок уже буде в кондиційованому стані — резонансна крива L_4, що пройде між кривими L_2 та L_3, оскільки релаксаційний процес зумовлює поступовий за часом підхід до кривої L_3. Якщо тепер протягання частоти продовжити з високих частот до низьких, то резонансна крива L_5 буде вище над гілкою L_4, але все-таки лежатиме нижче від L_3.

За аналогією з наведеним вище випадком будуємо резонансні криві для процесу, в якому початкове протягання частоти для свіжого зразка (некондиційований стан) розпочато зверху вниз. Резонансні криві для цього випадку набувають вигляду, який якісно показано на рис. 7.7, *д*. Від високої частоти до резонансної f_r крива ляже на криву L_3. За резонансною частотою f_r до низьких частот резонансна крива L_6 знаходитиметься між L_2 та L_3, що зумовлено релаксаційним процесом. У подальшому, протягнувши частоту від низьких частот до резонансної f_r, матимемо резонансну криву, що лежить між L_3 та L_1.

Отже, обґрунтовано основні засади фізичної моделі резонансної поведінки стрижня пісковику, в межах якої можуть бути реалізовані резонансні криві, наведені на рис. 7.7, *е*. Ці резонансні криві якісно подібні до резонансних кривих, що спостерігають в експериментах (див. рис. 7.2).

7.2.2 Кінетика внутрішніх процесів

Важливим моментом побудови моделі є опис можливих внутрішніх процесів, що приводять до зниження модуля Юнга за збільшення внутрішнього напруження. Значення модуля Юнга пов'язуватимемо з концентрацією розірваних зв'язків на контактах між гранулами c.

Під час деякого заданого навантаження (розтягувального або стискувального) величина c має еволюціонувати до свого залежного від напруження σ рівноважного значення c_σ. Щоб досягти надійного узгодження між теорією та експериментом, така еволюція має характеризуватися майже логарифмічною, а не експоненційною часовою залежністю, з одного боку, та бути чутливою до знака прикладеного напруження, з іншого. Обидва аспекти вдається досить легко врахувати в концепції змішаної кінетики, яку, на нашу думку, більш-менш природно обґрунтовано для консолідованих матеріалів. Ідея полягає у представленні загальної концентрації дефектів c через деяку прийнятну суперпозицію складових концентрацій g, де кожне парціальне g підпорядковується доволі простій кінетиці.

Розглянемо набір складових концентрацій. Кожна окрема складова концентрація g у цьому наборі еволюціонує до свого залежного від напруження рівноважного значення g_σ зі швидкістю $\partial g/\partial t$, яка в найнижчому наближенні повинна бути пропорційною різниці $g_\sigma - g$. Так, при $g > g_\sigma$ ушкоджені зв'язки схильні до відновлення ($\partial g/\partial t < 0$), а при $g < g_\sigma$ неушкоджені зв'язки схильні до розриву ($\partial g/\partial t > 0$). Позначивши швидкість відновлення $\mu = \mu_0 \exp(-U/kT)$, а швидкість розриву, як $\nu = \nu_0 \exp(-W/kT)$, можна формалізувати попередні твердження в термінах кінетичного рівняння

$$\partial g/\partial t = -\left[\mu\theta(g - g_\sigma) + \nu\theta(g_\sigma - g)\right](g - g_\sigma), \tag{7.2.1}$$

де U, W — активаційні бар'єри для процесів відновлення та ушкодження зв'язків відповідно; k — константа Больцмана; $\theta(z)$ — функція Хевісайда.

Виникає питання: однаковими чи різними мають бути швидкості μ та ν і чому? Існують вагомі аргументи вважати, що параметри μ і ν різняться доволі суттєво, оскільки об'єм, пов'язаний з виникненням та розвитком окремої тріщини, виявляється макроскопічним, хоча і обмеженим міжзерновим простором.

Дійсно, за розтягувального навантаження потенційно існує безліч просторових шляхів, аби розірвати міжзерновий цементаційний контакт з одним і тим самим основним наслідком — утворенням міжзернової тріщини. Причому будь-яка доречна макроскопічна характеристика породи має бути нечутливою до конкретного положення тріщини між сусідніми зернами, але повинна суттєво залежати від загальної площі тріщини в одиниці об'єму. Саме така величина і може слугувати прийнятним мірилом концентрації дефектів. За аналогією з механізмом виникнення тріщини слід підкреслити, що для вже існуючої рівноважної тріщини є численні шляхи для її подальшого розвитку за умови прикладення надлишкового розтягувального навантаження.

Навпаки, за стискувального навантаження попередньо утворена тріщина має лише один просторовий шлях, аби заліковуватись, або, принаймні, частково стягнутись. Ці ключові спостереження означають докорінну нерівноправність $\nu_0 \gg \mu_0$ між передекспоненційними факторами ν_0 та μ_0 швидкостей порушення ν та відтворення μ міжзернових зв'язків навіть незалежно від когезійних властивостей цементаційного матеріалу. До того ж завдяки можливій інтеркаляції води та/або дрібномасштабній фрагментації цементаційного матеріалу між протилежними гранями тріщин слід очікувати, що типове значення енергії активації заліковування тріщини U перевищуватиме значення енергії активації утворення тріщини W. У цілому всі наведені вище фактори здатні спричинити ще більшу нерівноправність $\nu \gg \mu$ між швидкостями утворення ν та знищення μ дефектів, яка може сягати кількох порядків. Цей висновок, що ґрунтується на мезоскопічності масштабу залучених структурних елементів, наочно подібний і на макроскопічному рівні, коли зразок, який одного разу розломили, залишається розломленим практично назавжди.

Вище було розглянуто лише єдину складову g концентрації дефектів, приписану до пари фіксованих активаційних параметрів U та W. Насправді, усякий малий, але все ще макроскопічний об'єм пісковику містить розмаїття структурних елементів, які різняться за розміром, складом, природним кліважем тощо. В результаті активаційні бар'єри для процесу відновлення когезії U та процесу порушення когезії W мають утворювати два правдоподібно неперервні набори в певних енергетичних межах: $U_0 \leq U \leq U_0 + U_+$ та $W_0 \leq W \leq W_0 + W_+$ відповідно. Значення величин U_0, U_+ та W_0, W_+ не мають бути чутливими до конкретного вибору поперечного перерізу стрижня внаслідок однорідності (подібності) досліджуваного зразка на макроскопічному рівні. Звичайно, лише цих характеристик недостатньо, аби конструктивно врахувати весь набір складових концентрацій, допоки не вказано певного рецепту, який внесок (внесок з якою вагою) має давати кожна окрема складова концентрація g у загальну (зважену) концентрацію c дефектів. Обмежимося найпростішим наближенням, коли всі дозволені складові концентрації g мають однакову вагу в загальній концентрації c, тобто

$$c = \frac{1}{U_+ W_+} \int\limits_{U_0}^{U_0+U_+} dU \int\limits_{W_0}^{W_0+W_+} g \, dW. \tag{7.2.2}$$

Цей вираз не суперечить припущенню

$$g_\sigma = c_\sigma, \tag{7.2.3}$$

яке пов'язує рівноважне значення c_σ загальної концентрації порушених зв'язків з рівноважним значенням окремої складової концентрації порушених зв'язків g_σ, де як c_σ, так і g_σ визначаємо значенням напруженості σ. Насправді, лише величина c_σ займає законне місце в стандартних термодинамічних оцінках [64], а дані стосовно g_σ мають спиратися на більш-менш правдиву гіпотезу, наприклад, встановлену формулою (7.2.3).

Відповідно до монографії А.М. Косевича [64], рівноважну концентрацію дефектів, асоційовану з напруженістю σ, задаємо виразом

$$c_\sigma = c_0 \exp\left(v\sigma/kT\right), \tag{7.2.4}$$

де параметр $v > 0$ вказує на типовий об'єм, що відведений на одиничний дефект і характеризує інтенсивність дилатації. Хоч формула (7.2.4) начебто і має бути застосовною до ансамблю мікроскопічних дефектів у кристалах, але, на щастя, вона виведена в межах континуальної термодинамічної теорії, що насправді не потребує ані специфікації типового розміру дефекту, ані конкретизації структури кристалічної матриці. З цієї причини вважаємо, що формула (7.2.4) повинна працювати також для ансамблю мезоскопічних дефектів у консолідованих матеріалах, якщо під одиничним дефектом розуміти деякий елементарний розрив міжзернової когезії. Експериментальні результати [153] вказують на справедливість залежності (7.2.4) для широкого класу матеріалів, зокрема для пісковиків. Рівноважна концентрація дефектів у нездеформованому повністю зрелаксованому стрижні c_0 має бути деякою функцією від температури T і насиченості водою s. Конкретний характер цих залежностей не випливає з перших принципів і потребує виокремлення з експериментів.

У цьому місці введемо феноменологічний зв'язок між концентрацією дефектів c та модулем Юнга E. Інтуїція підказує, що E має бути деякою монотонно спадною функцією від c, яку можна розвинути в степеневий ряд за малими відхиленнями $c - c_0$ величини c від її нездеформованого рівноважного значення c_0. У найнижчому наближенні до рівноважного значення c_0, розвинувши шукану залежність в ряд та утримавши тільки нульовий та перший члени, приходимо до співвідношення

$$E = (1 - c/c_{\text{cr}})\, E_+. \tag{7.2.5}$$

Тут величини c_{cr} та E_+ мають сенс критичної концентрації дефектів і максимально можливого значення модуля Юнга відповідно. Обидва параметри приймемо незалежними від температури та водонасиченості.

За сталого напруження кінетичне рівняння (7.2.1) забезпечує, аби концентрація c прямувала до рівноважного значення c_σ (7.2.4), унаслідок чого модуль Юнга досягає значення

$$E_\sigma = [1 - (c_0/c_{\text{cr}}) \exp(v\sigma/kT)]\, E_+. \tag{7.2.6}$$

Слід зауважити, що функціональна залежність (7.2.6) E_σ від σ майже точно зіставляється з експериментально встановленою підгінною формулою для пружних модулів як функції прикладеного навантаження $P \sim -\sigma > 0$ (див. огляд [153] та вказані там посилання). Крім того, співвідношення (7.2.6), взяте при нульовій напруженості $\sigma = 0$, дає змогу реконструювати температурну та водонасичувальну залежності рівноважної концентрації дефектів у ненапруженому стані c_0, спираючись на доступні експериментальні дані для модуля Юнга в нездеформованих відновлених зразках. Так, взявши до уваги температурну екстраполяцію Сатерленда (Sutherland) [229] та проаналізувавши дані, залежні від температури за нульової водонасиченості [189], а також дані, залежні від водонасиченості при кімнатній температурі [109] (вибрані для пісковику Береа), ми запропонували підгінну формулу

$$c_0 = c_{\mathrm{cr}} \left(\frac{T}{T_{\mathrm{cr}}} \right)^2 \left[\cosh^2 \alpha - \exp \left(- \frac{\beta s}{1 - s} \right) \sinh^2 \alpha \right], \qquad (7.2.7)$$

де водонасиченість s означена так, аби змінюватися в інтервалі $0 \le s \le 1$. Підгінні параметри, доречні для пісковику Береа, є такими: $T_{\mathrm{cr}} = 1475$ K; $\cosh^2 \alpha = 16$; $\beta = 10$. Сподіваємося, що наша апроксимація (7.2.7) має працювати, принаймні, в межах температурних порогів незворотних руйнацій осадових порід, а саме між точкою замерзання води в порах (≈ 273 K) і точкою спікання глинистих внутрішньопроміжкових компонентів (≈ 345 K).

Головний сенс нашого підходу міститься в кінетичному рівнянні (7.2.1), що може бути застосованим як для статичного, так і для динамічного режиму зовнішнього навантажування. Проте у другому випадку, ми мусимо вважати величини c_σ і g_σ такими, що здаються в конкретний момент часу рівноважними, тобто такими, що задаються формулами (7.2.3) та (7.2.4), де напруження σ прийнято динамічним.

За малих динамічних напружень $|\sigma| \ll kT/v$ експоненту $\exp(v\sigma/kT)$, що домінує у виразі (7.2.4) для c_σ, можна апроксимувати двома першими членами її розкладу. З огляду на співвідношення (7.2.3), аналогічне наближення стосується і g_σ. Проте за знакозмінного збудження ця обставина аж ніяк не вказує на нульове значення довготермінової поправки до g_0 в розв'язку g кінетичного рівняння (7.2.1), як можна було б очікувати. Навпаки, величезний диспаритет $\nu \gg \mu$ між швидкостями створення ν та знищення μ дефектів, як виявляється, створює фізичний механізм порушення симетрії відгуку коливальної системи на періодичне зовнішнє збурення, що діє подібно до м'якого храповика або до недосконалого діода. Цей механізм і є наріжним каменем запропонованого нами моделювання.

У протилежність до цього, попередні теорії непружної релаксації, розвинуті для кристалічних тіл [171], спираються на симетричну форму кінетичного рівняння (що відповідає тотожності $\nu \equiv \mu$ у наших позначеннях) і не враховують вимоги динамічного підлаштовування рівноважного значення внутрішнього релаксаційного параметра (який відповідає g_σ у наших позначеннях). Попередні теорії утворення тріщин [93] відрізняються від нашого підходу тим, що нехтують процесами зарубцьовування тріщин (тобто вони приймають $\mu = 0$ у наших позначеннях) і не вводять змінної концентрації дефектів до правої частини відповідного кінетичного рівняння.

