



УДК 539.3

© 2007

В. О. Вахненко, О. О. Вахненко, член-кореспондент НАН України  
В. А. Даниленко

### Релаксаційна модель механічної поведінки пісковика при квазістатичному навантаженні

*We suggested, based on the relaxation approach, a phenomenological model to describe the stress-strain properties of the Berea sandstone under slow loading. The model allows one to recover qualitatively, as well as in some cases quantitatively, the main experimental observations, in particular, the hysteretic loops in stress-strain curves. Modeling the stress-strain dependences reproduces, in essence, the sandstone state equation.*

Типові експериментальні залежності деформації від напруження для гірських порід під дією квазістатичного навантаження вказують на нелінійну поведінку цих середовищ. Зокрема, циклічні гістерезисні петлі при повільних навантаженнях зразків пісковика добре відомі і можуть вважатися класичними [1–3]. Вивчення таких властивостей важливе для визначення поведінки гірських порід в різноманітних геофізичних умовах, наприклад при сейсмічному пошуку, при розпізнаванні відгуку від землетрусу тощо [4]. Моделюючи залежності деформації від напруження, ми, по суті, визначаємо рівняння стану для пісковика. Оскільки в експерименті, як правило, вимірюються тільки макропараметри (в даному випадку напруження та деформація), не маючи можливості дослідити процеси всередині зразка, то побудова адекватної моделі механічної поведінки пісковика виявляється досить складною задачею. Недавні експерименти [3] показують, що визначальні властивості пісковика задаються малим матеріальним об'ємом між контактами зерен. Проте ці експерименти ще не дають повної уяви про внутрішні процеси, що відбуваються в пісковіку під дією квазістатичного навантаження. Відома низка моделей, які якісно описують окремі властивості співвідношення між напруженням та деформацією. В першу чергу вкажемо на моделі Герца–Мідліна [5] і Преісаха–Маєргойза [4]. Однак застосування цих моделей ускладнюється проблемою встановлення відповідності між модельними елементами та реальними фізичними явищами всередині зразка. Крім того, штучний характер зв'язку між розподілом допоміжних гістерезисних елементів і максимальним рівнем навантаження значно звужує можливості цих моделей для прогнозування поведінки пісковиків.

Звертає на себе увагу те, що до недавнього часу більшість моделей ґрунтувалися виключно на статичних підходах, повністю нехтуючи релаксаційною природою, яка прита-

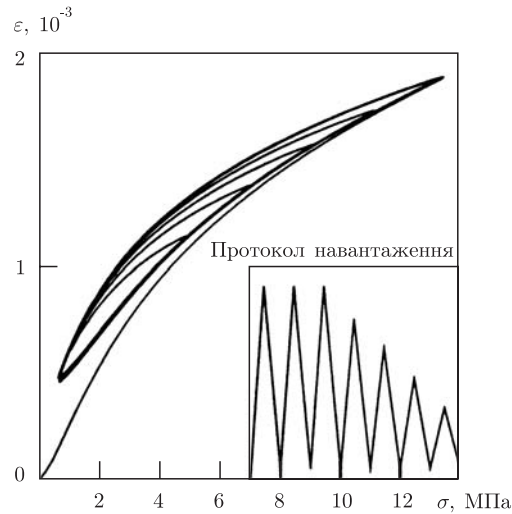


Рис. 1. Експериментальна залежність деформації від напруження, за даними роботи [1]

манна досліджуваним явищам. Винятком може бути робота [6], де зроблено спробу врахувати часову залежність. Можливість ігнорування релаксацією пов'язували з квазістатичністю навантаження, коли вважається, що всі внутрішні релаксаційні процеси встигають привести систему в рівноважний стан. Ми відкидаємо такий підхід як необгрунтований і розглянемо модель, в якій релаксаційним явищам надається належна увага.

**Аналіз експериментальних спостережень.** Класичними зразками експериментальних залежностей деформації від напруження вважаються роботи Боїтнотта [1] (рис. 1), а також Гільберта з колегами [2] (рис. 2). Величинами, що вимірюються, є одновісне навантаження та деформація. Протоколи навантажень подаються всередині відповідних рисунків. Ці дві групи експериментів [1, 2] були проведені для зразків пісковика Береа. Відзначимо, що дуже часто, цитуючи роботу [2], не вказують на початковий етап швидкого навантаження та розвантаження, що приводить пісковик у кондиційований стан, після якого, власне, і відбувався процес навантаження, відображений на залежності деформації від напруження (див. рис. 2).

Насамперед з наведених графічних залежностей видно їх екстремальна нелінійність, гістерезисність та пам'ять про кінцеву точку (в геофізиці цей ефект часто називається дискретною пам'яттю). Тобто доведені високим навантаженням до кондиційованого стану, який суттєво відрізняється від початкового, більшість гірських порід проявляють характеристики напруження — деформація у вигляді петель під дією циклічних навантажень. Ці петлі майже лягають одна на одну і, як правило, вигнуті. Як показує експеримент [3], процеси, які визначають поведінку пісковика і ведуть до подібних ефектів у багатьох гірських породах різного типу, відбуваються у невеликому об'ємі на контактах між зернами. Неоднозначна залежність деформації від напруження вказує на наявність внутрішніх процесів у пісковіку під дією навантаження. Один з можливих підходів для опису внутрішніх процесів є релаксаційний підхід.

З метою підтвердження релаксаційної природи процесів у пісковіку навіть під час повільних навантажень відзначимо експеримент з відгуку зразка пісковика на короткі східцеподібні імпульси навантаження [7]. Відгук, тобто деформація, запізнюється відносно навантаження, що свідчить про певні внутрішні релаксаційні процеси. Релаксаційна природа

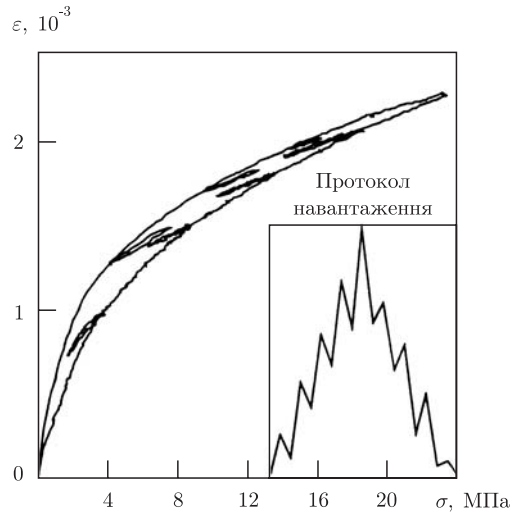


Рис. 2. Експериментальні криві напруження-деформація, за даними роботи [2]

явища відгуку деформації на навантаження може також бути виявлена на кривих напруження-деформація, знятих навіть в більш стандартних режимах для найрізноманітніших пісковиків [3], особливо для пісковика Меуле. Зокрема, звернемо увагу на те, що після моменту, коли навантаження стає постійним, зразок продовжує деформуватися ще протягом деякого часу.

**Модель механічної поведінки пісковика.** В даній роботі змодельовано тільки одно-вісний стиск зразка з пісковика, обмежуючись квазістатичними навантаженнями. В такому наближенні напруження однорідне по довжині зразка і визначається абсолютною величиною зовнішнього навантаження, яке відіграє роль зовнішнього керуючого параметра. Саме з цієї причини приймаємо для обох величин: напруження  $\sigma$  та деформації  $\varepsilon$  додатні значення, так само, як це часто приймається в експериментах з квазістатичного навантаження.