7.2.3 Рівняння руху. Задача резонансного відгуку стрижня пісковику

Еволюційне рівняння для поля поздовжніх зміщень (надалі — для пружної підсистеми) запишемо у найзагальнішій формі

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial^2 u/\partial x \partial t)}\right], \tag{7.2.8}$$

розкриваючи її зміст поступово крок за кроком. Так, аби забезпечити додатність та суто внутрішній характер дисипації, дисипативна функція $\mathcal{F}$ має бути деякою парною функцією від швидкої деформації $\partial^2 u/\partial x \partial t$. Обмежимося стоксівським внутрішнім тертям [185], що асоціюється з дисипативною функцією:

$$\mathcal{F} = (\gamma/2)\left[\partial^2 u/\partial x\, \partial t\right]^2. \tag{7.2.9}$$

У формулах (7.2.8) і (7.2.9) величини ρ та γ є відповідно середньою густиною пісковику та коефіцієнтом внутрішнього тертя в пружній підсистемі. В подальшому залежностями величин ρ та γ від температури T, насиченості водою s та деформації $\partial u/\partial x$ у рівняннях (7.2.8) та (7.2.9) нехтуватимемо. Співвідношення між σ та $\partial u/\partial x$ приймемо у вигляді

$$\sigma = \frac{E \operatorname{sech} \eta}{(r-a)[\cosh \eta\, \partial u/\partial x + 1]^{a+1}} - \frac{E \operatorname{sech} \eta}{(r-a)[\cosh \eta\, \partial u/\partial x + 1]^{r+1}}, \tag{7.2.10}$$

що при $r > a > 0$ дає змогу запобігти стисливості стрижня за деформації $\partial u/\partial x$, близької до $+0 - \operatorname{sech}\eta$. Тим самим параметру $\cosh\eta$ приписуємо типову відстань між центрами сусідніх зерен, розділену на типову товщину міжзернового цементаційного контакту; показники r та a характеризують відштовхувальну та притягувальну частини міжзернової взаємодії відповідно. Іншими словами, апроксимуємо взаємодію між зернами емпіричним потенціалом Мі (Mie). При малих деформаціях $|\partial u/\partial x| \ll \operatorname{sech}\eta$ маємо

$$\frac{\sigma}{E\partial u/\partial x} \approx 1 - \frac{1}{2}(r+a+3)\operatorname{sech}\eta\partial u/\partial x + \\ + \frac{1}{6}(r^2+ar+a^2+6r+6a+1)(\operatorname{sech}\eta\partial u/\partial x)^2, \tag{7.2.11}$$

тому параметри r, a, $\cosh\eta$ очевидно повністю специфікують нелінійні поправки до закону Гука за умови відсутності безпосереднього впливу деформації $\partial u/\partial x$ на модуль Юнга E. Тим часом непрямий ефект деформації на модуль Юнга, а саме вплив, опосередкований концентрацією c пошкоджених міжзернових зв'язків, вдається інкорпорувати до нашої теорії як головне джерело всіх нетривіальних явищ.

Для рівнянь руху граничні умови, що відповідають експериментальним дослідженням з резонансного відгуку під час кінематичного збудження зразка пісковику [138–140, 152, 190–192], запишемо у вигляді [17]

$$u(x=0|t) = D(t)\cos\left(\varphi + \int\limits_0^t d\tau\omega(\tau)\right), \tag{7.2.12}$$

$$\sigma(x=L|t) + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x=L|t) = 0, \tag{7.2.13}$$

де t — час; x — поздовжня лагранжева координата стрижня, так що $x=0$ та $x=L$ маркують привідний та вільний кінці відповідно. Як правило, привідна амплітуда $D(t)$ утримується переважно незмінною, за винятком моментів вмикання чи вимикання привідного пристрою або ж його перемикання на інший привідний рівень. При цьому часову залежність колової частоти приводу $\omega(t)$ задаємо типом протягання частоти (так званим протоколом частоти). Іншим інформативним видом експериментів є такий, де в сенсі раніше вказаних часових залежностей привідна амплітуда $D(t)$ та привідна частота міняються ролями.

Початкові умови мусять залежати від передісторії зразка. Так, для недеформованого, повністю відновленого стрижня початкові умови мають вигляд

$$u(x|t=0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x|t=0)=0, \quad g(x|t=0)=c_0, \quad (7.2.14)$$

де $0<x<L$.

Отже, сформульовано основні теоретичні засади моделі коливань пісковикового стрижня в термінах двох зв'язаних суттєво нелінійних підсистем. По-перше, запропоновано динамічне рівняння для поля поздовжніх зміщень (7.2.8) з прийнятним вибором дисипативної функції (7.2.9), зв'язку між напруженістю та деформацією (7.2.10), а також впливу концентрації дефектів на модуль Юнга (7.2.5). По-друге, побудовано кінетичне рівняння типу м'якого храповика для складової концентрації дефектів (пошкоджених міжзернових когезійних зв'язків) (7.2.1) з прийнятним означенням поняття введеної за напруженістю складової концентрації дефектів (7.2.3), які в конкретний момент часу сприймаються системою як рівноважні. Вказано на прийнятний зв'язок між складовою (допоміжною) концентрацією та дійсною (справжньою) концентрацією пошкоджених міжзернових зв'язків (7.2.4), а також представлено граничні (7.2.12), (7.2.13) та початкові (7.2.14) умови для поля поздовжніх зміщень так, аби формалізувати дію збуджувального пристрою (трансдюсера) на усю стрижневу систему.

7.3 Кінетика м'якого храповика з гармонічним навантажуванням

Розглянемо два різні кінетичні режими утворення та анігіляції дефектів за умови періодичності привідного напруження, що дає основу для якісного розуміння експериментальних результатів та їх комп'ютерних відтворень. З цією метою введемо величину (надлишок складової концентрації)

$$G \equiv g - g_0, \tag{7.3.1}$$

що вимірює перевищення $G > 0$ або недобір $G < 0$ дефектів на нездеформованому рівноважному тілі g_0, а вплив динамічної підсистеми на кінетичну врахуємо наближено єдиною гармонікою

$$G_\sigma \equiv g_\sigma - g_0 = A \sin(\omega t + \delta), \tag{7.3.2}$$

де амплітуда A та фаза δ є деякими функціями поздовжньої координати стрижня x. Знати їх конкретний вигляд немає потреби, оскільки при кожному фіксованому x величина G підпорядковується звичайному диференціальному рівнянню

$$dG/dt = -[\mu\theta(G - G_\sigma) + \nu\theta(G_\sigma - G)](G - G_\sigma). \tag{7.3.3}$$

Зауважимо, проте, що в найнижчому порядку амплітуда A пропорційна амплітуді ε деформації

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \sin(\omega t + \delta), \tag{7.3.4}$$

взятої в тому самому одномодовому наближенні. Коефіцієнт пропорційності vc_0E/kT випливає з виразів (7.3.2) та (7.3.4) з використанням наближеного співвідношення $\sigma = E\partial u/\partial x$ між напруженням і деформацією, та формул (7.2.3) і (7.2.4) для g_σ і c_σ. Тут для спрощення знехтувано часовою залежністю модуля Юнга, опосередкованою повною концентрацією дефектів.

Починаючи з нульового значення $G(t = 0) = 0$ кінетичне рівняння (7.3.3) та синусоїдальний рушій (7.3.2) забезпечують зростання надлишкової складової концентрації G у кожному часовому циклі $2\pi/\omega$ майже східцеподібно, як це показано на рис. 7.8, де $\mu \ll \nu \leq \omega/2\pi$. Часові інтервали швидкого зростання, контрольованого швидкістю ν, визначаємо з нерівності

$$A\sin(\omega t + \delta) - G(t) > 0, \tag{7.3.5}$$

а часові інтервали повільного спадання, контрольованого швидкістю μ, — з протилежної з нерівності

$$A\sin(\omega t + \delta) - G(t) < 0. \tag{7.3.6}$$

Кожен окремий інтервал зростання послідовно чергується з наступним інтервалом спадання, даючи загальну повну сходинку за цикл $2\pi/\omega$.

Хоч кінетичне рівняння (7.3.3) і можна проінтегрувати аналітично окремо на кожному часовому інтервалі, де виконується одна з нерівностей (7.3.5) або (7.3.6), але процедура зшивання цих кускових розв'язків у компактний вираз, придатний для

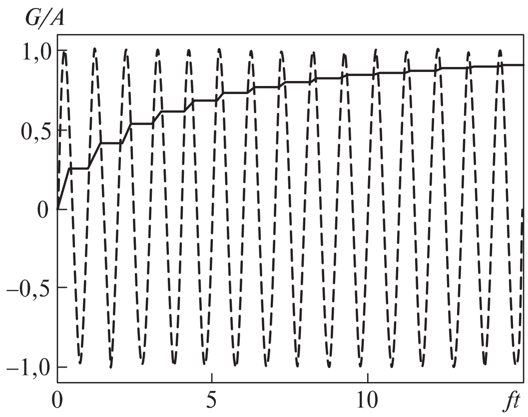

Рис. 7.8. Нормований розв'язок G/A кінетичного рівняння (7.3.3) для м'якого храповика за синусоїдального рушійного навантажування (7.3.2) для $\mu = 1$ с$^{-1}$, $\nu = 4000$ с$^{-1}$, $f = \omega/2\pi = 4000$ Гц, $\delta = 0$ і початкової умови $G(t = 0) = 0$ (суцільна східчастоподібна лінія). Штриховою лінією показано нормоване синусоїдальне рушійне навантаження $G_\sigma/A = \sin\omega t$). Час уздовж абсциси нормовано на період коливань $1/f$

якісного аналізу, видається непрактичною. Натомість, навіть побіжного погляду на комп'ютерні розв'язки (рис. 7.9) достатньо, щоб оцінити середнє (за часом) значення H усталеного розв'язку для G порівняно з амплітудою A синусоїдальної стимуляції, а також ефективну швидкість λ нагромадження за цикл (період) надлишкової складової концентрації G порівняно зі швидкістю ν монотонного зростання G за постійного розтягувального напруження. Будуючи рис. 7.9, вважали, що швидкість μ збігається зі своїм максимальним значенням $\mu_0 \exp(-U_0/kT)$, прийнятим за 1 с$^{-1}$, яке нижче (див. підрозд. 7.4) використано для інтерпретації експериментальних результатів з повільної динаміки. Частота $f \equiv \omega/2\pi$ дорівнювала 4000 Гц, швидкість ν випробовували при чотирьох суттєво різних значеннях 40; 400; 4000 та 40 000 с$^{-1}$ (відповідно криві *1—4* на рис. 7.9). Усі криві показують, що для $\nu \geq 0,01f$ ефективна швидкість циклічного нагромадження λ не падає нижче, ніж у п'ять-шість разів за швидкість ν. Більш того, при $\nu \geq 0,01f$ відношення H/A завжди перевищує значення в 0,8 і швидко досягає одиниці зі збільшенням відношення ν/f. Іншим важливим спостереженням є майже повне подавлення періодичних відхилень усталеного розв'язку G навколо середнього значення H (рис. 7.10).

Результати попереднього абзацу можуть бути легко узагальнені, якщо амплітуда A не є сталою, а зростає з часом доволі повільно так, що $0 < \dot{\varepsilon}/\varepsilon \ll \lambda \sim 0,2\nu$, де точка вказує на похідну за часом t. Тоді при $\nu \geq 0,01f$ надлишок концентрації дефектів G маємо трактувати як величину, що залежить від часу та ефективно слідує за поведінкою амплітуди A. Є всі підстави стверджувати, що обидві згадані умови виконуються в експериментах з резонансних коливань пісковикових стрижнів, коли збуджувальна частота змінюється в напрямку до резонансної. Так, нерівність $0 < \dot{\varepsilon}/\varepsilon \ll 0,2\nu$ підтримується тим фактом, що типове протягання навколо резонансу [190] не в змозі забезпечити рівень величини $|\dot{\varepsilon}|/\varepsilon$, більший за 0,5 с$^{-1}$. Щодо нерівності $0,01f \leq \nu$, то вона вочевидь повністю узгоджується з нашою гіпотезою про сильну нерівність $\mu \ll \nu$, убезпечену багатьма порядками (див. вище).

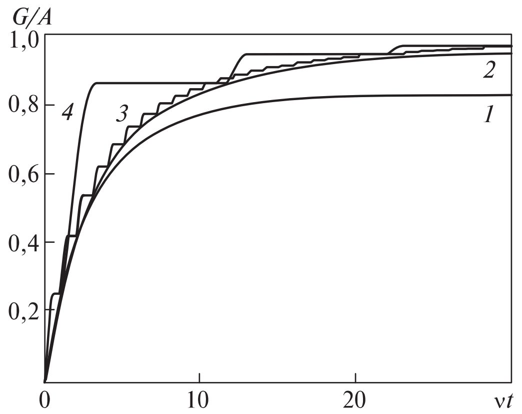

Рис. 7.9. Нормований розв'язок G/A кінетичного рівняння (7.3.3) для м'якого храповика за синусоїдального рушійного навантажування (7.3.2). Криві *1—4* послідовно відповідають швидкостям утворення дефектів $\nu_j = 4 \cdot 10^j$ с$^{-1}$ з усіма іншими параметрами з рис. 7.8. Час уздовж абсциси нормовано на обернену швидкість утворення дефектів $1/\nu$ окремо для кожної кривої

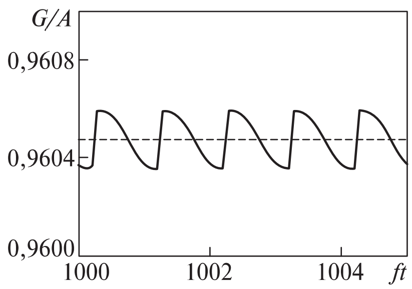

Рис. 7.10. Нормований розв'язок G/A кінетичного рівняння (7.3.3) для м'якого храповика за синусоїдального рушійного навантажування (7.3.2) для сталої стадії еволюції (суцільна крива). Штрихова лінія — нормоване середнє значення H/A. Умови, що використані для обчислень, ті самі, що і для кривої *2* з рис. 7.9. Час уздовж абсциси нормовано на період коливань $1/f$

Розглянемо режим повільної релаксації в системі міжзернових пошкоджених зв'язків. Це явище відбувається після того, як надлишкову складову концентрації G уже доведено до деякого усталеного значення B, після чого підготовче високоамплітудне збудження раптово (починаючи з моменту $t = t_c$) знижують до дуже низького рівня. В цьому випадку, тобто при $t > t_c$, утримується нерівність $B \gg A$ і пружна підсистема слугує лише для зондування резонансної частоти, а її впливом на підсистему пошкоджених зв'язків можна повністю знехтувати. Тому в кінетичному рівнянні для G скрізь опустили член G_σ і одержали

$$dG/dt \simeq -\mu G, \tag{7.3.7}$$

пам'ятаючи, що цікавий для нас режим розпочинається при $t = t_c$ з $G(t = t_c) = B$. Оцінка величини B є такою:

$$B = c_0 \left[\exp\left(\frac{v\sigma_+}{kT} \right) - 1 \right], \tag{7.3.8}$$

де $\sigma_+ > 0$ характеризує максимальне напруження, визначене амплітудою осциляцій напруження підготовчого високоінтенсивного динамічного нагнітання при $t > t_c$.