Відповідно до аналізу експериментальних графіків, які наведені в розділі 2, деформація  $\varepsilon$  може залежати від часу не тільки опосередковано через напруженість  $\sigma$ , але також явно. Таким чином, деформація може набувати різних значень при тому самому навантаженні. Однак наше головне припущення, яке буде підтверджене, полягає в тому, що деформація також чутлива до зміни навантаження, або більш точно до похідної навантаження від часу  $\dot{\sigma}$ .

Найбільш загальна лінійна теорія, яка враховує усі вищезазначені ефекти (тобто залежність деформації від часу, як явну, так і опосередковану через напруженість  $\sigma$  та похідну навантаження від часу  $\dot{\sigma}$ ), може бути отримана з добре відомої феноменологічної моделі стандартного лінійного твердого тіла [8, 9]

$$\tau \dot{\varepsilon} + \varepsilon = \frac{\sigma}{M_e} + \frac{\dot{\sigma}}{M_f}. \quad (1)$$

Це співвідношення характеризується трьома параметрами, які часто вибираються як час релаксації  $\tau$  і як два пружні модулі: рівноважний  $M_e$  та заморожений  $M_f$ . Одним з важливих результатів цієї теорії (1) є те, що відгук на періодичне збурення  $\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t + \varphi)$  для великих часів (тобто при  $t/\tau \gg 1$ ) може мати два принципово різні режими, а саме:

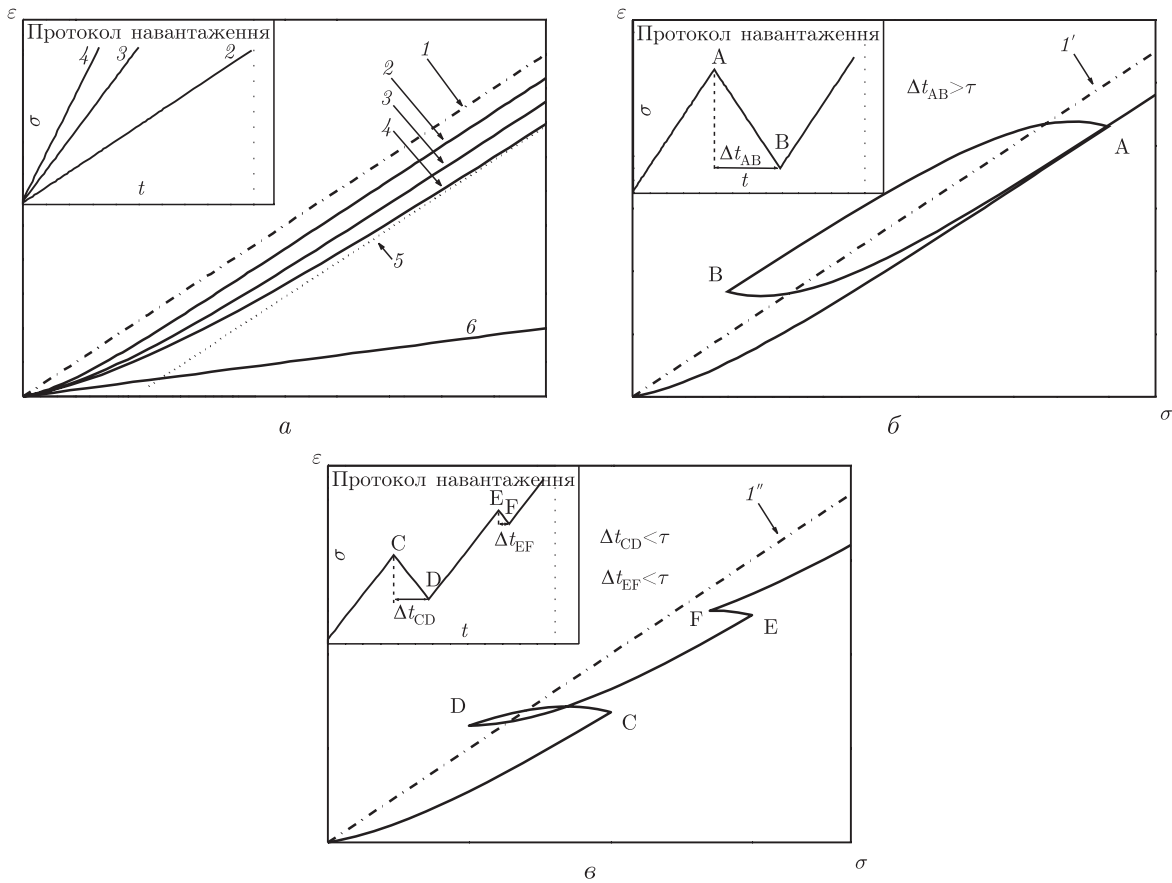


Рис. 3. Розрахункові залежності деформації від напруження для моделі стандартного лінійного твердого тіла.

Криві: 1, 1', 1'' — рівноважний стан; 2...4 — розрахункові дані при різних навантаженнях; 5 — асимптотика; 6 — заморожений стан

рівноважний  $\varepsilon = \sigma/M_e$  для низьких частот  $\omega\tau \ll 1$ , а також заморожений  $\varepsilon = \sigma/M_f$  для високих частот  $\omega\tau \gg 1$ .

Щодо можливого фізичного обґрунтування моделі стандартного лінійного твердого тіла, часто звертаються до уявлень про прихований внутрішній релаксаційний процес [10, 11]. Такі підходи є перспективними з огляду на можливість, не конкретизуючи внутрішні процеси (яким приписуються внутрішні змінні), розвивати релаксаційні моделі [11, 12]. Здебільшого релаксаційні моделі застосовуються для опису динамічних процесів, наприклад, для моделювання поведінки ґрунтів та гірських порід [9], коливань пружних систем [13]. У той самий час ми пропонуємо використати релаксаційний підхід для опису квазістатичного навантаження.

Для кращого розуміння впливу внутрішніх релаксаційних процесів на макропараметри при квазістатичному навантаженні розглянемо релаксаційні особливості поведінки стандартного лінійного твердого тіла, які на рис. 3 зображені у вигляді розрахункових залежностей деформації від напруження. Під час навантаження зі сталою швидкістю  $\dot{\sigma} = \text{const}$  криві асимптотично прямують до прямих, які паралельні до рівноважної прямої (штрих-пунктирна лінія на рис. 3). Причому зсув асимптотики  $\Delta$  відносно рівноважної лінії пропорційний

швидкості навантаження  $\dot{\sigma}$  та часу релаксації  $\tau$ , тобто  $\Delta \sim \tau \dot{\sigma}$ . Початкова умова стає неістотною через деякий час  $\Delta t$ , який більший, ніж час релаксації  $\Delta t > \tau$ . Дійсно, вихід на асимптотику відбувається за час  $\tau$  (див. рис. 3, а). На рис. 3, б показана гістерезисна петля, яка з'являється для часового інтервалу розвантаження  $\Delta t_{AB}$ , значно більшого за час релаксації  $\tau$ . У цьому випадку петля замикається через точку повернення А. Проте, якщо час розвантаження не перевищує час релаксації ( $\Delta t_{CD} < \tau$ ,  $\Delta t_{EF} < \tau$  на рис. 3, в), тоді петлі або не утворюються взагалі, або замикаються вище точки повернення С (див. рис. 3, в). Згадані особливості залежності деформації від напруження прояснюють вплив внутрішнього релаксаційного процесу на макропараметри, а також вказують на можливість застосування аналогічного підходу для моделювання експериментальних результатів.