Указаний підхід є безумовно справедливим для опису процесу релаксації і після статичної розтягувальної підготовки (кондиціювання) зразка, коли σ_+ слід розуміти як додатне прикінцеве напруження. Сподіваємося, що цей підхід можна застосувати і для розгляду релаксаційних явищ після раптових термічних збурень, якщо σ_+ ототожнити з деяким ефективним розривним напруженням, зумовленим параметрами термічного удару.

Кінетичне рівняння (7.3.7) для надлишкової складової концентрації G при $t \geq t_c$ дає експоненційно спадний розв'язок

$$G = B \exp[-\mu(t - t_c)]. \tag{7.3.9}$$

Проте це ніяким чином не веде саме до експоненційного зменшення справжньої надлишкової концентрації $c - c_0$. Дійсно, підставивши розв'язок (7.3.9) у формулу (7.2.3) для справжньої концентрації c з використанням означення (7.3.1), легко одержуємо

$$c = c_0 + \frac{B}{\chi} \{ E_1[\tau \exp(-\chi)] - E_1(\tau) \}. \tag{7.3.10}$$

Тут

$$\tau \equiv \mu_0 \exp(-U_0/kT)(t - t_c) \tag{7.3.11}$$

означає безрозмірний час, а

$$\chi \equiv U_+/kT \tag{7.3.12}$$

задає безрозмірну ширину енергетичного інтервалу, заповненого розподілом активаційних бар'єрів для процесу відновлення когезії. Нарешті, вираз

$$E_1(z) = \int_1^\infty \frac{dy}{y} \exp(-zy) \tag{7.3.13}$$

означає інтегральну експоненційну функцію [62].

Всупереч своїй назві, $E_1(z)$ спочатку веде себе логарифмічно, що ясно видно з її аналітичного розкладу при $z < 1$ [62]:

$$E_1(z) = -C - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z!}{n \cdot n!}, \tag{7.3.14}$$

де $C \simeq 0,5772157$ є константою Ейлера—Маскероні. На кінцевій стадії $z > 1$, проте слушним виявляється використання асимптотичного розкладу [62]

$$E_1(z) = \frac{\exp(-z)}{z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n} \right]. \tag{7.3.15}$$

Застосуємо розклади (7.3.14) і (7.3.15) до найправдоподібнішого випадку, коли $\exp(-\chi) \gg 1$, і апроксимуємо різницю $E_1(\tau \exp(-\chi)) - E_1(\tau)$, що контролює відновлення (зменшення) в часі концентрації дефектів (7.3.10) кусковою формулою

$$E_1(\tau \exp(-\chi)) - E_1(\tau) \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} \chi - \tau + \tau^2/4 + \tau \exp(-\chi), & \tau < \xi_- \\ \chi - C - \ln \tau + \tau \exp(-\chi), & \xi_- \le \tau \le \xi_+ e^\chi \\ \dfrac{\exp(-\tau \exp(-\chi))}{\exp(-\chi)}, & \xi_+ e^\chi < \tau. \end{cases} \tag{7.3.16}$$

Тут константи $\xi_- \simeq 1,391\ 099\ 0$ і $\xi_+ \simeq 0,928\ 630\ 6$ визначають розв'язками трансцедентних рівнянь

$$-\xi_- + \xi_-^2/4 = -C - \ln \xi_- \tag{7.3.17}$$

та

$$-C - \ln \xi_+ + \xi_+ = \frac{\exp(-\xi_+)}{\xi_+}, \tag{7.3.18}$$

відповідно. Рівняння (7.3.17) і (7.3.18) мають сенс умов неперервності кускового представлення (7.3.16) у точках $\tau = \xi_-$ та $\tau = \xi_+ \exp(\chi)$ відповідно. Чим більшою є нерівність $\exp(\chi) \gg 1$, тим довшим стає інтервал майже логарифмічної часової залежності у формулі (7.3.16), а отже, і у формулі (7.3.10) для c.

Формули (7.3.8), (7.3.10) і (7.3.16), підставлені до лінійної залежності між модулем Юнга E та концентрацією дефектів c, дають змогу аналітично відтворити повільне, майже логарифмічне відновлення (збільшення) модуля Юнга

$$\begin{aligned} E = \left(1 - \frac{c_0}{c_{\text{cr}}}\right) E_+ - E_+ \frac{c_0}{c_{\text{cr}}} \left[\exp\left(\frac{v\sigma_+}{kT}\right) - 1\right] \times \\ \times \left\{1 - C\frac{kT}{U_+} - \frac{kT}{U_+} \ln\left[\mu_0 \exp\left(-\frac{U_0}{kT}\right)(t - t_c)\right] + \right. \\ \left. + \frac{kT}{U_+}\mu_0 \exp\left(-\frac{U_0 + U_+}{kT}\right)(t - t_c)\right\} \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

упродовж досить тривалого часового інтервалу

$$\frac{\xi_-}{\mu_0} \exp\left(\frac{U_0}{kT}\right) < t - t_c < \frac{\xi_+}{\mu_0} \exp\left(\frac{U_0 + U_+}{kT}\right). \tag{7.3.20}$$

Цей тип відновлення спостерігається експериментально за допомогою моніторингу часової зміни резонансної частоти після вимкнення інтенсивного кондиціонуючого збурення [192].

Ідею, що виправдовує логарифмічне відновлення модуля Юнга, раніше вже обговорювали Дж. ТенКейт, Е. Сміт та Р. Гуєр [192], проте без вказівок на належні часові рамки (7.3.20), де логарифмічна залежність працює, та без урахування малої лінійної поправки (останній член у фігурних дужках виразу (7.3.19) для E) до провідного логарифмічного члена. Цікаво зауважити, що в природі логарифмічна кінетика трапляється доволі часто і є, наприклад, невід'ємним атрибутом процесу, індукованого вологою старіння гранульованих середовищ [117].

7.4 Моделювання резонансних нелінійних ефектів

Переважну більшість експериментальних результатів з вимушених поздовжніх коливань пісковикових стрижнів одержано з використанням повільного покрокового протягання привідної частоти навколо однієї з резонуючих частот стрижня [138–140, 152, 190–192]. Груба оцінка, побудована на лінійній теорії кінематичного збудження, дає для стрижня фундаментальні частоти

$$f_0(l) = \frac{2l-1}{4L}\sqrt{E_0/\rho} \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots), \tag{7.4.1}$$

де E_0 — модуль Юнга у нездеформованому відновленому зразку, заданий формулою (7.2.6) при $\sigma = 0$, а загасання γ вважаємо нехтовно малим. Відносні положення фундаментальних частот за скінченного загасання, обчислені для повільного вихідного протягання збуджувальної частоти, показано на рис. 7.11. Тут резонансна крива характеризує залежність амплітуди відгуку R (взятої на вільному кінці стрижня $x = L$) від привідної частоти $f = \omega/2\pi$ при дуже малій рушійній амплітуді $D = 7,6 \cdot 10^{-9}L$ з модельними параметрами, прийнятими для рис. 7.12. Комп'ютерне моделювання нелінійних ефектів і ефектів повільної динаміки виконано в околі другої резонансної частоти $f_0(l = 2)$ з фундаментального ряду (7.4.1).

На рис. 7.12 представлено типові гістерезисні резонансні криві, обчислені поблизу другої резонансної частоти за все більших рушійних амплітуд D. Щоб досягти відтворювального гістерезису, кожну наступну пару кривих обчислювали після двох

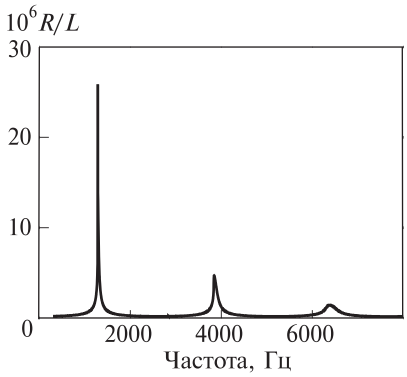

Рис. 7.11. Розрахункова резонансна крива з першими трьома піками за поздовжнього кінематичного збудження для стрижня з пісковику

підготовчих протягань (одного підготовчого циклічного протягання) частоти. Такі підготовлені криві експериментатори зазвичай називають кондиційованими [190] (див. рис. 7.2). Стрілки на прикладі двох найвищих кривих вказують напрямок протягання частоти. Часовий цикл для висхідного та низхідного протягання в межах частотного інтервалу 3700—4100 Гц становив 120 с. Модельні параметри приймали відповідними експериментальним умовам та експериментальним даним Дж. ТенКейта і Т. Шенкланда в експериментах з пісковиком Береа [190]. Зокрема, відношення $E_+/\rho = 7,439 \cdot 10^6$ м^2/с^2 оцінювали зі співвідношень (7.2.6), (7.2.7) та (7.4.1) при другій резонансній частоті $f_0(l = 2) = 3920$ Гц, довжині стрижня $L = 0,3$ м, температурі $T = 297$ К і водонасиченості $s = 0,25$. Відношення $\gamma/\rho = 1,851$ м^2/с, що характеризує внутрішнє тертя, вибрано з найкращого підлаштування низькоамплітудної теоретичної кривої (кривої з $j = 0$, рис. 7.12) до її експериментального прообразу [190] (див. рис. 7.2) за порівняння теоретичної та експериментальної добротностей. Параметри $\mu_0 \exp(-U_0/kT) = 1$ с$^{-1}$ та $U_+/k = 2525$ К, що визначають характер повільної релаксації, оцінювали відповідно до експериментальних вимірювань часової релаксації відгуку амплітуди прискорення за фіксованої частоти [190] і до спостережень відновлення резонансної частоти як функції часу [192]. Унаслідок доволі повільних типових режимів протягань частоти в реальних експериментах немає ані експериментальної змоги, ані теоретичної потреби приписувати певні конкретні значення параметрам $\nu_0 \exp(-W_0/kT)$ та W_+/k, що відповідають за кінетику утворення дефектів. Це пов'язане з тим, що вище деякого критичного значення, залежного від рушійної частоти, комбінація $\nu_0 \exp(-(W_0 + W_+)/kT)$ приводить до результатів, які не відрізняються від результатів, одержаних для безмежного значення вказаної комбінації. Згідно з оцінками, викладеними у підрозд. 7.3, для того щоб кінетику утворення дефектів трактувати як практично миттєву (тобто формально характеризувати безмежною швидкістю ν), умова виконується вже за нерівності $0,01 f_0 \leq \nu_0 \exp(-(W_0 + W_+)/kT)$. Комбіна-

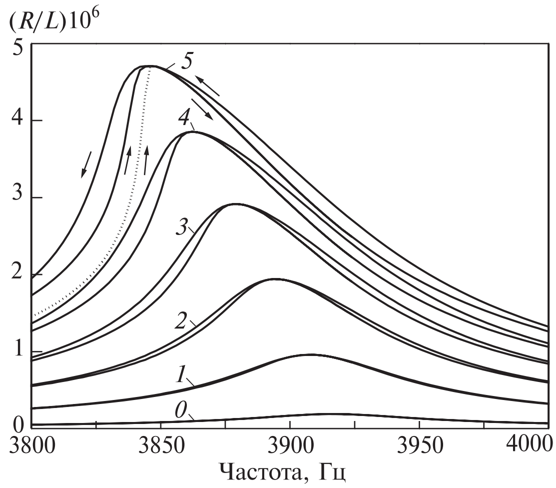

Рис. 7.12. Сімейство резонансних кривих $j = 0$—5 для кондиційованого стану за суттєво високих значень рушійних амплітуд D: $D/L = 3,8(j + 0,5\delta_{j0}) \cdot 10^{-8}$; пунктирна крива відповідає некондиційованому стану; стрілки на найвищих кривих вказують на напрямок зміни частоти; час, за який частота пробігає вперед і назад в інтервалі 3700—4100 Гц, становить 120 с

ція параметрів $vE_+/kT\cosh\eta = 275$ K була вибрана так, щоб кількісно відтворити гістерезисні явища в режимах протягань, типових для реальних експериментів [190]. Нарешті, параметр нелінійності $\cosh\eta = 2300$ був оцінений з міркувань адекватного відображення істинної асиметрії експериментальних резонансних кривих [190]. Інші параметри, які з'являються у співвідношенні напруження—деформація (7.2.10), були вибрані такими: $r = 4$, $a = 2$.

На рис. 7.12 ясно видно, що для кожного рівня зовнішнього збурення ефективна ширина резонансного піка залежить від напрямку протягання частоти і є вужчою за висхідного протягання (тобто від нижчих до вищих частот), ніж за низхідної (тобто від вищих до нижчих частот). Унаслідок цього спостерігаємо гістерезисні петлі, утворені висхідною та низхідною кривими на їхніх низькочастотних і високочастотних гілках. Історично саме цей ефект і засвідчив перший прояв повільної динаміки [190], спричинений, згідно з нашою теорією, надлишковим створенням міжзернових дефектів, коли рушійна частота наближається до резонансу (тобто коли амплітуда напруження зростає), та доволі повільною їх анігіляцією, коли рушійна частота віддаляється від резонансу (тобто коли амплітуда напруження спадає). Слід зауважити, що у випадку розглянутих кондиційованих кривих анігіляція міжзернових дефектів триває навіть тоді, коли рушійна частота вже просувається здалеку в бік резонансу. Ця ситуація утримується, допоки амплітуда напруження не досягне певного порогу, вище якого починає превалювати процес утворення дефектів.

Порівняння теоретичних резонансних кривих (рис. 7.12) з експериментальними [190] (див. також рис. 7.2) показало, що теоретичні резонансні криві відтворюють всі основні особливості експериментальних резонансних кривих:

• для заданого рівня рушійної амплітуди резонансна частота та рівень деформації в точці резонансу не залежать від напрямку протягання — знизу уверх або зверху вниз; усі криві проходять через одну найвищу точку, зокрема і для некондиційованого стану;

• резонансна частота зсувається в бік зменшування частоти майже лінійно за збільшення рівня рушійного збурення (див. також рис. 7.15);

• гістерезисна поведінка теоретичних резонансних кривих ідентична поведінці експериментальних кривих (див. рис. 7.2).