Подібно до моделі стандартного лінійного твердого тіла, головна особливість нашого підходу полягає в принциповій можливості усталеного стану стежити як за зовнішнім навантаженням, так і за його часовою похідною. Розвиваючи основні ідеї, які об'єднуються в моделі стандартного лінійного твердого тіла та в її фізичному обґрунтуванні, кілька років тому була розвинута більш загальна теорія, що припускає опис додаткових ефектів нелінійної пружності [14]. Було запропоноване динамічне рівняння стану

$$\tau \frac{d}{dt} [\varepsilon - \varepsilon_f(\sigma)] + \varepsilon - \varepsilon_e(\sigma) = 0, \quad (2)$$

тобто співвідношення між деформацією  $\varepsilon$ , напруженням  $\sigma$  і їхніми першими похідними  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\sigma}$ , з метою врахування нелінійностей через суттєво нелінійні функціональні залежності деформацій від напруження як для термодинамічного рівноважного стану  $\varepsilon_e(\sigma)$  при нескінченно повільному навантаженні, так і для замороженого псевдо-рівноважного стану  $\varepsilon_f(\sigma)$  при нескінченно швидкому навантаженні. Тут поняття повільний та швидкий розуміються в порівнянні з типовим часом релаксації прихованого внутрішнього процесу  $\tau$ . Формально кажучи, залежність  $\varepsilon_e = \varepsilon_e(\sigma)$  може мислитися, як рівняння стану в граничному випадку миттєвої релаксації  $\tau \rightarrow 0$ , тоді як залежність  $\varepsilon_f = \varepsilon_f(\sigma)$ , — як рівняння стану у випадку відсутності релаксації  $\tau \rightarrow \infty$ .

Звертаємо увагу, що, подібно до лінійної теорії, для виведення рівняння (2) не має необхідності конкретизувати внутрішні обмінні процеси. Так чи інакше, але макроскопічні характеристики  $\varepsilon_e(\sigma)$ ,  $\varepsilon_f(\sigma)$  та  $\tau$  формуються в цьому підході в комбінаціях, зрозумілих для подальшого модельного опису. Певна річ, що ці макроскопічні параметри, так само, як і вигляд функціональних залежностей  $\varepsilon_e(\sigma)$  та  $\varepsilon_f(\sigma)$ , самі по собі вибираються з аналізу вже відомих експериментальних результатів.

Щодо рівняння рівноважного стану  $\varepsilon_e(\sigma)$ , то воно визначається звичайною формулою

$$\varepsilon_e(\sigma) = (E_e(\sigma))^{-1} \sigma, \quad (3)$$

причому залежність модуля Юнга  $E_e(\sigma)$  записується через імперичне співвідношення для апроксимації низки експериментальних даних (див. [15] і зроблені там посилання)

$$E_e(\sigma) = E_e^+ + (E_e^- - E_e^+) \exp(-D\sigma). \quad (4)$$

Сталі  $E_e^-$ ,  $E_e^+$ ,  $D$  вибираються з чисельного експерименту поблизу значень, наведених у роботі [15]. Для визначеності ми задаємо функціональну залежність для замороженого стану таким наближенням:

$$\varepsilon_f(\sigma) = a\varepsilon_e(\sigma), \quad (5)$$

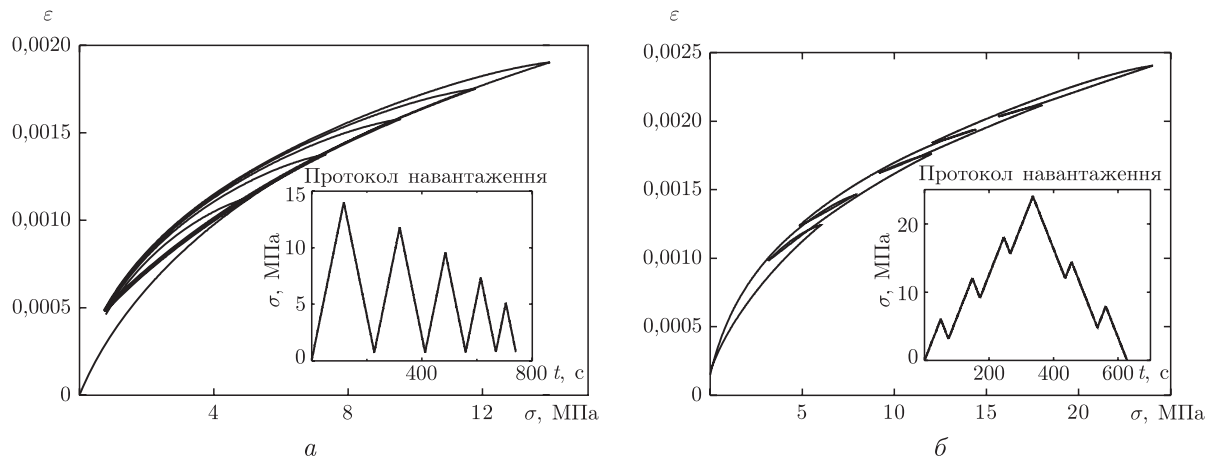


Рис. 4. Моделювання експерименту Боїтнотта [1] (а) та Гільберта з колегами [3] (б). Теоретична крива для некондиційованого стану не показана (б), оскільки на експериментальних кривих рис. 2 немає її відповідника

де множник  $a$  — стала, яка розташована в інтервалі  $0 < a < 1$ . Наприклад, у лінійній теорії співвідношення (5) знаходить своє точне підтвердження в такому твердженні: відношення рівноважної швидкості звуку до замороженої не залежить від тиску.

Задаючись залежністю навантаження від часу  $\sigma = \sigma(t)$  (тобто протоколом навантаження), можна розв'язати рівняння (2)–(5). Як правило, ми будемо використовувати початкові умови у вигляді  $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_e(\sigma(t = 0))$ .

**Моделювання характеристик напруження – деформація.** З огляду на співвідношення (5), динамічне рівняння стану (2) можна вважати заданим, якщо відомо рівняння рівноважного стану пісковика  $\varepsilon_e = \varepsilon_e(\sigma)$  та характерний час релаксації  $\tau$ . Маючи на меті проілюструвати релаксаційний механізм, притаманний внутрішнім обмінним процесам, ми подаємо рис. 4. Протоколи навантаження якісно відповідають навантаженням з роботи Боїтнотта (див. рис. 1 у [4]), а також з роботи Гільберта з колегами (див. рис. 2 в [4]). Сталі для рівняння стану (2)–(5) для обох випадків приймаються однаковими. Найкраще можливе наближення з експериментами було отримано для часу релаксації  $\tau = 18$  с, в той час як інші сталі мали такі значення:  $E_e^- = 1,5$  ГПа,  $E_e^+ = 32$  ГПа,  $D = 0,05$  МПа<sup>-1</sup>,  $a = 0,7$ .

Ми зазначаємо, що моделювання експерименту з роботи Боїтнотта [1] приводить майже до ідеального результату (порівняйте рис. 1 з рис. 4, а). Теоретичні криві в цьому випадку не тільки якісно відтворюють експериментальні криві, а значною мірою збігаються з ними кількісно. На відміну до цього експерименти Гільберта з колегами [2] не можуть бути описані винятково релаксаційним механізмом (див. рис. 2 та 4, б), оскільки не вдається замкнути малі петлі через точку повернення для будь-яких варіацій сталих у рівнянні стану. З урахуванням рис. 3, знаходимо відповідь на запитання, чому релаксаційний механізм не може забезпечити пояснення замкнутості малих петель через точку повернення. Дійсно, щоб мала петля була замкнута через точку повернення, потрібно в розрахунках зменшувати час релаксації  $\tau$  відносно до сталої швидкості навантаження (див. рис. 3, в), це з одного боку. З другого, — зменшення  $\tau$  приводить до виродження великої петлі у лінію (див. рис. 3, а, б). Отже, релаксаційного механізму недостатньо, щоб відтворити ефект пам'яті про кінцеву точку. Ми вважаємо, що одним з можливих кроків до вдосконалення запропонованої моделі може бути врахування низки внутрішніх процесів

як паралельних (тобто незалежних між собою), так і послідовних (тобто залежних між собою).