Резонансні криві на рис. 7.13 обраховані без будь-якого попереднього кондиціювання, проте модельні параметри такі самі, як і для кривих рис. 7.12. Амплітуду нагнітання вибрано таку само, як і для двох найвищих кривих з рис. 7.12. Отже, рис. 7.13, *а* демонструє три резонансні криві, одержані завдяки трьом послідовним протяганням частоти уверх—униз—уверх, починаючи з протягання знизу уверх. Початкова некондиційована

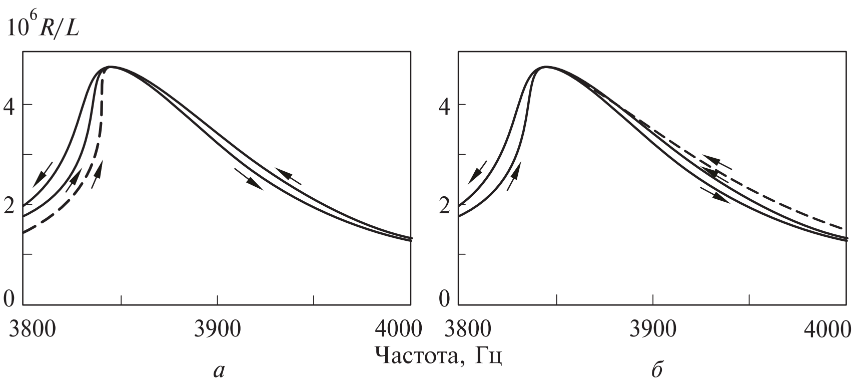

Рис. 7.13. Резонансні криві для $D = 1,9{\cdot}10^{-7}L$. Швидкість протягання $|df/dt| = 400$ Гц/хв. *Початкове протягання*: *а* — з низьких частот, *б* — з високих частот; стрілками показано напрямок протягання частоти; штрихові лінії — некондиційований зразок

крива (штрихова лінія) лежить нижче двох наступних (кондиційованих) кривих. На рис. 7.13, *б* резонансні криві побудовано за трьома послідовними (вниз—уверх—униз) протяганнями частоти починаючи з протягання зверху вниз. Початкова крива (штрихова лінія) лежить вище від двох наступних кривих. Криві, зображені суцільними лініями на рис. 7.13, практично повторюються і збігаються, відповідно, з двома найвищими кривими з рис. 7.12.

Усі ці результати узгоджуються з експериментальними спостереженнями [190]. Криві некондиційованого зразка (рис. 7.13, *а*) та кондиційованого (рис. 7.12) з протяганням частоти знизу уверх в інтервалі між початковою частотою і резонансною не збігаються, тому що модуль Юнга для кривої кондиційованого зразка нижчий за модуль Юнга для кривої некондиційованого зразка, оскільки анігіляція надлишку дефектів, утворених під час початкового протягання, не встигає повністю відбутися за час протягання від резонансної до найнижчої частоти.

У міру зменшення швидкості протягання згадані вище відмінності стають усе менш виразними внаслідок додаткового часу для релаксації на кожній з проміжних частот. Це проілюстровано на рис. 7.14, де швидкість протягання становить лише соту частку такої з рис. 7.13. Тим не менш навіть у цьому начебто безгістерезисному випадку пам'ять про найвищу амплітуду деформації все ще утримується. Останній результат, схарактеризований після його експериментального відкриття [190] як "можливо несподіваний", легко пояснити довготерміновістю відновлення модуля Юнга, продиктованою повільною, майже логарифмічною кінетикою анігіляції дефектів (див. формули (7.3.19), (7.3.20), (7.3.10) та (7.3.16)). За ще повільніших швидкостей протягання

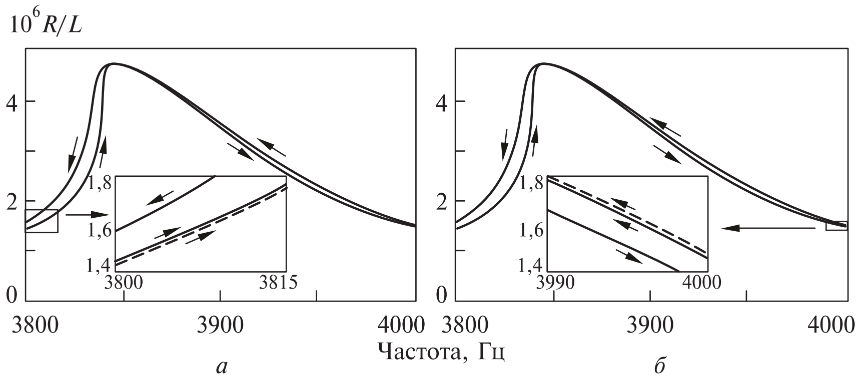

Рис. 7.14. Резонансні криві для $D = 1,9{\cdot}10^{-7}L$. Швидкість протягання $|df/dt| = 4$ Гц/хв. Умовні позначення див. на рис. 7.13

частоти з циклом в одну добу всі три криві стають нерозрізненними незалежно від напрямку початкового протягання. Цей теоретичний результат підтверджує непряму експериментальну вказівку (одержану вимірюваннями прискорення за фіксованої частоти), що прогін тривалістю у кілька діб у старанно контрольованих умовах мав би продукувати одні й ті самі висхідні та низхідні резонансні криві [190].

На рис. 7.15 показано зсуви резонансної частоти як функції рушійної амплітуди для двох значень параметра дилатації v за інших параметрів, утриманих такими самими, як і для рис. 7.12. Так, крива *1*, обчислена при $vE_+/kT \cosh \eta = 275$ K, коли індукований деформацією зворотний зв'язок між повільною та швидкою підсистемами є істотним, демонструє майже лінійну залежність, типову для матеріалів з некласичним нелінійним відгуком, тобто матеріалів, що мають основні риси повільної динаміки. Навпаки, крива *2*, обчислена при $v = 0$, коли індуковане деформацією збуджування повільної підсистеми відсутнє і обопільний зворотний зв'язок між повільною та швидкою підсистемами повністю зруйнований, демонструє майже квадратичну за-

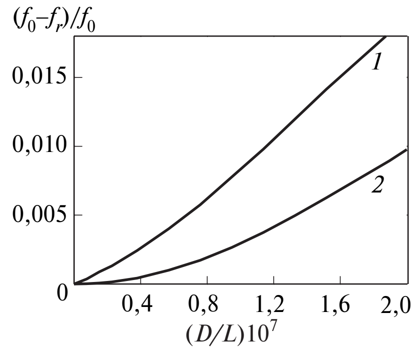

Рис. 7.15. Від'ємне значення зсуву $f_r - f_0$ резонансної частоти f_r від її асимптотичного значення f_0 як функція рушійної амплітуди D для нелінійного гістерезисного матеріалу (крива *1*) і для класичного нелінійного матеріалу з $v = 0$ (крива *2*)

лежність, типову для матеріалів з класичним нелінійним відгуком [12]. Пильніше обстеження вказує, що крива *1* може бути апроксимованою лінійним і квадратичним членами, що відповідає поліноміальній підгонці другого порядку для модуля Юнга, виокремленої Е. Смітом і Дж. ТенКейтом з експериментів [182].

У підрозд. 7.1 розглянуто експериментальні вимірювання [190] поступової релаксації амплітуди прискорення за незмінної частоти (див. рис. 7.4). Вони висвітлюють найцікавіші аспекти кінетики відтворення початкового стану, ілюструючи, як пісковик втрачає пам'ять про найвищу деформацію [190]. Ми виконали числове моделювання наведених експериментальних результатів

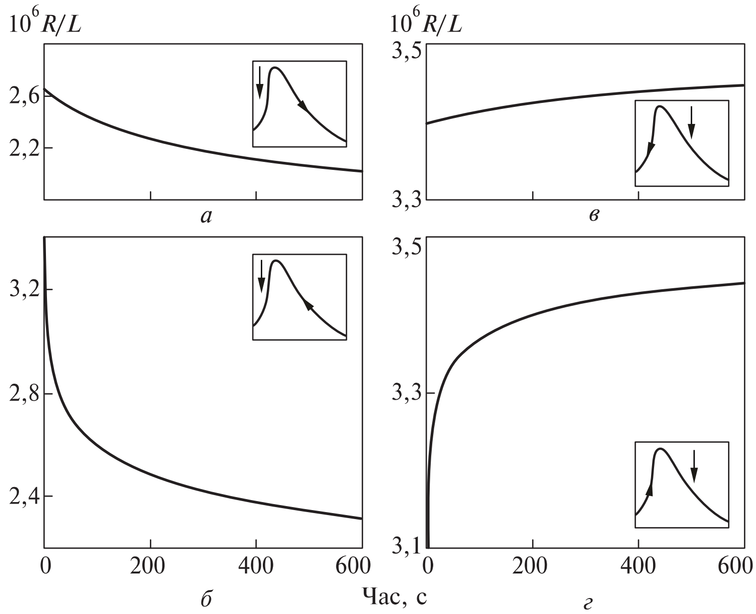

Рис. 7.16. Відновлення амплітуди R для рушійної амплітуди $D = 1,9\times$ $\times 10^{-7} L$: *а*, *б* — за сталої частоти $f_s = 3825$ Гц, яка нижча за частоту піка; $f_r = 3846$ Гц; *в*, *г* — за сталої частоти $f_s = 3900$ Гц, яка вища за частоту піка; *протягання частоти*: *а*, *г* — знизу уверх, *б*, *в* — зверху вниз

(рис. 7.16). Зазначимо, що один раз вибрані сталі величини, за яких були узгоджені між собою теоретичні та експериментальні дані для рис. 7.12, не змінювали в усіх подальших наведених нижче числових розрахунках. Теоретичні релаксаційні криві (рис. 7.16) коректно відтворюють головні ознаки експерименту [190] (див. також рис. 7.4). Розрахувавши резонансні криві за протягання частоти уверх або вниз (з керівними параметрами такими, як для двох найвищих кривих на рис. 7.12), протягання частоти в момент часу t_s (не вимикаючи самого рушія) було зупинено і підраховано амплітуду відгуку R як функцію часу $t - t_s$. Як і в реальних експериментах, розрахункова амплітуда відгуку поступово зменшувалася, коли зупинена частота була нижчою за резонансну частоту (рис. 7.16, *а*, *б*), та збільшувалася, коли зупинена частота була вищою за резонансну (рис. 7.16, *в*, *г*). Більше того, приблизно після 10-хвилинної релаксації релаксаційні криві за конкретної зупиненої частоти наближались до довготермінового рівня, що відповідав некондиційованій частині початкової резонансної кривої, незалежно від того висхідним чи низхідним було вибрано попередній прогін.

Щоб відтворити іншу експериментальну особливість, а саме відновлення властивостей зразка з часом [190] (див. рис. 7.5), ми провели числове моделювання, в якому зупинили протягання частоти та одночасно вимкнули і рушій на 30 с. Результат для протягання частоти від нижніх до верхніх значень показано на рис. 7.17, *а*, а для протягання зверху вниз — на рис. 7.17, *б*. На цих розрахункових кривих штриховою лінією відмічено початкові криві для некондиційованого стану (порівн. рис. 7.17, *а* з рис. 7.3, *а*, а також рис. 7.17, *б* з рис. 7.3, *б*). Відповідно до кінетичного рівняння (7.2.1), відмінність кривих зразків у некондиційованому та кондиційованому станах можна пояснити так: сприятливіший режим для анігіляції дефектів відбувається за нульової напруженості порівняно з режимом осциляційної напруженості зі значною амплітудою (хоча і меншою за резонансну). До того ж, рушійна амплітуда і швидкість протягання (крім короткого інтервалу зупинки протягання та рушійного наванта-

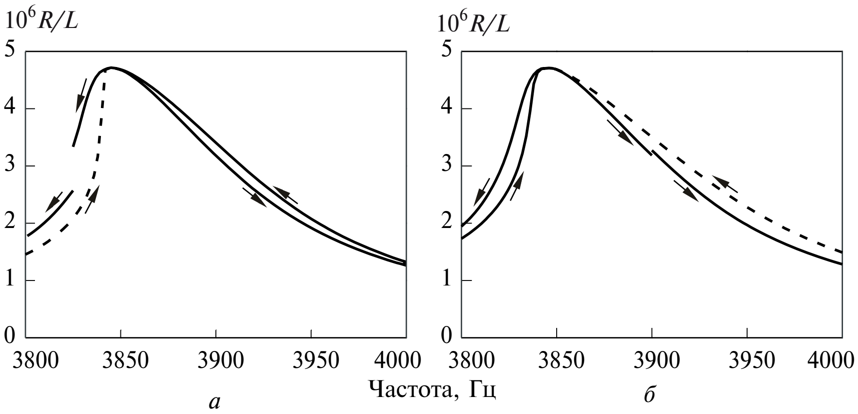

Рис. 7.17. Резонансні криві, $D = 1,9 \cdot 10^{-7} L$, $|df/dt| = 400$ Гц/хв: *а* — протягання частоти уверх і наступне кусково-неперервне протягання вниз, протягання і рушійне навантаження вимикали одночасно на 30 с за сталої частоти $f_s = 3825$ Гц; *б* — протягання частоти вниз і наступне кусково-неперервне протягання уверх, на частоті $f_s = 3900$ Гц протягання і рушійне навантаження вимикали одночасно на 30 с

ження) були вибрані такими самими, як і для двох найвищих кривих на рис. 7.12. Ефекти швидкого відновлення (зростання) модуля E за інтервал часу, коли протягання частоти та рушійне навантаження були зупинені, легко вгледіти на рисунках як розриви кривих. На зупинених частотах, нижче резонансу, амплітуда відгуку провалювалась ближче до першої (некондиційованої або те саме — відновленої) кривої з висхідним протяганням (рис. 7.17, *а*, штрихова лінія). На зупинених частотах вище резонансу амплітуда відгуку підскакувала ближче до першої (некондиційованої або те саме — відновленої) кривої з висхідним протяганням (рис. 7.17, *б*, штрихова лінія). Зрозуміло, що стрибки відбуваються від опосередкованого впливу деформації на модуль Юнга через концентрацію дефектів. За інтервал часу, поки частоту змінювали уверх, інтенсивність деформації стає суттєвою, що викликає утворення дефектів, а тому модуль Юнга зменшується. Цей ефект проявляється як зсув резонансної кривої вниз за частотою. Якщо тепер рушій та протягання призупинити, деформація зникає, спричиняючи посилену анігіляцію дефектів так, що модуль Юнга збільшується. Як наслідок, резонансна частота, що відстежена після відновлення дії приводу та протягання частоти, також відновлюється (тобто повертається уверх за частотою) в міру втрати пам'яті про найвищу деформацію.