На підставі викладеного матеріалу, запропоновано застосування релаксаційного підходу для описання повільного навантаження на пісковик. Власне, залежність (2) є рівнянням стану пісковика при квазістатичному навантаженні. Розрахункові криві якісно, а в деяких випадках і кількісно, відтворюють залежності, що спостерігаються для пісковика Бера в експериментальних роботах Боїтнотта [1] та Гільберта з колегами [2], зокрема, гістерезисну поведінку кривих напруження — деформація. Однак, моделюючи експеримент з роботи [2], не вдається замкнути внутрішні (малі) петлі через точку повернення. Для адекватного аналізу малих петель необхідно вдосконалення нашої моделі.

1. *Boitnott G. N.* Fundamental observations concerning hysteresis in the deformation of intact and jointed rock with applications to nonlinear attenuation in the near source region // Proc. Numer. Model. Underground Nuclear Test Monitor. Symp. – 1993. – LA-UR – 93–3839. – P. 121–137. – [Los Alamos Natl. Lab. Rev.].
2. *Hilbert Jr L. B., Hwang T. K., Cook N. G. W. et al.* Effects of strain amplitude on the static and dynamic nonlinear deformation of Berea sandstone // Rock mechanics models and measurements challenges from industry / Ed. by P. P. Nelson and S. E. Laubach. – Rotterdam, Netherlands. – 1994. – P. 497–515.
3. *Darling T. W., TenCate J. A., Brown D. W. et al.* Neutron diffraction study of the contribution of grain contacts to nonlinear stress-strain behavior // Geophys. Res. Lett. – 2004. – **31**. – L16604.
4. *Guyer R. A., McCall K. R., Boitnott G. N. et al.* Quantitative implementation of Preisach–Mayergoyz space to find static and dynamic elastic moduli in rock // J. Geophys. Res. – 1997. – **102**. – P. 5281–5293.
5. *Nihei K. T., Hilbert Jr L. B., Cook N. G. W. et al.* Frictional effects on the volumetric strain of sandstone // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. – 2000. – **37**. – P. 121–132.
6. *Bentahar M., El Agra H., El Guerjouma R. et al.* Hysteretic elasticity in damaged concrete: Quantitative analysis of slow and fast dynamics // Phys. Rev. B. – 2006. – **73**. – 014116.
7. *Pandit B. I., Savage J. C.* Experimental test of Lomnitz's theory of internal friction in rock // J. Geophys. Res. – 1973. – **78**. – P. 6097–6099.
8. *Zener C.* Elasticity and Anelasticity of Metals. – Chicago: Chicago univ. press, 1948. – 170 p.
9. *Ляхов Г. М.* Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. – Москва: Недра, 1974. – 192 с.
10. *Мандельштам Л. И., Леонтович М. А.* К теории поглощения звука в жидкостях // Журн. эксперим. теорет. физики. – 1937. – **7**, № 3. – С. 438–449.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. – Москва: Наука, 1976. – 584 с.
12. *Владимиров В. А., Даниленко В. А., Королевич В. Ю.* Нелинейные модели многокомпонентных релаксирующих сред. Динамика волновых структур и качественный анализ. – Киев, 1990. – 41 с. – (Препр. АН УССР. Ин-т геофизики им. С. И. Субботина).
13. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – Москва: Госстроиздат, 1960. – 131 с.
14. *Vakhnenko V. O.* High frequency soliton-like waves in a relaxing medium // J. Math. Phys. – 1999. – **40**. – P. 2011. – 2020.
15. *Kaselow A., Shapiro S. A.* Stress sensitivity of elastic moduli and electrical resistivity in porous rocks // J. Geophys. Eng. – 2004. – **1**. – P. 1–11.

*Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна*

*НАН України, Київ*

*Інститут теоретичної фізики*

*ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 15.01.2007*