Отже, теоретичні результати не тільки якісно, а й кількісно відтворюють усі відомі експериментальні дані.

7.5 Ефект повільної динаміки

У підрозд. 7.4 показано, що якщо рушійне навантажування суттєво знизити, то деформація спадає, що приводить до анігіляції дефектів, а тому модуль пружності поступово зростає. Відновлення властивостей середовища можна бачити, аналізуючи ефект повільної динаміки. Наслідком відновлення властивостей (втрата пам'яті про високу деформацію) є зсув назад (тобто знизу вверх за частотою) резонансних кривих, за якими спостерігають за допомогою низького рівня рушійного навантажування.

На рис. 7.18 показано поступове відновлення резонансної частоти f_r до максимально граничного значення f_0 після того, як стрижень був підданий дії високоамплітудного кондиціювання, яке потім було зупинено. Кондиціювання виконували багаторазовим короткоінтервальним протяганням частоти приводу в межах резонансної частоти за рівня рушійної амплітуди, використаної для одержання третьої пари ($j = 3$) резонансних кривих на рис. 7.12. Наведені результати моделюють експериментальні дані (див. рис. 7.6). Три різні криві на рис. 7.19 відповідають трьом різним водонасиченням, тоді як усі інші параметри, прийняті раніше для рис. 7.12, зберігаються. Загальний зсув резонансної частоти $f_r - f_0$ складається з двох фізично різних частин: а) очікуваний динамічний зсув, зумовлений нелінійністю деформації для високих рівнів збудження; б) зсув, зумовлений повільною підсистемою. Проте тільки друга (кінетична) частина зсуву зазвичай може бути зареєстрована в процесі відновлен-

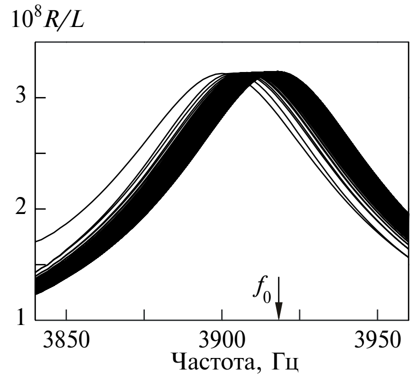

Рис. 7.18. Набір резонансних кривих, одержаних циклічним протяганням частоти знизу уверх і назад навколо резонансної частоти після призупинення високоамплітудного нагнітання. Стрілка вказує на асимптотичну резонансну частоту. Водонасичення, амплітуда зондування та абсолютна величина швидкості протягання частоти такі: $s = 0,25$; $D = 1,14 \cdot 10^{-9} L$; $|df/dt| = 400\,$Гц/хв

ня, тому що перша частина зникає майже миттєво, як тільки вимикають рушійне навантажування. Тому видиме відновлення частоти повинне неминуче підпорядковуватися тільки повільній кінетиці відбудови міжзернових когезійних зв'язків [192]. На рис. 7.19 ясно видно дуже довгий інтервал $10 \leq (t - t_c)/t_c \leq 1000$ логарифмічного відновлення резонансної частоти f_r у цілковитій згоді з експериментальними результатами [192] та нашими аналітичними розрахунками, підсумованими формулами (7.3.19) та (7.3.20). Тут t_c вказує на момент вимкнення кондиціювання, а $t_0 = 1\,c$ є часовою масштабною константою.

Спосіб низькочастотного зондування відновленої резонансної частоти, що визначає f_r як функцію часу, слідує одній і тій самій процедурі і в експерименті, і в теорії. Після того як високоамплітудне кондиціювання зупинено, низькоамплітудний привід залишається увімкненим, для того щоб багаторазово протягати резонансну криву та контролювати рухоме положення резонансної частоти f_r. Рис. 7.18 ілюструє набір послідовних резонансних

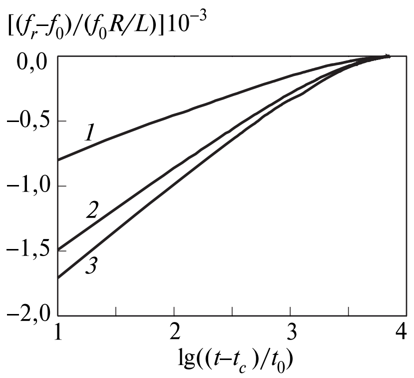

Рис. 7.19. Часова залежність відновлення резонансної частоти f_r до її асимптотичного значення f_0 після значного рушійного навантаження. Криві *1—3* відповідають водонасиченню $s = 0,05$; 0,15; $0,25$. Зсув частоти $f_r - f_0$ нормований як асимптотичною частотою f_0, так і амплітудою відгуку R/L, що досягається під час нагнітання

кривих, що відповідає залежному від часу відновленню резонансної частоти кривої *3* на рис. 7.19. За кожне наступне циклічне протягання криві зсуваються уверх за частотою і поступово наближаються до асимптотичної кривої з граничною резонансною частотою f_0, вказаною стрілкою на рис. 7.18. Лише частина послідовних резонансних кривих, обчислених на часовому інтервалі $t - t_c$, є чітко розділеною, оскільки відокремлення сусідніх кривих прискорено зникає з кожним наступним протяганням. Амплітуду зондувального приводу вибирали якомога меншою: $D = 1,14 \cdot 10^{-9} L$.

7.6 Динамічна реалізація явища запам'ятовування кінцевої точки

Запропонована модель дає змогу коректно описувати широкий клас експериментальних фактів, пов'язаних з незвичайною динамічною поведінкою мезоскопічних неоднорідних середовищ, таких як пісковик [190–192]. Більше того, як показано нижче, ми передбачили явище гістерезису із запам'ятовуванням кінцевої точки в суто динамічній постановці. Такі теоретичні передбачення в подальшому були експериментально підтверджені в Лос-Аламоській Національній лабораторії.

На рис. 7.12 проілюстровано динамічну реалізацію гістерезисних явищ у випадку лише двох точок повороту 3700 і 4100 Гц у протяганні привідної частоти. Виникає питання: чи міг би ефект, подібний до ефекту пам'яті про кінцеву точку (дискретної пам'яті), що спостерігається в квазістатичних експериментах з багаторазовим реверсивним протоколом навантажування—розвантажування [115,138,139,141] (див. також розд. 6), виникнути і в динамічних експериментах на резонансно збуджуваних стрижнях з багаторазово реверсивним протоколом зміни частоти.

Цю проблему вивчали теоретично. Деякі графічні результати дослідження представлені на рис. 7.20, де модельні параметри включно з абсолютними значеннями швидкості протягання частоти збігаються з такими для двох найвищих кривих з рис. 7.12, а область реверсивного протягання частоти вибрано в межах низькочастотних гілок цих кривих. Пам'ять про кінцеву точку, тобто пам'ять про попередню максимальну амплітуду альтернованого напруження, має вигляд малих гістерезисних петель всередині великої петлі. Початкова та кінцева точки кожної малої петлі на рис. 7.20 збігаються, що є найтиповішим проявом пам'яті про кінцеву точку.

Згідно з нашою теорією, при побудові гранично малої внутрішньої петлі на кондиційованій (суцільна лінія) кривій шанс створити її замкнутою спадає пропорційно до її лінійного розміру, причому цей шанс є меншим для низхідної кривої і більшим для верхньої частини висхідної кривої. Причина такої поведінки полягає в існуванні деякого (залежного від попередньої історії) порогу на амплітуду напруження, який мусить бути подоланий для того, щоб кінетика повільної підсистеми змогла перемкнутися з анігіляції дефектів за нижчих амплітуд на створення дефектів за вищих амплітуд. Це обмеження можна істотно послабити, коли лінійний розмір внутрішньої петлі стає зіставним з лінійним

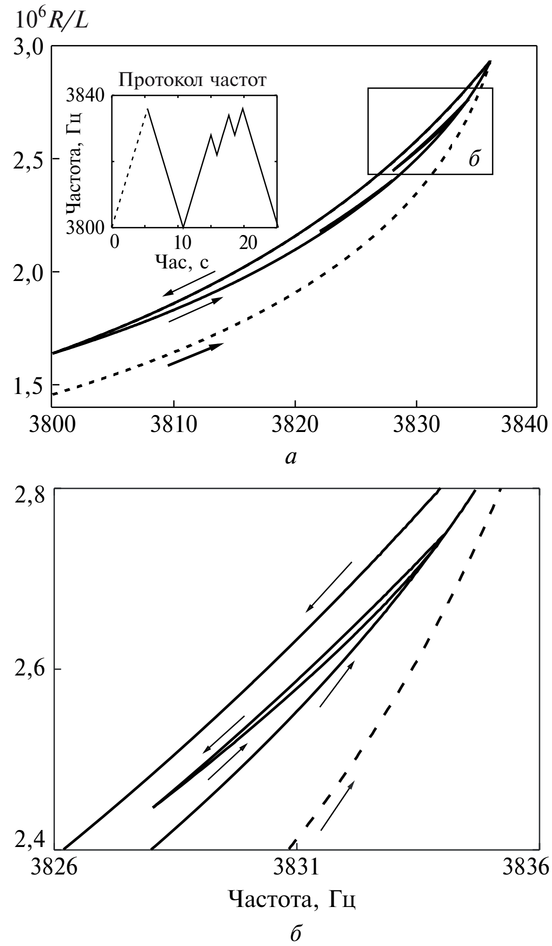

Рис. 7.20. Ефект пам'яті про кінцеву точку в динамічному відгуку з багаторазовою зміною напрямку протягання в протоколі частоти. Модельні параметри, включаючи абсолютну швидкість протягання частоти, збігаються з тими, що задані для двох найвищих кривих на рис. 7.12. Інтервал протягання частоти покриває низькі частоти резонансних кривих для двох найвищих кривих з рис. 7.15. R — амплітуда відгуку, яку вимірюють на вільному кінці стрижня пісковику

розміром великої петлі. Навпаки, маючи справу з некондиційованою кривою (штрихова лінія) замкнута внутрішня петля може бути створена де завгодно і без будь-яких обмежень на свою малість (на рис. 7.20 не показано).

Таким чином, ми передбачили явище гістерезису з пам'яттю про кінцеву точку, по суті, під час динамічного навантажування [220]. Теоретичні результати (рис. 7.20) спонукали проведення експериментальних вимірювань [222] для перевірки наших передбачень. Нижче наведено ексклюзивні експериментальні вимірювання (рис. 7.21), виконані нашими колегами Дж. ТенКейтом (TenCate) і Т. Шенкландом (Shankland) з Лос-Аламоської Національної лабораторії [222]. Ми виконали пряме моделювання (рис. 7.22) нових експериментальних результатів [222] і одержали дуже добре узгодження теорії та експерименту.

Докладніше опишемо згаданий експеримент та його моделювання. Відповідно до теоретичних результатів (рис. 7.20), наші колеги з Лос-Аламоської Національної лабораторії провели експериментальні вимірювання [222] з метою перевірити (чи спростувати) наше передбачення. Стрижневий зразок було виготовлено з пісковику Фонтенбло (Fontainebleau), тому теоретичні та експериментальні результати слід порівняти лише на якісному рівні. На рис. 7.21 низькочастотні гілки резонансних кривих відповідають частотному протоколу, показаному на вкладці. Рівень деформації в максимальній точці під час протягання частоти становив приблизно $2 \cdot 10^{-6}$. Добре видно, що початок і кінець кожного внутрішнього циклу збігаються, а отже, головна властивість пам'яті про кінцеву точку в динамічній реалізації підтверджується.

У подальшому ексклюзивні експериментальні результати [222] стимулювали нас до проведення додаткового моделювання. Використавши існуючі модельні рівняння і константи (включаючи рівняння стану), які характеризують пісковик Береа [220–222] (див. також підрозд. 7.2), ми виконали комп'ютерне моделювання, щоб відтворити експериментальні результати для пісковику Фонтенбло (рис. 7.21). При цьому вважали, що запропонована

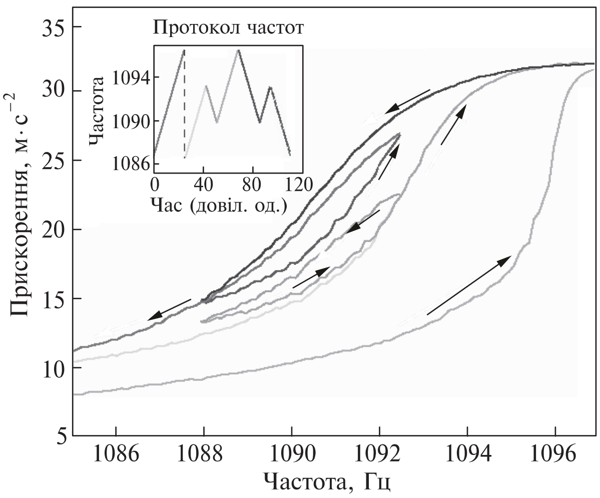

Рис. 7.21. Низькочастотні гілки експериментальних резонансних кривих для пісковику Фонтенбло [222]

фізична модель описує поведінку обох різновидів пісковиків — Береа (рис. 7.22) та Фонтенбло. Чітко видно якісну узгодженість між експериментальними (рис. 7.21) і теоретичними кривими (рис. 7.22).

Зробимо декілька важливих зауважень, що вказують на фізичну обґрунтованість запропонованої моделі резонансної поведінки стрижня пісковику. По-перше, один раз вибрані параметри для моделювання одного лише експерименту, а саме моделювання резонансних кривих на рис. 7.12, виявилися придатними для опису всієї низки проведених експериментів. По-друге, після того як модель була розвинута, а потім з'явилися нові експериментальні результати, вдалося описати їх у деталях. Отже, розвинута модель динамічної поведінки пісковику фізично адекватно відтворює експериментальні закономірності і може бути використана для подальших досліджень.

Запропоновано модель для пояснення та моделювання нелінійних ефектів і ефектів повільної динаміки, які виявляє стрижень пісковику в експериментах з поздовжнього резонансу. Ра-

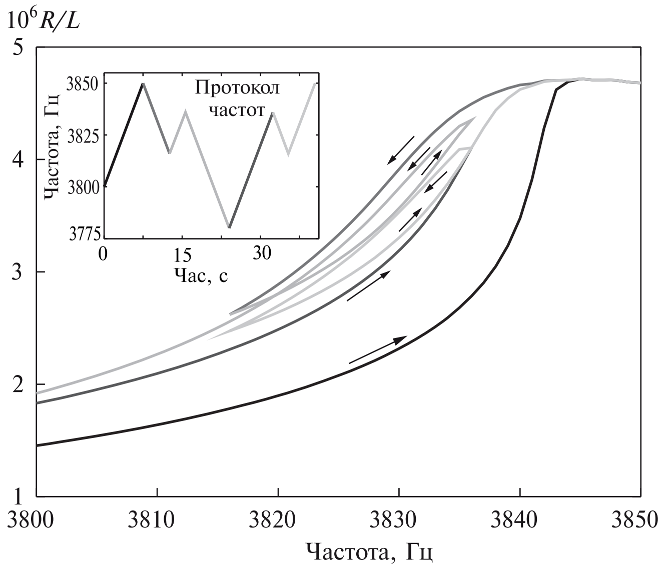

Рис. 7.22. Низькочастотна гілка резонансних кривих, розрахована для пісковику Береа (Berea)

зом із швидкою підсистемою поздовжніх нелінійних зміщень досліджено пов'язану з нею повільну підсистему зруйнованих міжзернових зв'язків. Показано, що навіть найпростіше, але феноменологічно коректне моделювання взаємного впливу між підсистемами, висвітлює головні експериментальні ефекти, типові для силових поздовжніх коливань стрижня пісковику, а саме: а) гістерезисну поведінку резонансної кривої як на лівій, так і на правій гілках; б) лінійне зменшення резонансної частоти із зростанням рівня навантаження; в) поступове відновлення (зростання) резонансної частоти за низьких динамічних навантажень, після того як зразок зазнав великого навантаження. Для відтворення значних нелінійних еластичних властивостей структури зерен пісковику використано реалістичний незбурений вигляд потенціальної енергії напруження. У нашій теорії повільну динаміку, яка пов'язана з пам'яттю про пікові напруження, що експериментально спостерігається, описано вимушеними кінетичними змінами в концентрації дефектів, які викликають гістерезисні ефекти через вплив на модуль Юнга. Крім того, ми пояснили, як посилення гістерезисних явищ випливає зі зростання рівноважної концентрації розірваних когезійних зв'язків, що з'являються внаслідок водонасичення. Навіть у межах запропонованого формалізму ми змогли передбачити незвичайний гістерезис з пам'яттю про кінцеву точку в новій, по суті, динамічній реалізації. Сенс цього ефекту полягає в пам'яті про попередню максимальну амплітуду періодичного навантажування, який проявляється у вигляді малих гістерезисних петель усередині великої гістерезисної петлі. Зазначимо, що цей ефект найчіткіше спостерігається в околі резонансної частоти стрижня. Теоретичні прогнози підтверджено експериментами, проведеними в Лос-Аламоській Національній лабораторії.

Список літератури

[1] *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 480 с.

[2] *Адушкин В.В.* О формировании ударной волны и разлёте продуктов взрыва в воздухе // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1963. — № 5. — С. 107—114.

[3] *Адушкин В.В., Коротков А.И.* Параметры ударных волн вблизи от заряда ВВ при взрыве в воздухе // Там же. — 1961. — № 5. — С. 119—128.

[4] *Аки К., Ричарде П.* Количественная сейсмология. Теория и методы. — М.: Наука, 1983. — Т. 1, 2.

[5] *Арутюнян Г.М.* Условия применимости результатов гидродинамики совершенного газа к дисперсным средам // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1979. — № 1. — С. 157—160.

[6] *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984. — 352 с.

[7] *Бахвалов Н.С., Эглит М.Э.* Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // Докл. АН СССР. — 1983. — **268**, № 4. — С. 836—840.

[8] *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1983. — 447 с.

[9] *Березин Ю.А.* Моделирование нелинейных волновых процессов. — М.: Наука, 1982. — 160 с.

[10] *Бовт А.Н., Мясников К.В., Николаевский В.Н. и др.* Камуфлетный взрыв в пористой среде // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1981. — № 6. — С. 121—129.

[11] *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гостехиздат, 1946. — 119 с.

[12] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1971. — 504 с.

[13] *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[14] *Броуд Г.* Точечный взрыв в воздухе // Механика. Расчеты взрывов на ЭВМ. — М.: Мир, 1976. — Т. 4. — С. 7—70.

[15] *Броуд Г.* Пространственные распределения давления, плотности и массовой скорости в ударной волне при точечном взрыве в воздухе // Механика. Расчеты взрывов на ЭВМ. — М.: Мир, 1976. — Т. 4. — С. 71—95.

[16] *Буевич Ю.А., Ясников Г.П.* Релаксационные методы в исследованиях процессов переноса // Инж.-физ. журн. — 1983. — **44**, № 3. — С. 489—504.

[17] *Василенко Н.В.* Теория колебаний. — К.: Вища шк., 1992. — 426 с.

[18] *Вахненко В.А.* Периодические коротковолновые возмущения в релаксирующей среде / АН УССР. Ин-т геофизики. — Препр. — Киев, 1991. — 20 с.

[19] *Вахненко В.А.* Нелинейные эффекты длинных волн в периодической среде // Акуст. журн. — 1995. — № 3. — С. 42—47.

[20] *Вахненко В.А.* Диагностика свойств структурированной среды длинными нелинейными волнами // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1996. — **37**, № 5. — С. 35—42.

[21] *Вахненко В.О.* Існування петлеподібних розв'язків модельного еволюційного рівняння // Укр. фіз. журн. — 1997. — **42**, № 1. — С. 104—110.

[22] *Вахненко В.О.* Подібність автомодельних потоків газу та двофазного середовища з нестисливою компонентою // Доп. НАН України. — 2010. — № 12. — С. 97—104.

[23] *Вахненко В.О.* Моделювання гістерезисного поводження пісковику в умовах повільного циклічного навантаження // Геофиз. журн. — 2011. — **33**, № 4. — С. 153—158.

[24] *Вахненко В.О.* Застосування методу оберненої задачі розсіювання до рівняння Вахненка—Паркеса для опису взаємодії солітону з періодичною хвилею // Доп. НАН України. — 2011. — № 8. — С. 73—79.

[25] *Вахненко В.О., Вахненко О.О., Даниленко В.А.* Релаксаційна модель механічної поведінки пісковику при квазістатичному навантаженні // Там само. — 2007. — № 7. — С. 109—115.

[26] *Вахненко В.А., Даниленко В.А., Кулич В.В.* Волновые процессы в периодической релаксирующей среде // Докл. АН УССР. — 1991. — № 4. — С. 93—96.

[27] *Вахненко В.А., Даниленко В.А., Кулич В.В.* Осредненное описание ударно-волновых процессов в периодических средах // Хим. физика. — 1993. — **12**, № 3. — С. 383—389.

[28] *Вахненко В.А., Даниленко В.А., Кулич В.В.* Осредненное описание волновых процессов в геофизической среде // Геофиз. журн. — 1993. — № 6. — С. 66—74.

[29] *Вахненко В.А., Даниленко В.А., Кулич В.В.* Асимптотическое обоснование модели многокомпонентной среды Ляхова // Физика горения и взрыва. — 1996. — **32**, № 2. — С. 176—180.

[30] *Вахненко В.А., Даниленко В.А.* Асимптотическая модель нелинейных волн в природных многокомпонентных средах // Геофиз. журн. — 1996. — № 5. — С. 12—18.

[31] *Вахненко В.А., Кудинов В.М., Паламарчук Б.И.* О влиянии тепловой релаксации на затухание сильной ударной волны в двухфазной среде // Прикл. механика. — 1982. — **18**, № 12. — С. 91—97.

[32] *Вахненко В.А., Кудинов В.М., Паламарчук Б.И.* Аналогия движения двухфазной среды, содержащей несжимаемую и газовую фазы, с движением газа // Докл. АН УССР. — 1983. — № 6. — С. 22—24.

[33] *Вахненко В.А., Кудинов В.М., Паламарчук Б.И.* К вопросу о затухании сильных ударных волн в релаксирующих средах // Физика горения и взрыва. — 1984. — № 1. — С. 105—111.

[34] *Вахненко В.А., Кулич В.В.* Длинноволновые процессы в периодической среде // Прикл. механика и техн. физика. — 1992. — № 6. — С. 49—56.

[35] *Вахненко В.А., Паламарчук Б.И.* Описание ударно-волновых процессов в двухфазных средах, содержащих несжимаемую фазу // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1984. — № 1. — С. 113—119.

[36] *Вахненко В.А., Паламарчук Б.И.* Эволюция сильной ударной волны в среде с тепловой релаксацией // Прикл. механика. — 1986. — № 3. — С. 78—84.

[37] *Вахненко В.О., Паркес Е.Дж., Даниленко В.А.* Точні двосолітонні розв'язки модельного нелінійного рівняння // Укр. фіз. журн. — 1999. — **44**, № 6. — С. 782—790.

[38] *Владимиров В.А., Даниленко В.А., Королевич В.Ю.* Качественный анализ и динамика волновых структур в нелинейных нелокальных моделях природных сред // Докл. АН Украины. — 1992. — № 1. — С. 89—93.

[39] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.

[40] *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. — М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1988. — 176 с.

[41] *Гамбурцева Н.Г., Николаев А.В., Хаврошкин О.Б., Цыплаков В.В.* Солитонные свойства телесейсмических волн // Докл. АН СССР. — 1986. — **291,** № 4. — С. 30—32.

[42] *Гельфанд Б.Е., Губанов А.В., Губин О.А. и др.* Затухание ударных волн в двухфазной среде жидкость—пузырьки газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1977. — № 1. — С. 173—176.

[43] *Гельфанд Б.Е., Губанов А.В., Тимофеев Е.И.* Особенности распространения ударных волн в пенах // Физика горения и взрыва. — 1981. — **17,** № 4. — С. 129—136.

[44] *Гелбер Н., Бартос Дж.М.* Сильные сферические взрывные волны в газопылевой среде // Ракет. техника и космонавтика — 1974. — **12,** № 1. — С. 143—145.

[45] *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации. — М.: Мир, 1973. — 280 с.

[46] *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 304 с.

[47] *Годунов С.К.* Уравнение математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.

[48] *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.

[49] *Гузь А.Н., Кабелна И., Маркуш Ш. и др.* Динамика и устойчивость слоистых композитных материалов. — Киев: Наук. думка, 1991. — 368 с.

[50] *Даниленко В.А.* К теории движения блочно-иерархических геофизических сред // Докл. АН Украины. — 1992. — № 2. — С. 87—90.

[51] *Даниленко В.А., Белінський І.В., Гржибовський В.В., Лемешко В.А.* Експериментальне дослідження деформування пружно-пластичного структурованого середовища та формування компактонів у ньому // Доп. НАН України. — 2010. — № 10. — С. 93—101.

[52] *Даниленко В.А., Даневич Т.Б., Скуратівський С.І.* Нелінійні математичні моделі середовищ з часовою та просторовою нелокальностями. — К.: Ін-т геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, 2008. — 86 с.

[53] *Де Гроот С.Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964. — 456 с.

[54] *Дейч М.Е., Филиппов Г.А.* Газодинамика двухфазных сред. — М.: Энергия, 1981. — 471 с.

[55] *Дерягин Б.В., Кротова Н.А.* Адгезия твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 279 с.

[56] *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. — М.: Наука, 1985. — 398 с.

[57] *Додд Р., Эйлбел Дж., Гиббон Дж. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 594 с.

[58] *Душин В. К.* Метод численного решения уравнений химической кинетики // Научные труды. — М.: Ин-т механики МГУ, 1973. — Т. 21. — С. 35—39.

[59] *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков А.П., Питаевский А.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

[60] *Клименко В.Ю., Дремин А.Н.* Структура фронта ударной волны в жидкости // Докл. АН СССР. — 1979. — **249**, № 4. — С. 840—843.

[61] *Клименко В.Ю., Дремин А.Н.* Структура фронта ударной волны в твердом теле // Там же. — 1980. — **251**, № 6. — С. 1369—1371.

[62] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1988. — 720 с.

[63] *Коробейников В.П.* Задачи теории точечного взрыва. — М.: Наука, 1985. — 400 с.

[64] *Косевич А.М.* Физическая механика реальных кристаллов. — К.: Наук. думка, 1981. — 328 с.

[65] *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. — М.: Наука, 1984. — 400 с.

[66] *Кудинов В.М., Паламарчук Б.И., Гельфанд Б.Е. и др.* Параметры ударных волн при взрыве зарядов ВВ в пене // Докл. АН СССР. — 1976. — **228**, № 3. — С. 555—557.

[67] *Кудинов В.М., Паламарчук Б.И., Вахненко В.А.* Затухание сильной ударной волны в двухфазной среде // Там же. — 1983. — **272**, № 5. — С. 1080—1083.

[68] *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. — М.: Наука, 1971. — Т. 2. — 422 с.

[69] *Кудряшов Н.А.* Точные солитонные решения обобщённого эволюционного уравнения волновой динамики // Прикл. математика и механика. — 1988. — **52**, вып. 3. — С. 465—470.

[70] *Кудряшов Н.А.* Точные решения уравнения n-го порядка с нелинейностью Бюргерса–Кортевега–де Вриза // Мат. моделирование. — 1989. — **1**, № 6. — С. 57—65.

[71] *Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е.* Теплообмен и волны в газожидкостных системах. — Новосибирск: Наука, 1984. — 304 с.

[72] *Кутателадзе С.С., Стырикович М.А.* Гидродинамика газожидкостных систем. — М.: Энергия, 1976. — 296 с.

[73] *Кэртисс У., Берд Р., Гиршфельд Дж.* Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 929 с.

[74] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1977. — 408 с.

[75] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1976. — 584 с.

[76] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.

[77] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — 528 с.

[78] *Лыков А.В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инж.-физ. журн. — 1965. — **9**, № 3. — С. 287—304.

[79] *Ляхов Г.М.* Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. — М.: Недра, 1974. — 200 с.

[80] *Ляхов Г.М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. — М.: Наука, 1982. — 288 с.

[81] *Мандельштам Л.И., Леонтович М.А.* К теории поглощения звука в жидкостях // Журн. эксперим. и теор. физики. — 1937. — Вып. 3, № 7. — С. 438—449.

[82] *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 430 с.

[83] *Найфэ А.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 410 с.

[84] *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. — Новосибирск: Ин-т теплофизики АН СССР, 1983. — 238 с.

[85] *Нестеренко В.Ф.* Импульсное нагружение гетерогенных материалов. — Новосибирск: Наука, 1992. — 197 с.

[86] *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Т. 1, 2.

[87] *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. — М.: Недра, 1984. — 232 с.

[88] *Николаевский В.Н.* Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как возможная модель сейсмоактивной среды // Докл. АН СССР. — 1985. — **283**, № 6. — С. 1321—1324.

[89] *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979. — 512 с.

[90] *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

[91] *Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в сильнонеоднородных структурах // Докл. АН СССР. — 1988. — **298**. — С. 76—79.

[92] *Паркин Б.Р., Гилмор Ф.Р., Броуд Г.Л.* Ударные волны в воде с пузырьками воздуха // Подводные и подземные взрывы: Сб. переводов. — М.: Мир, 1974. — С. 152—258.

[93] *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 384 с.

[94] *Родионов В.Н.* Диссипативные структуры в геомеханике // Успехи механики. — 1979. — Вып.4, № 2. — С. 47—111.

[95] *Родионов В.Н., Адушкин В.В., Костюченко В.Н. и др.* Механический эффект подземного взрыва. — М.: Недра, 1971. — 224 с.

[96] *Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М.* Основы геомеханики. — М.: Недра, 1986. — 301 с.

[97] *Рудингер Г.* Влияние конечного объёма, занимаемого частицами, на динамику смеси газа и частиц // Ракет. техника и космонавтика. — 1965. — **3**, № 7. — С. 3—10.

[98] *Рудяк В.Н.* Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. — М.: Наука, 1987. — 272 с.

[99] *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* Сейсмический процесс в блоковой среде. — М.: Наука, 1991. — 120 с.

[100] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1987. — 432 с.

[101] *Старостенко В.И., Даниленко В.А., Венгрович Д.Б. и др.* Моделирование эволюции осадочных бассейнов с учетом структуры природной среды и процессов самоорганизации // Изв. РАН. Физика Земли. — 2001. — **37**, № 12. — С. 40—51.

[102] *Струминский В.В.* Механика и технический прогресс. — М.: Наука, 1980. — 90 с.

[103] *Струминский В.В.* Аэродинамика и молекулярная газовая динамика. — М.: Наука, 1985. — 240 с.

[104] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 622 с.

[105] *Шидловский В.П.* Влияние диссипативных процессов на эволюцию ударных волн // Ракет. техника и космонавтика. — 1977. — **15**, № 1. — С. 35—41.

[106] *Ясников Г.П., Белоусов В.С.* Динамическое уравнение состояния смеси газа с твердыми частицами // Инж.-физ. журн. — 1978. — **35**, № 5. — С. 872—876.

[107] *Ясников Г.П., Белоусов В.С.* Динамическое уравнение состояния газа с испаряющимися каплями // Там же. — 1982. — **43**, № 5. — С. 733—740.

[108] *Abazari R.* Application of (G'/G)-expansion method to travelling wave solutions of three nonlinear evolution equation // Computers and Fluids. — 2010. — **39**. — P. 1957—1963.

[109] *Van den Abeele K.E.A., Carmeliet J., Johnson P.A., Zinszner B.* Influence of water on the nonlinear elastic mesoscopic response in Earth materials and the implications to the mechanism of nonlinearity // J. Geophys. Res. B. — 2002. — **107**. — P. 2121—2142.

[110] *Achenbach J.D.* Wave propagation in Plastic Solids. — North-Holland, Amsterdam, 1973. — 425 p.

[111] *Adams F.D., Coker E.G.* An investigation into the elastic constants of rocks, more especially with reference to cubic compressibility. — Washington: Carnegie Inst. Washington, 1906. — 69 p.

[112] *Baker W.E., Cox P.A., Westine P.S. et al.* Explosion hazards and evaluation. — Amsterdam; Oxford; New York: Elsevier Soientifio publ. company, 1983. — 807 p.

[113] *Bereznev I.A., Nikolaev A.V.* Experimental investigations of nonlinear seismic effects // Phys. Earth Planetary Int. — 1988. — **50**. — P. 83—87.

[114] *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — **28**. — P. 168—178.

[115] *Boitnott G.N.* Fundamental observations concerning hysteresis in the deformation of intact and jointed rock with applications to nonlinear attenuation in the near source region // Proc. the Numerical Modeling for Underground Nuclear Test Monitoring Sympos. — Los Alamos Natl. Lab. Rev., LA-UR-93-3839, 1993. – P. 121—137.

[116] *Bonner B.P., Wanamaker B.J.* Acoustic nonlinearitis produced by a single macroscopic fracture in granite // Review of Progress in Quantitative NDE / Eds D.O. Thompson, D.E. Chimenti. — New York: Plenum, 1991. — Vol. 10B. — P. 1861—1867.

[117] *Bocquet L., Charlaix E., Ciliberto S., Crassous J.* Microscopic derivation of non-markovian thermalization of a Brownian particle // Nature (London). — 1998. — **396**. — P. 735—737.

[118] *Brode H.L.* Numerical solutions of spherical blast waves // J. Appl. Phys. — 1955. — **26**, N 6. — P. 766—775.

[119] *Burgers J.M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics / Eds R. von Mises, T. von Karman. — New York: Acad. Press Inc., 1948. — V. 1. — P. 171—199.

[120] *Capogrosso-Sansone B., Guyer R.A.* Dynamic model of hysteretic elastic systems // Phys. Rev. B. — 2002. — **66**. — P. 224101—12.

[121] *Clark V.A., Tittmann B.R., Spencer T.W.* Effect of volatiles on attenuation (Q^{-1}) and velocity in sedimentary rocks // J. Geophys. Res. B. — 1980. — **85**. — P. 5190—5198.

[122] *Clarke J.F.* Lectures on plane waves in reacting gases // Ann. Phys. Fr. — 1984. — **9**. — P. 211—306.

[123] *Claytor K.E., Koby J.R., TenCate J.A.* Limitations of preisach theory: Elastic aftereffect, congruence, and end point memory // Geophys. Res. Lett. — 2009. — **36**. — P. L06304(4).

[124] *Collins R.E.* Flow of fluids through porous materials. — New York: Reinhold Publ. Corp., 1961. — 270 p.

[125] *Cook N.G.W., Hodgson K.* Some detailed stress-strain curves for rock // J. Geophys. Res. — 1965. — **70**. — P. 2883—2888.

[126] *Danylenko V.A., Danevych T.B., Makarenko O.S. et al.* Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. — Kyiv: Subbotin Institute of Geophysics, NAS of Ukraine, 2011. — 333 p.

[127] *Danilenko V.A., Kulich V.Y., Vakhnenko V.A.* Elements of self-organization and nonlinear wave processes in natural with structure / AS Ukraine. Institute of Geophysics. — Prepr. — Kiev, 1993. — 47 p.

[128] *Danylenko V.A., Sorokina Y.V., Vladimirov V.A.* On the governing equations in relaxing models and self-similar quasiperiodic solutions // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — **26**. — P. 7125—7135.

[129] *Darling T.W., TenCate J.A., Brown D.W., Clausen B., Vogel S.C.* Neutron diffraction study of the contribution of grain contacts to nonlinear stress-strain behavior // Geophys. Res. Lett. — 2004. — **31**. – L16604.

[130] *Dullien F.A.L.* Porous media. Fluid transport and pore structure. — New York: Acad. Press, 1979. — 396 p.

[131] *Drew D.A., Segel L.A.* Averaged equations for two-phase flows // Stud. Appl. Math. — 1971. — **50**, N 3. — P. 205—231.

[132] *Dullien F.A.L.* Porous Media. Fluid Transport and Pore Structure. — New York: Acad. Press, 1979. — 396 p.

[133] *Estévez P.G.* Reciprocal transformations for a spectral problem in 2+1 dimensions // Theor. Math. Physics. — 2009. — **159**. — P. 763—769.

[134] *Gardner O.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett. — 1967. — **19**. — P. 1095—1097.

[135] *Gordon R.B., Davis L.A.* Velocity and attenuation of seismic waves in imperfectly elastic rock // J. Geophys. Res. — 1968. — **73**. — P. 3917—3935.

[136] *Griggs D.T.* A model of hydrolytic weakening in quartz // J. Geophys. Res. B. — 1974. — **79**. — P. 1653—1661.

[137] *Gusev V.E., Lauriks W., Thoen J.* Dispersion of nonlinearity, nonlinear dispersion, and absorption of sound in micro-inhomogeneous materials // J. Acoust. Soc. Amer. — 1998. — **103**. — P. 3216—3226.

[138] *Guyer R.A., Johnson P.A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: the complex behaviour of rocks, soil, concrete. — Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KgaA, 2009. — 395 p.

[139] *Guyer R.A., Johnson P.A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: Evidence for a new class of materials // Physics Today. — 1999. — **52**. — P. 30—35.

[140] *Guyer R.A., McCall K.R., Van Den Abeele K.* Slow elastic dynamics in a resonant bar of rock // Geophys. Res. Lett. — 1998. — **25**. — P. 1585—1588.

[141] *Guyer R.A., McCall K.R., Boitnott G.N. et al.* Quantitative implementation of Preisach-Mayergoyz space to find static and dynamic elastic moduli in rock // J. Geophys. Res. — 1997. — **102**. — P. 5281—5293.

[142] *Hilbert L.B., Jr. Hwong T.K., Cook N.G.W. et al.* Effects of strain amplitude on the static and dynamic nonlinear deformation of Berea sandstone // Rock mechanics models and measurements challenges from industry / Eds P.P. Nelson, S.E. Laubach. — Rotterdam, Netherlands, 1994. — P. 497—515.

[143] *Hirota R.* Direct methods in soliton theory // Solitons / Eds R.K. Bullough, P.J. Caudrey. — New York; Berlin: Springer, 1980. — P. 157–176.

[144] *Hirota R.* The direct method in soliton theory. — Cambridge: Camb. Univ. Press, 2004. — P. 200.

[145] *Hirota R., Satsuma J.* A variety of nonlinear network equations generated from the Bäcklund transformation for the Toda lattice // Suppl. Progr. Theor. Physics. — 1976. — N 59. — P. 64—100.

[146] *Hodnett P.F., Moloney T.P.* On the structure during interaction of the two-soliton solution of the Korteweg—de Vries equation // SIAM J. Appl. Math. — 1989. — **49**. — P. 1174—1187.

[147] *Infeld E., Rowlands G.* Nonlinear waves. Solitons and chaos. — Cambrige: Cambr. Univer. Press, 1990. — 423 p.

[148] *Johnson P.A., McCall K.R.* Observation and implications of nonlinear elastic wave response in rock // Geophys. Res. Lett. — 1994. — **21**. — P. 165—168.

[149] *Johnson P.A., Rasolofosaon P.N.J.* Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies // Nonlinear Processes Geophys. — 1996. — **3**. — P. 77—88.

[150] *Johnson P.A., Shankland T.J., O'Connell R.J., Albright J.N.* Nonlinear generation of elastic waves in crystalline rock // J. Geophys. Res. — 1987. — **92**. — P. 3597—3602.

[151] *Johnson P., Sutin A.* Slow dynamics and anomalous nonlinear fast dynamics in diverse solids // J. Acous. Soc. Amer. — 2005. — **117**. — P. 124—130.

[152] *Johnson P.A., Zinszner B., Rasolofosaon P.N.J.* Resonance and nonlinear elastic phenomena in rock // J. Geophys. Res. B. — 1996. — **101**. — P. 11553—11564.

[153] *Kaselow A., Shapiro S.A.* Stress sensitivity of elastic moduli and electrical resistivity in porous rocks // J. Geophys. Eng. — 2004. — **1**. — P. 1—11.

[154] *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. — 1985. — **39**, N 5. — P. 422—443.

[155] *Kudinov V.M., Palamarchuk B.I., Vakhnenko V.A. et al.* Relaxation phenomena in a foamy structure // Shock Waves, Explosions, and Detonations. — New York: Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics, 1983. — P. 96–118.

[156] *Latter R.* Similarity solution for a spherical shock wave // J. Appl. Phys. — 1955. — **26**, N 8. — P. 954—960.

[157] *Lyman F.A., Chen D.-M.* Acoustic attenuation in a nonuniform gas containing droplets // AIAA J. — 1978. — **16**, N 5. — P. 503—509.

[158] *Majida F., Trikib H., Hayatc T. et al.* Solitary wave solutions of the Vakhnenko-Parkes equation // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. — 2012. — **17**, N 1. — P. 60—66.

[159] *McCall K.R., Guyer R.A.* Equation of state and wave propagation in hysteretic nonlinear elastic materials // J. Geophys. Res. — 1994. — **99**. — P. 23,887–23,898.

[160] Bäcklund transformations, the inverse scattering method, solitons, and their applications / Ed. R.M. Miura. — New York: Springer, 1976. — 295 p.

[161] *Moloney T.P., Hodnett P.F.* A new perspective on the N-soliton solution of the KdV equation // Proc. R. Ir. Acad. — 1989. — **89A**, N 2. — P. 205—217.

[162] *Mori Y., Jijikata K., Komine A.* Propagation of pressure waves in two-phase flow // Int. J. Multiphase flow. — 1975. — N 2. — P. 139—152.

[163] *Morrison A.J., Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation // Nonlinearity. — 1999. — **12**. — P. 1427—1437.

[164] *Mott-Smith H.M.* The solution of the Boltzmann equation for a shock wave // Phys. Rev. — 1951. — **82**, N 6. — P. 885—892.

[165] *Muser H.E., Fetersson J.* Thermodinamic theory of relaxation phenomena // Fortsch. Phys. — 1971. — B. 19. — P. 559—612.

[166] *von Neumann J.* John von Neumann collected. Works. — New York: Pergamon Press, 1963. — Vol. 6. — 163 p.

[167] *von Neumann J., Goldstine H.H.* Blast wave calculation // Communs Pure and Appl. Math. — 1955. — **8**. — P. 327–353.

[168] *von Neumann J., Richtmyer R.D.* A method, of the numerical calculation of hydrodynamic shock // J. Appl. Phys. — 1950. — **21**, N 1. — P. 232—237.

[169] *Nihei K.T., Hilbert L.B., Jr. Cook N.G.W. et al.* Frictional effects on the volumetric strain of sandstone // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. — 2000. — **37**. — P. 121—132.

[170] *Noordrijn L., van Wijngaarden L.* Relaxation effects, caused, by relative motion, on shock waves in gas bubble liquid mixtures // J. Fluid. Mech. — 1979. — **66**. — P. 1—9.

[171] *Nowick S., Berry B.S.* Anelastic relaxation in crystalline solids. — New York: Acad. Press, 1972. — 677 p.

[172] *Ostrovsky L.A., Johnson P.* Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials // Riv. Nuovo Cimento. — 2001. — **24**. — P. 1—46.

[173] *Outa E., Tajima K., Morii H.* Experiments and analyses of shock waves propagating through a gas-particle mixture // Bull. JSME. — 1976. — **19**, N 130. — P. 384—394.

[174] *Pai S.I., Menon S., Fan Z.Q.* Similarity solutions of strong shock wave propagation in a mixture of gas and dusty particles // Int. J. Eng. Shi. — 1980. — **18**, N 12. — P. 1365—1378.

[175] *Pandit B.I., Savage J.C.* Experimental test of Lomnitz's theonry of internal friction in rock // J. Geophys. Res. — 1973. — **78**. — P. 6097—6099.

[176] *Parkes E.J.* The stability of solutions of Vakhnenko's equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — **26**. — P. 6469—6475.

[177] *Parkes E.J., Vakhnenko V.O.* Explicit solutions of the Camassa-Holm equation // Chaos, Solitons and Fractals. — 2005. — **26**. — P. 1309—1316.

[178] *Rajagopal K.R., Tao L.* Machanics of mixtures. — Singapure: World Sci. Publ., 1995. — 195 p.

[179] *Rudinger G.* Some properties of shock relaxation in gas flows garring small particles // The Phys. Fluids. — 1964. — **7**, N 5. — P. 658—663.

[180] *Rudinger G., Chang A.* Analysis of nonsteady tho-phase flow // Jbid. — 1964. — **7**, N 11. — P. 1747—1754.

[181] *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory. — New York: Springer-Verlag, 1980. — 398 p.

[182] *Smith E., TenCate J.A.* Sensitive determination of nonlinear properties of Berea sandstone at low strains // Geophys. Res. Lett. — 2000. — **27**, N 13. — P. 1985—1988.

[183] *Starostenko V.I., Danilenko V.A., Vengrovitch D.B., Poplavsky K.N.* A fully dynamic model of continental. Rifting // Tectonophysics. — 1996. — **268**. — P. 211—220.

[184] *Starostenko V.I., Danilenko V.A., Vengrovitch D.B. et al.* A new geodynamical-thermal model of rift evolution, with application to the Dnieper-Donets basin, Ukraine // Jbid. — 1999. — **313**, N 1-2. — P. 29—40.

[185] *Stokes G.G.* On the theories of internal friction of fluids in motion // Transactions Cambr. Philosoph. Soc. — 1845. — **8**. — P. 287—305.

[186] *Suzuki T., Ohyagi S., Higashino F., Takano A.* The propagation of reacting blast waves through inert particle clouds // Acta Astronautica. — 1976.— **3**. — P. 517—529.

[187] *Taylor G.I.* The formation of a blast wave by a very intense explosion // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1955. — **201**, N 1065. — P. 159—186.

[188] *Ten Cate J.A.* Slow dynamics of Earth materials: An experimental overview // Pure Appl. Geophys. — 2011. — **168**. — P. 2211—2219.

[189] *Ten Cate J.A., Duran J., Shankland T.J.* Nonlinearity and slow dynamics in rocks: Respons to changes of temperature and humidity // Proc. 16th Inter. Symp. on Nonlinear Acoustics / Eds O.V. Rudenko, O.A. Sapozhnikov. — Moscow: MSU, 2002. — Vol. 2. — P. 767—770.

[190] *Ten Cate J.A., Shankland T.J.* Slow dynamics in the nonlinear elastic response of Berea sandstone // Geophys. Res. Lett. — 1996. — **23**. — P. 3019—3022.

[191] *Ten Cate J.A., Shankland T.J.* Slow dynamics and nonlinear response at low strains in Berea sandstone // Proc. 16th Inter. Congr. on Acoustics and 135th Meeting of the Acoustical Society of America / Eds P.A. Kuhl, L.A. Crum. — New York: American Institute of Physics, 1998. — Vol. 3. — P. 1565—1566.

[192] *Ten Cate J.A., Smith E., Guyer R.A.* Universal slow dynamics in granular solids // Phys. Rev. Lett. — 2000. — **85**. — P. 1020—1023.

[193] *Thovert J.-F., Yousefian F., Spanne P. et al.* Grain reconstruction of porous media: Application to a low-porosity Fontainebleau sandstone // Phys. Rev. E. — 2001. — **63**. — P. 061307(17).

[194] *Tittmann B.R., Clark V.A., Richardson J.M., Spencer T.W.* Possible mechanism for seismic attenuation in rocks containing small amounts of volatiles // J. Geophys. Res. B. — 1980. — **85**. — P. 5199—5208.

[195] *Truesdell C.* Rational thermodynamics. — New York: Springer-Verlag, 1984. — 570 p.

[196] *Vakhnenko V.A.* Solitons in a nonlinear model medium // J. Phys. A: Math. Gen. — 1992. — **26**, N 15. — P. 4181—4187.

[197] *Vakhnenko V.O.* High frequency soliton-like waves in a relaxing medium // J. Math. Phys. — 1999. — **40**, N 3. — P. 2011—2020.

[198] *Vakhnenko V.O.* Similarity in stationary motions of gas and two-phase medium with incompressible component // Int. J. Non-Linear Mech. — 2011. — **46**. — P. 1356—1360.

[199] *Vakhnenko V.O.* Special form of the singularity function for continuous part of the spectral data in inverse scattering method // Ukr. J. Phys. — 2012. — **57**, N 1. — P. 95—99.

[200] *Vakhnenko V.O.* Blast waves in multi-component medium with thermal relaxation // Natural Science. — 2014. — **6**. — P. 1055—1092.

[201] *Vakhnenko V.O., Danylenko V.A., Michtchenko A.V.* An asymptotic averaged model of nonlinear long waves propagation in media with a regular structure // Inter. J. Non-Linear Mech. — 1999. — **34**. — P. 643—654.

[202] *Vakhnenko V.O., Danylenko V.A., Michtchenko A.V.* Diagnostics of the medium structure by long wave of finite amplitude // Int. J. Non-Linear Mech. — 2000. — **35**. — P. 1105—1113.

[203] *Vakhnenko V.O., Nagorny V.P., Denisyuk I.I., Mishchenko A.V.* Estimation of rock failure zone under confined explosion // J. Min. Sci. — 2003. — **39**, N 3. — P. 247—254.

[204] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation // Nonlinearity. — 1998.— **11**. — P. 1457—1464.

[205] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J., Michtchenko A.V.* The Vakhnenko equation from the viewpoint of the inverse scattering method for the KdV equation // Int. J. Differ. Eq. Appl. — 2000. — **1**, N 4. — P. 429—450.

[206] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* A novel nonlinear evolution equation and its Bäcklund transformation // Rep. NAS Ukr. — 2001. — N 6. — P. 91—96.

[207] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* A novel nonlinear evolution equation integrable by the inverse scattering method // Jbid. — 2001. — N 7. — P. 81—86.

[208] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* The calculation of multi-soliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method // Chaos, Solitons and Fractals. — 2002. — **13**, N 9. — P. 1819—1826.

[209] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* A novel nonlinear evolution equation integrable by the inverse scattering method // Proc. the Fourth Inter. conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (23—29 June, 2003, Kyiv) / Eds A.G. Nikitin, V.M. Boyko, R.O. Popovych. — Kyiv: Inst. Mathematics, 2002. — **43**, pt 1. — P. 384—391.

[210] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J., Morrison A.J.* Integrability of a novel nonlinear evolution equation // Rep. NAS Ukr. — 2002. — N 6. — P. 86—92.

[211] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J., Morrison A.J.* A Bäcklund transformation and the inverse scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation // Chaos, Solitons and Fractals. — 2003. — **17**. — P. 683—692.

[212] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* Periodic and solitary-wave solutions of the Degasperis-Procesi equation // Jbid. — 2004. — **20**. — P. 1059—1073.

[213] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* The connection of the Degasperis-Procesi equation with the Vakhnenko equation // Proc. the Fifth Inter. conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (23—29 June, 2003, Kyiv) / Eds A.G. Nikitin, V.M. Boyko, R.O. Popovych. — Kyiv: Inst. Mathematics, 2004. — Vol. 50, pt 1. — P. 493—497.

[214] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* The solutions of a generalized Degasperis-Procesi equation // Rep. NAS Ukr. — 2006. — N 8. — P. 88—94.

[215] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* Solutions associated with both the bound state spectrum and the special singularity function for continuous spectrum in inverse scattering method // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences / Eds N.N. Kizilova, G.N. Zholtkevych. — Kharkov: Karazin Kharkov Nat. Univ., 2011. — P. 364—376.

[216] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method // Chaos, Solitons and Fractals. — 2012. — **45**. — P. 846—852.

[217] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* Solutions associated with discrete and continuous spectrums in the inverse scattering method for the Vakhnenko-Parkes equation // Progr. Theor. Phys. — 2012. — **127**, N 4. — P. 593—613.

[218] *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* Special singularity function for continuous part of the spectral data in the associated eigenvalue problem for nonlinear equations // J. Math. Phys. — 2012. — **53**, N 6. — P. 063504(11).

[219] *Vakhnenko O.O., Vakhnenko V.O., Shankland T.J., TenCate J.A.* Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars // Phys. Rev. E. Repid commun. — 2004. — **70**. — P. 015602(R).

[220] *Vakhnenko O.O., Vakhnenko V.O., Shankland T.J.* Soft-ratchet modelling of end-point memory in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks // Phys. Rev. B. — 2005. — **71**. — P. 174103.

[221] *Vakhnenko O.O., Vakhnenko V.O., Shankland T.J., TenCate J.A.* Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks, in Innovations in nonlinear acoustics // ISNA17 — 17th Inter. Symp. Nonlinear Acoustics including the Inter. Sonic Boom Forum (Pennsylvania, USA, 18—22 July 2005 / Eds A.A. Atchley, V.W. Sparrow, R.M. Keolian. AIP Conf. Proc. — Pennsylvania: State College, USA, 2006. — Vol. 838. — P. 120—123.

[222] *Vakhnenko V.O., Vakhnenko O.O., Shankland T.J., TenCate J.A.* Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials, in Innovations in nonlinear acoustics // ISNA17 — 17th Inter. Symp. Nonlinear Acoustics including the Inter. Sonic Boom Forum (Pennsylvania, USA, 18—22 July 2005) / Eds A.A. Atchley, V.W. Sparrow, R.M. Keolian. AIP Conf. Proc. — Pennsylvania: State College, USA, 2006. — Vol. 838. — P. 124—127.

[223] *Vakhnenko V.O., Vakhnenko O.O., TenCate J.A., Shankland T.J.* Modeling of stress-strain dependences for Berea sandstone under quasi-static loading // Phys. Rev. B. — 2007. — **76**. — P. 184108(8).

[224] *Vakhnenko V., Vakhnenko O., TenCate J., Shankland T.* Quasistatic loading of Berea sandstone // Rep. NAS Ukr. — 2008. — N 1. — P. 118—126.

[225] *Vakhnenko V., Vakhnenko O., TenCate J., Shankland T.* Modeling of the nonlinear resonant response in sedimantary rocks // Ukr. Geophys. J. — 2010. — **32**, N 4. — P. 195—197.

[226] *Wazwaz A.M.* N-soliton solutions for the Vakhnenko equation and its generalized forms // Phys. Scr. — 2010. — **82**. — P. 065006(7).

[227] *Westine P.S.* R-W plane analysis for vulnerability of targets to air blast // The Shock and Vibration Bulletion. — 1972. — N 42. — P. 173—183.

[228] *Ye Y., Song J., Shen S., Di Y.* New coherent structures of the Vakhnenko-Parkes equation // Results Physics. — 2012. — **2**. — P. 170–174.

[229] *Zener C.* Elasticity and anelasticity of metals. — Chicago: Univ. Chicago Press, 1948. — 170 p.

[230] *Zinszner B., Johnson P.A., Rasolofosaon P.N.J.* Influence of change in physical state on elastic nonlinear response in rock: Effects of confining pressure and saturation // J. Geophys. Res. — 1997. — **101**. — P. 8105–8120.

Зміст

Н а у к о в е   в и д а н н я

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ГЕОФІЗИКИ ім. С.І. СУББОТІНА
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ім. М.М. БОГОЛЮБОВА

ВАХНЕНКО В'ячеслав Олексійович
ВАХНЕНКО Олексій Олексійович

ХВИЛЬОВА ДИНАМІКА СТРУКТУРОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2016

Художній редактор *І.П. Савицька*
Технічний редактор *Т.С. Березяк*
Коректор *Н.А. Дерев'янко*
Комп'ютерна верстка *Л.В. Багненко*

Підп. до друку 24.05.2016. Формат 60×90/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Computer Modern. Друк. офс. Ум. друк. арк. 14,25.
Ум. фарбо-відб. 14,75. Обл.-вид. арк. 11,0.
Тираж 200 прим. Зам. №

Оригінал-макет виготовлено
у НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

Приватне підприємство «СКД»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія КІ № 164 від 25.04.2013 р.
08400 Київська обл., м. Переяслав-Хмельницький,
вул. Гімназійна, 9-А